

УДК 539.374

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ СКРУЧИВАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

©2025 г. А. С. Бегун<sup>а, б, \*</sup>, Л. В. Ковтанюк<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

<sup>б</sup>Владивостокский государственный университет, Владивосток, Россия

\*E-mail: [asustinova@mail.ru](mailto:asustinova@mail.ru), \*\*e-mail: [lk@iacp.dvo.ru](mailto:lk@iacp.dvo.ru)

Поступила в редакцию 11.02.2025 г.

После доработки 24.02.2025 г.

Принята к публикации 25.02.2025 г.

С использованием математической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами получено аналитическое решение задачи о деформировании в условиях ползучести вязкоупругого материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями, при повороте внешнего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внутренний цилиндр является неподвижным. Вычислены перемещения, обратимые и необратимые деформации, напряжения на всех этапах деформирования, включая остаточные деформации и напряжения при полной разгрузке.

*Ключевые слова:* большие деформации, ползучесть, упругость, остаточные напряжения

DOI: 10.31857/S1026351925040107, EDN: BNYIDL

**1. Введение.** Задачи определения прочностных характеристик элементов конструкций в условиях сложных напряженно-деформированных состояний при различных термомеханических воздействиях являются актуальными задачами современной авиационной, аэрокосмической, энергетической промышленности. Исследование поведения материалов при их интенсивном формоизменении возможно только в случае одновременного учета их упругих, вязких и пластических свойств. В расчетах технологий холодной формовки и обтяжки, которые по ряду параметров являются наиболее перспективными технологиями изготовления крупногабаритных элементов конструкций, определяющим является свойство ползучести материалов [1–4]. Размерная точность готовых изделий определяющим образом зависит от упругого отклика материала изделия в процессе снятия оснастки (в процессах разгрузки).

Наиболее разработанными областями исследования как для установившейся, так и для неустановившейся ползучести являются толстостенные цилиндры, подвергающиеся различным типам нагрузки [5–10], и толстостенные сферические сосуды под давлением [2, 11, 12]. В основном рассматривается случай малых деформаций, а численные расчеты выполнены методом конечных элементов. Для теорий конечных деформаций также имеются некоторые решения для вращающегося полого цилиндра [13] и сферического сосуда под давлением [14, 15], изготовленных из изотропного и однородного материала. Полуаналитическое решение для исследования ползучести и релаксации полимерных материалов при конечной деформации цилиндров кручения-растяжения представлено в работе [16].

Большинство задач, описывающих процессы ползучести, являются геометрически и физически нелинейными. Поэтому проинтегрировать определяющие соотношения или предложить аналитические методы их решения удастся только в исключительных частных случаях. Таких решений получено немного [17–22] для установившейся ползучести: для толстостенных вращающихся цилиндров [17], для толстостенной сферы под давлением [18], для вращающихся толстостенных цилиндрических оболочек [19], при кручении и изгибе стержней [20], при чистом растяжении трубчатых образцов с постоянной нагрузкой [21]. Численные и аналитические решения для сварных соединений кольцевых труб под давлением, полученные методом возмущений, содержатся в работе [22].

Здесь представим новое решение задачи неустановившейся ползучести о деформировании вязкоупругого материала, расположенного между двумя соосными жесткими цилиндрами при повороте внешнего цилиндра. Решение получено в рамках теории течения упругопластических материалов с использованием модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами [23–25], в которой согласно формализму неравновесной термодинамики обратимые и необратимые деформации как термодинамические параметры состояния в процессе деформирования задаются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Первое решение в рамках модели [23–25] о деформировании в условиях неустановившейся ползучести материала в круглой трубе при его прямолинейном движении приведено в работе [26].

**2. Основные модельные соотношения.** Будем использовать математическую модель больших упругопластических деформаций [23–25]. Обратимая  $\mathbf{e}$  и необратимая  $\mathbf{p}$  – симметричные составляющие тензора деформаций Альманси  $\mathbf{d}$  в прямоугольной системе декартовых координат Эйлера  $\mathbf{x}$  определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \quad \frac{D\mathbf{n}}{Dt} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $D/Dt$  – оператор объективной производной тензора по времени  $t$ , выпитанный для произвольного тензора  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  – тензоры скоростей полных и

необратимых деформаций;  $\mathbf{r}$  – тензор вращений с нелинейной составляющей  $\mathbf{z}$ , определяемые по формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = -\mathbf{r}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \quad \nabla \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w}, \\ \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \\ \mathbf{z} = -\mathbf{z}^T = A^{-1} \left( B^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} \right), \quad (2.2) \\ A = 8 - 8J_1 + 3J_1^2 - J_2 - \frac{1}{3}J_1^3 + \frac{1}{3}J_3, \quad B = 2 - J_1, \\ J_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}, \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^2, \quad J_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^3.\end{aligned}$$

В (2.2)  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  – векторы перемещений и скорости. Из соотношений (2.1) следует разделение тензора полных деформаций Альманси  $\mathbf{d}$  на обратимую  $\mathbf{e}$  и необратимую  $\mathbf{p}$  составляющие:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}. \quad (2.3)$$

Компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  Эйлера–Коши полностью определяются обратимыми деформациями и в случае несжимаемой изотропной среды и при наличии необратимых деформаций связаны с ними соотношением, являющимся аналогом формулы Мурнагана в нелинейной теории упругости:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}), \quad (2.4)$$

где  $p$  – добавочное гидростатическое давление.

Упругий потенциал  $W$  принимаем в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния:

$$\begin{aligned}W = W(I_1, I_2) &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots \\ I_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2, \quad (2.5)\end{aligned}$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $b$ ,  $\chi$  – упругие модули более высокого порядка.

Далее полагаем, что необратимое деформирование материала связано только с его ползучестью непосредственно с начала деформирования, во всем процессе деформирования пластическое течение не возникает. Для конкретизации источника необратимых деформаций  $\boldsymbol{\gamma}$  в условиях накопления деформаций ползучести выберем классический степенной закон Нортон [27]:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{\partial V(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\boldsymbol{\Sigma}) = B\boldsymbol{\Sigma}^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} = \max|\sigma_i - \sigma_j|. \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.6)  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  – скорости деформаций ползучести,  $\sigma_i$  – главные напряжения,  $B$  и  $n$  – параметры ползучести материала.

Добавляя к выписанным соотношениям уравнения равновесия  $\nabla\sigma=0$ , получаем замкнутую систему уравнений квазистационарного изотермического деформирования.

**3. Деформирование вязкоупругого материала в зазоре между двумя жесткими цилиндрами при повороте внешнего из них.** Рассмотрим деформирование несжимаемого вязкоупругого материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями, заданных уравнениями  $r=r_0$  (внутренняя поверхность) и  $r=R$  (внешняя поверхность) в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$ .

В качестве примера исследуем случай деформирования материала при повороте внешнего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внутренний цилиндр является неподвижным. Считаем, что на граничных поверхностях выполняются условия жесткого сцепления материала со стенками, тогда граничные условия зададим в виде:

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = \mathbf{v}|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{r\phi}|_{r=R} = \frac{c(t)}{R^2}. \quad (3.1)$$

Полагая, что траекториями движения точек являются окружности, получим кинематические соотношения:

$$u_r = r(1 - \cos\theta), \quad u_\phi = r\sin\theta, \\ d_{r\phi} = \frac{1}{2}r\frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad d_{rr} = -2d_{r\phi}^2 = -\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2, \quad v_\phi = r\frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}r\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t}, \quad (3.2)$$

где  $\theta$  – центральный угол закручивания.

Согласно (3.2) диагональные компоненты тензора полных деформаций Альманси имеют порядок квадрата недиагональных компонент. Аналогичное будет справедливо для тензоров обратимых и необратимых деформаций. Далее построим решение, пренебрегая слагаемыми выше первого порядка по диагональным компонентам тензоров деформаций, и выше второго – по недиагональным. Такое ограничение не является принципиальным, но позволяет получить точное решение задачи. В используемом приближении для отличной от нуля компоненты тензора вращения получаем выражение:

$$r_{r\phi} = \omega_{r\phi} = -\frac{\partial\theta}{\partial t} - \varepsilon_{r\phi} = -\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{2}r\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial t}. \quad (3.3)$$

Напряжения в среде через обратимые деформации согласно формулам (2.4) и (2.5) определяются зависимостями:

$$\sigma_{rr} = -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\phi\phi} + \mu e_{r\phi}^2, \\ \sigma_{\phi\phi} = -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{\phi\phi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\phi}^2, \\ \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) + 2b(e_{rr} + e_{\phi\phi}) - 2\mu e_{r\phi}^2, \\ \sigma_{r\phi} = 2\mu e_{r\phi}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{\sigma_{r\phi}} = \frac{e_{rr} - e_{\phi\phi}}{e_{r\phi}}.$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае записываются в форме:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\phi}}{r} = 0. \quad (3.5)$$

Интегрируя второе уравнение (3.5), найдем, что

$$\sigma_{r\phi} = c(t) / r^2, \quad (3.6)$$

т.е. если напряжение  $\sigma_{r\phi}$  задано на внешней жесткой поверхности, то его распределение будет известно во всей области деформирования.

В рассматриваемом случае потенциал ползучести  $V(\sigma_{ij})$  переписывается в форме:

$$V(\sigma_{ij}) = B(4\sigma_{r\phi}^2 - (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})^2)^{n/2}. \quad (3.7)$$

Кинематические соотношения в соответствии с (2.1)–(2.3) принимают вид:

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} - \frac{2}{r} p_{r\phi} v_{\phi}, \quad \frac{dp_{\phi\phi}}{dt} = \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial t} + \frac{2}{r} p_{r\phi} v_{\phi}, \quad \frac{dp_{r\phi}}{dt} = \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Согласно закону ползучести (2.6) и соотношениям (3.6) и (3.7), для скоростей необратимых деформаций получим:

$$\varepsilon_{r\phi}^c = (-1)^{n+1} B n 2^{n-1} \left( \frac{c}{r^2} \right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^c = \frac{(e_{rr} - e_{\phi\phi}) \varepsilon_{r\phi}^c}{2e_{r\phi}}, \quad \varepsilon_{\phi\phi}^c = -\varepsilon_{rr}^c. \quad (3.9)$$

Используя уравнения переноса для обратимых и необратимых деформаций (2.1), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{dt} &= \varepsilon_{rr}^c - 2p_{r\phi} (r_{\phi r} + \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{dp_{\phi\phi}}{dt} &= -\varepsilon_{rr}^c + 2p_{r\phi} (r_{\phi r} - \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{dp_{r\phi}}{dt} &= \varepsilon_{r\phi}^c, \\ \frac{de_{rr}}{dt} &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^c - e_{r\phi} (2r_{\phi r} + \varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{de_{\phi\phi}}{dt} &= \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{rr}^c - e_{r\phi} (2r_{\phi r} + \varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c), & & \\ & & \frac{de_{r\phi}}{dt} &= \varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c. & & \end{aligned} \quad (3.10)$$

При подстановке соотношений (3.9) система (3.10) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} &= \varepsilon_{rr}^c - 2p_{r\phi} (\varepsilon_{r\phi} + \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial t} &= -\varepsilon_{rr}^c + 2p_{r\phi} (\varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial t} &= \varepsilon_{r\phi}^c, \\ \frac{\partial e_{rr}}{\partial t} &= -\varepsilon_{rr}^c - e_{r\phi} (3\varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{\partial e_{\phi\phi}}{\partial t} &= \varepsilon_{rr}^c + e_{r\phi} (3\varepsilon_{r\phi} + \varepsilon_{r\phi}^c), & \frac{\partial e_{r\phi}}{\partial t} &= \varepsilon_{r\phi} - \varepsilon_{r\phi}^c. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (2.11) с учетом (2.1), (2.3), (3.3) для диагональных компонент обратимых и необратимых деформаций  $e_{rr}$ ,  $p_{rr}$ ,  $e_{\phi\phi}$ ,  $p_{\phi\phi}$  получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial t} &= \frac{(p_{\phi\phi} - e_{r\phi}^2)}{e_{r\phi}} \varepsilon_{r\phi}^c - 2p_{r\phi} \varepsilon_{r\phi}, \quad p_{rr} + p_{\phi\phi} = -2p_{r\phi}^2, \\ p_{\phi\phi} &= -e_{\phi\phi} + 2e_{r\phi} p_{r\phi} + e_{r\phi}^2 / 2, \quad e_{rr} + e_{\phi\phi} = -e_{r\phi}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При задании напряжения сдвига на внешнем цилиндре параметры  $\varepsilon_{r\phi}^c$ ,  $\varepsilon_{r\phi}$ ,  $e_{r\phi}$ ,  $p_{r\phi}$  будут известными, что позволяет найти угловую скорость и угол закручивания, используя граничные условия (3.1) на внутренней поверхности  $r=r_0$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_\phi}{r} = \frac{\dot{c}}{2\mu} C + \frac{(-1)^{n+1} Bn(2c)^{n-1}}{n-1} \left( \frac{1}{r_0^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}} \right), \\ \theta &= \frac{c}{2\mu} C + \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} Bnc_1}{n-1} \left( \frac{1}{r_0^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}} \right), \quad c_1 = \int_0^t c^{n-1} d\xi, \quad C(r_0) = \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Для решения системы (3.12) в аналитическом виде примем постоянную в законе ползучести Нортона  $n=3$ . Сдвиговое напряжение на внешней поверхности  $r=r_0$  зададим так, что оно сначала линейно увеличивается по абсолютному значению с течением времени, потом поддерживается постоянным в течение времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ , затем линейно уменьшается до нуля. Таким образом, для функции  $c(t)$  имеем:

$$c(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq t_1, \\ at_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ at_1 - b(t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3. \end{cases} \quad (3.13)$$

Здесь  $a$  и  $b$  постоянные, которые выбраны так, чтобы в процессе деформирования напряженное состояние не достигло предела текучести.

При увеличивающемся напряжении сдвига найдем:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} &= \frac{at}{r^2}, \quad e_{r\phi} = \frac{at}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\phi}^c = \frac{Dat^2}{\mu r^2}, \quad p_{r\phi} = \int_0^t \varepsilon_{r\phi}^c(\xi) d\xi = \frac{Dat^3}{3\mu r^2}, \quad D(r) = \frac{4aBn\mu}{r^2}, \\ \omega &= \frac{a}{2\mu} C + \frac{Dar^2}{2\mu} t^2 C_1, \quad \theta = \frac{at}{2\mu} C + \frac{Dar^2}{6\mu} t^3 C_1, \quad C_1(r_0) = \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из системы (3.12) следует дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial(p_{\phi\phi} - 2e_{r\phi} p_{r\phi})}{\partial t} = -e_{r\phi} \varepsilon_{r\phi}^c - (p_{\phi\phi} - 2e_{r\phi} p_{r\phi}) \frac{\varepsilon_{r\phi}^c}{e_{r\phi}^2}. \quad (3.15)$$

Откуда, используя условие отсутствия в начальный момент времени  $t=0$  деформаций в материале, найдем:

$$p_{\phi\phi} - 2e_{r\phi} p_{r\phi} = \frac{-a^2}{4D\mu^2 r^4} \left( Dt^2 + e^{-Dt^2} - 1 \right). \quad (3.16)$$

Тогда диагональные компоненты тензоров необратимых и обратимых деформаций вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_{\phi\phi} &= \frac{-a^2}{4D\mu^2 r^4} \left( Dt^2 + e^{-Dt^2} - 1 \right) + \frac{D}{3} \frac{a^2 t^4}{\mu^2 r^4}, \quad p_{rr} = -p_{\phi\phi} - 2p_{r\phi}^2, \\ e_{\phi\phi} &= 2e_{r\phi} p_{r\phi} - p_{\phi\phi} + \frac{e_{r\phi}^2}{2}, \quad e_{rr} = -2e_{r\phi} p_{r\phi} + p_{\phi\phi} - \frac{3e_{r\phi}^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Компоненту напряжений  $\sigma_{rr}$  можно получить из первого уравнения равновесия (3.5) с использованием граничного условия  $\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – заданное значение, затем найти и другие диагональные компоненты напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_0 - \frac{a^2 C(r_0)}{2D\mu r^2} + \frac{a^2 t^2}{2\mu} C_1(r_0) + \frac{a^2}{2D^2\mu t^2 r^4} \left( e^{-D(r)t^2} - e^{-D(r_0)t^2} \right), \\ \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{rr} - 2\mu(e_{rr} - e_{\phi\phi}), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 2\mu e_{rr} - 3\mu e_{r\phi}^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Полученное решение (3.14), (3.17), (3.18) справедливо до момента времени  $t = t_1$ . Далее рассмотрим деформирование материала при постоянном напряжении сдвига. Для промежутка времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  аналогично соотношениям (3.14) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} &= \frac{at_1}{r^2}, \quad e_{r\phi} = \frac{at_1}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\phi}^c = \frac{Dat_1^2}{\mu r^2}, \quad p_{r\phi} = \frac{Daw}{\mu r^2}, \quad \omega = 2Bn(at_1)^2 C_1, \\ \theta &= \frac{at_1}{2\mu} C + 2Bna^2 w C_1, \quad w(t) = t_1^2 \left( t - \frac{2}{3} t_1 \right). \end{aligned}$$

Для диагональных компонент напряжений, обратимых и необратимых деформаций, так же как (3.17), (3.18), найдем:

$$\begin{aligned} p_{\phi\phi} &= \frac{-a^2}{4D\mu^2 r^4} \left( e^{Dw_1} - e^{2Dw_2} \right) - \frac{a^2 t_1^2}{4\mu^2 r^4} + \frac{Da^2 t_1 w}{\mu^2 r^4}, \quad p_{rr} = -p_{\phi\phi} - 2p_{r\phi}^2, \\ e_{\phi\phi} &= 2e_{r\phi} p_{r\phi} - p_{\phi\phi} + \frac{e_{r\phi}^2}{2}, \quad e_{rr} = -2e_{r\phi} p_{r\phi} + p_{\phi\phi} - \frac{3e_{r\phi}^2}{2}, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_0 + \frac{a^2 t_1^2}{2\mu^2} C_1(r_0) - \frac{a^2}{4D^2\mu r^4} \left( \frac{2 \left( e^{D(r)w_1} - e^{D(r_0)w_1} \right)}{w_1} + \frac{e^{2D(r)w_2} - e^{2D(r_0)w_2}}{w_2} \right), \\ \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{rr} - 2\mu(e_{rr} - e_{\phi\phi}), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 2\mu e_{rr} - 3\mu e_{r\phi}^2, \quad w_1(t) = t_1(t_1 - 2t), \quad w_2(t) = t_1(t_1 - t). \end{aligned}$$

При уменьшающемся напряжении сдвига ( $t_2 \leq t \leq t_3 = (at_1 + bt_2)/b$ ) решение задачи строится аналогично полученным ранее:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} &= \frac{w_3}{r^2}, \quad e_{r\phi} = \frac{w_3}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\phi}^c = \frac{4Bn(w_3)^2}{r^4}, \quad p_{r\phi} = \frac{Dw_4}{\mu r^2}, \\ \omega &= -\frac{b}{2\mu}C + 2Bnw_3^2 C_1, \quad \theta = \frac{w_3}{2\mu}C + 2Bnw_4 C_1, \quad p_{\phi\phi} = \frac{Dw_3 w_4}{a\mu^2 r^4} + \\ &+ \frac{a}{4D\mu^2 r^6} \left[ -\frac{Dr^2}{a} w_3^2 - br^2 + br^2 e^{\frac{D}{ab}\{w_3^2 - a^2 t_1^2\}} - ar^2 \left\{ e^{\frac{D}{a}\{b(t-t_2)^2 + aw_1\}} - e^{\frac{D}{a}\{b(t-t_2)^2 + 2aw_2\}} \right\} \right], \\ p_{rr} &= -p_{\phi\phi} - 2p_{r\phi}^2, \quad e_{\phi\phi} = 2e_{r\phi} p_{r\phi} - p_{\phi\phi} + \frac{e_{r\phi}^2}{2}, \quad e_{rr} = -2e_{r\phi} p_{r\phi} + p_{\phi\phi} - \frac{3e_{r\phi}^2}{2}, \\ w_3(t) &= -b(t-t_2) + at_1, \quad w_4(t) = \frac{b^2}{3}(t-t_2)^3 - ab(t-t_2)^2 t_1 + a^2(t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3). \end{aligned}$$

Диагональные компоненты напряжений находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_0 + \frac{abC(r_0)}{2D\mu r^2} + \frac{\omega_3^2}{2\mu^2} C_1(r_0) + \frac{a^2}{2D^2\mu r^4} \left( b^2 \frac{e^{\frac{D(r)\{w_3^2 - a^2 t_1^2\}}{ab}} - e^{\frac{D(r_0)\{w_3^2 - a^2 t_1^2\}}{ab}}}{w_3^2 - a^2 t_1^2} - \right. \\ &\left. - \frac{e^{\frac{D(r)\{b(t-t_2)^2 + aw_1\}}{a}} - e^{\frac{D(r_0)\{b(t-t_2)^2 + aw_1\}}{a}}}{\frac{b}{a}(t-t_2)^2 + w_1} + \frac{e^{\frac{D(r)\{b(t-t_2)^2 + 2aw_2\}}{a}} - e^{\frac{D(r_0)\{b(t-t_2)^2 + 2aw_2\}}{a}}}{\frac{b}{a}(t-t_2)^2 + 2w_2} \right), \\ \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{rr} - 2\mu(e_{rr} - e_{\phi\phi}), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 2\mu e_{rr} - 3\mu e_{r\phi}^2. \end{aligned}$$

В конечный момент времени  $t_3 = (at_1 + bt_2)/b$ , при  $c(t) = 0$  напряженно-деформированное состояние задается зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} &= 0, \quad e_{r\phi} = 0, \quad \varepsilon_{r\phi}^c = 0, \quad p_{r\phi} = \frac{4Bn}{r^4} \left[ a^2 \left( \frac{2}{3}t_1^3 + t_1^2 t_2 \right) \right], \\ \omega &= 0, \quad \theta = -2Bna^2 \left[ \frac{at_1 - 2bt_1}{3} + bt_2 \right] C_1, \\ p_{\phi\phi} &= \frac{a}{4D\mu^2 r^6} \left[ be^{\frac{aDr_1^2}{b}} - b + a \left( e^{-D(r)\left(\frac{a}{b}t_1 + 2(t_2 - t_1)\right)} - e^{-D(r_0)\left(\frac{a}{b}t_1 + 2(t_2 - t_1)\right)} \right) \right], \\ p_{rr} &= -p_{\phi\phi} - 2p_{r\phi}^2, \quad e_{\phi\phi} = 2e_{r\phi} p_{r\phi} - p_{\phi\phi} + \frac{e_{r\phi}^2}{2}, \quad e_{rr} = -2e_{r\phi} p_{r\phi} + p_{\phi\phi} + \frac{3e_{r\phi}^2}{2}. \end{aligned}$$

Если далее функция  $c(t)$  остается равной 0, то дальнейшего деформирования не происходит, справедливыми остаются предыдущие соотношения.

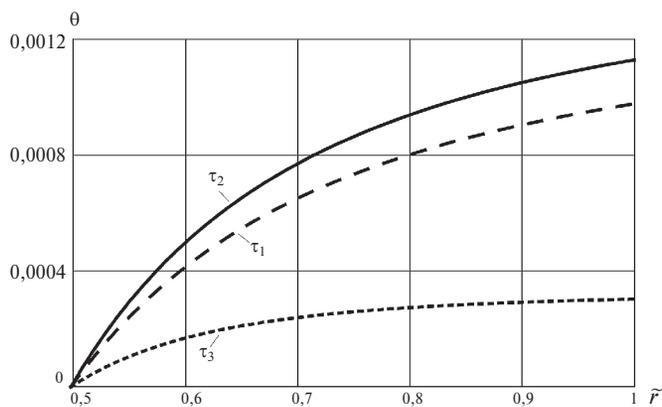


Рис. 1. Распределение угла закручивания.

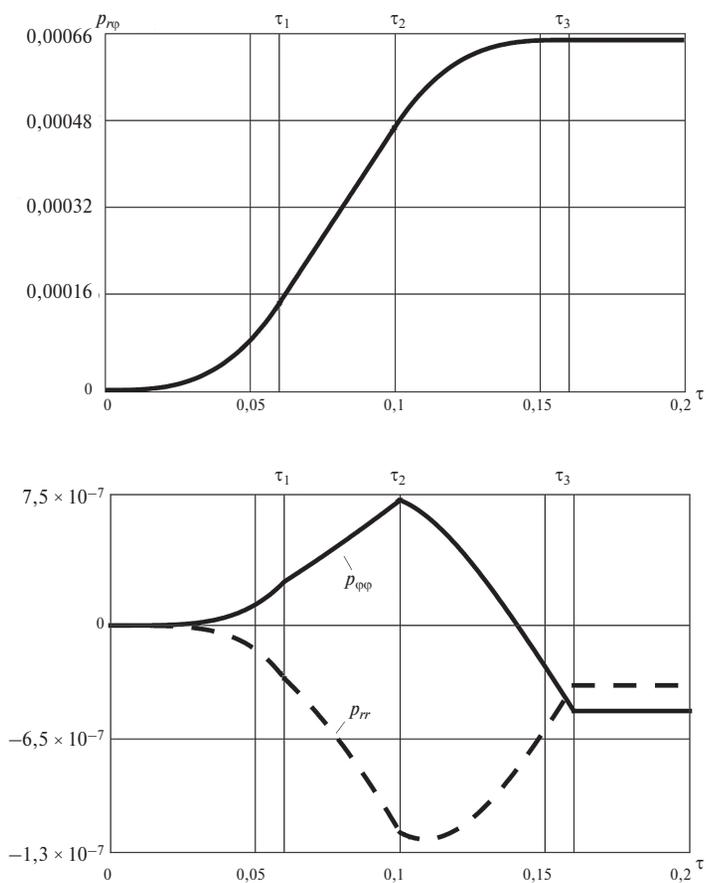


Рис. 2. Изменение необратимых деформаций.

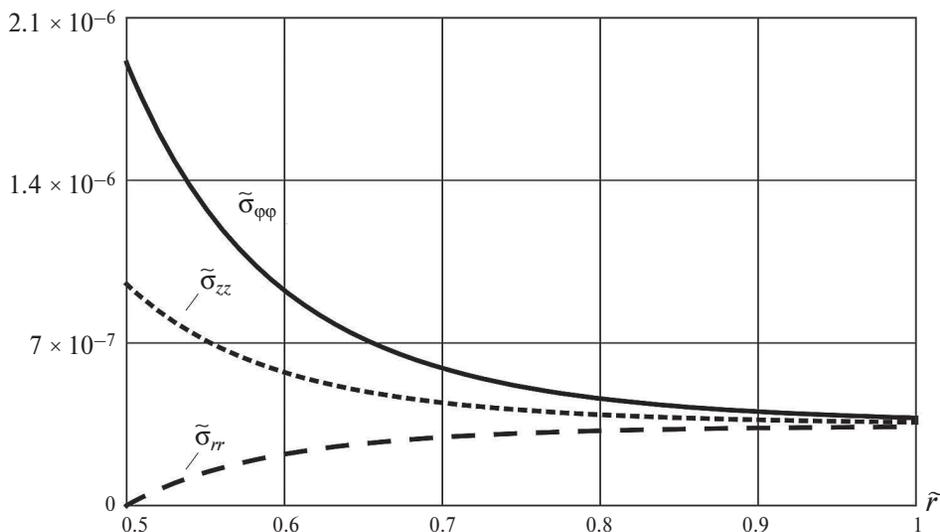


Рис. 3. Остаточные напряжения.

Расчеты проводились в безразмерных переменных  $\tilde{r} = r/R$ ,  $\tau = at/(R^2\mu)$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma/\mu$  при значении постоянных  $r_0/R = 0,5$ ,  $\sigma_0/\mu = 0.0009$ ,  $a/b = 1$ ,  $Vn\mu^3 R^2/a = 350$ .

На рис. 1 показано распределение угла закручивания в различные моменты времени. На рис. 2 показано изменение необратимых деформаций в течение времени в точках внутренней поверхности  $r = r_0$ . На рис. 3 приведены остаточные напряжения.

**4. Заключение.** Использование модели больших деформаций с дифференциальными уравнениями изменения составляющих полных деформаций позволило получить аналитическое решение задачи теории о деформировании в условиях неустановившейся ползучести вязкоупругого материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями с расчетом упругого отклика при его разгрузке. Постоянная  $n = 3$  в законе ползучести Нортона, принятая для получения аналитических выражений для диагональных компонент обратимых и необратимых деформаций и напряжений, делает пригодными полученные решения для ряда сталей и их сплавов [1].

Работа выполнена в рамках госзадания ИАПУ ДВО РАН (темы № FFW-2021-0005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Finnie I., Heller W.R.* Creep of engineering materials. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc., 1959. 341 p.
3. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

4. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
5. *Weir C.D.* The creep of thick tube under internal pressure // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. № 3. P. 464–466.  
<https://doi.org/10.1115/1.4011565>
6. *Bhatnagar N.S., Kulkarni P.S., Arya V.K.* Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // *Nucl. Eng. Des.* 1984. V. 83. № 3. P. 379–388.  
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90130-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90130-4)
7. *Sim R.G., Penny R.K.* Plane strain creep behaviour of thick-walled cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* 1971. V. 13. № 12. P. 987–1009.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(71\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90023-3)
8. *Bhatnagar N.S., Gupta S.K.* Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // *J. Phys. Soc. Japan.* 1969. V. 27. № 6. P. 1655–1662.  
<https://doi.org/10.1143/JPSJ.27.1655>
9. *Bhatnagar N.S., Kulkarni P.S., Arya V.K.* Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 1986. V. 21. № 1. P. 61–71.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90013-2)
10. *Liu S.A., Chen W.-P.*, On the creep rupture of a pressurized sphere // *J. Chin. Soc. Mech. Eng.* 1997. V. 18. № 5. P. 467–475.
11. *Liu S.A.* Creep-fatigue rupture of a thick sphere subjected to pulsating internal pressure // *J. Chin. Soc. Mech. Eng.* 2004. V. 25. № 4. P. 363–372.
12. *Miller G.K.* Stresses in a spherical pressure vessel undergoing creep and dimensional changes // *Int. J. Solids Struct.* 1995. V. 32. № 14. P. 2077–2093.
13. *Rimrott F.P.J., Luke J.R.* Large strain creep of rotating cylinders // *ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1961. V. 41. № 12. P. 485–500.  
<https://doi.org/10.1002/ZAMM.19610411203>
14. *Bhatnagar N.S., Arya V.K.* Creep of thick-walled spherical vessels under internal pressure considering large strains // *Indian J. Pure Appl. Math.* 1975. V. 6. P. 1080.
15. *Sakaki T., Kuroki T., Sugimoto K.* Creep of a hollow sphere // *Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME.* 1990. V. 57. № 2. P. 276–281.  
<https://doi.org/10.1115/1.2891985>
16. *Baniasadi M., Fareghi P., Darijani F., Baghani M.* Finite strain relaxation and creep in coupled axial and torsional deformation // *Mech. Based Des. Struc. Mach.* 2020. V. 50. № 8. P. 2795–2811.  
<https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1785311>
17. *Hoseini Z., Nejad M., Niknejad A., Ghannad M.* New exact solution for creep behavior of rotating thick-walled cylinders // *J. Basic App. Sci. Res.* 2011. V. 1. № 10. P. 1704–1708.
18. *Nejad M., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M.* A new analytical solution for creep stresses in thick-walled spherical pressure vessels // *J. Basic Appl. Sci. Res.* 2011. V. 1. № 11. P. 2162–2166.
19. *Hoseini Z., Nejad M., Niknejad A., Ghannad M.* New exact solution for creep behavior of rotating thick-walled cylinders // *J. Basic Appl. Sci. Res.* 2011. V. 1. № 10. P. 1704–1708.
20. *Kobelev V.* Some basic solutions for nonlinear creep // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. № 19–20. P. 3372–3381.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.029>
21. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Об аналитическом решении одной задачи ползучести // *Журнал СВМО.* 2018. Т. 20. № 3. С. 282–294.  
<https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.282-294>

22. *Shutov A., Altenbach H., Naumenko K.* Steady-state creep analysis of pressurized pipe weldments by perturbation method // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. № 22–23. P. 6908–6920.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.013>
23. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
24. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанык Л.В.* Об одной простой модели для упруго-пластической среды при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
25. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
26. *Ковтанык Л.В.* Аналитическое решение задачи о ползучести вязкоупругого материала в круглой трубе // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2023. Т. 513. № 1. С. 70–74.  
<https://doi.org/10.31857/S2686740023060111>
27. *Norton F.H.* The Creep of steel at high temperatures. New York: McGraw Hill Book Company, 1929. 90 p.

## ON AN ANALYTICAL SOLUTION TO THE CREEP PROBLEM OF A VISCOELASTIC CYLINDRICAL LAYER UNDER TORSIONAL LOADING

A. S. Begun<sup>a, b, \*</sup>, L. V. Kovtanyuk<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok, Russia*

<sup>b</sup>*Vladivostok State University, Vladivostok, Russia*

<sup>\*</sup>*E-mail: asustinova@mail.ru, \*\*e-mail: lk@iacp.dvo.ru*

**Abstract** – Using a mathematical model of large deformations of materials with elastic, plastic and viscous properties, an analytical solution is obtained for the problem of deformation under creep conditions of a viscoelastic material placed in a gap between two rigid cylindrical surfaces, when the outer rigid cylinder rotates due to a twisting moment applied to it, while the inner cylinder is stationary. The displacements, reversible and irreversible deformations, stresses at all stages of deformation, including residual deformations and stresses under full unloading, are calculated.

*Keywords:* large deformations, creep, elasticity, residual stresses

## REFERENCES

1. *Rabotnov Y.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka 1966. 752 с.
2. *Finnie I., Heller W.R.* Creep of engineering materials, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959. 341 p.

3. *Malinin N.N.* Applied Theory of Plasticity and Creep. Moscow: Mashinostroenie. 1975. 400 p.
4. *Lokoshchenko A.M.* Creep and long-term strength of metals. Moscow: Fizmatlit. 2016. 504 p.
5. *Weir C.D.* The creep of thick tube under internal pressure // Journal of Applied Mechanics. 1957. V. 24. № 3. P. 464–466.  
<https://doi.org/10.1115/1.4011565>
6. *Bhatnagar N.S., Kulkarni P.S., Arya V.K.* Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // Nuclear Engineering and Design. 1984. V. 83. № 3. P. 379–388.
7. *Sim R.G., Penny R.K.* Plane strain creep behaviour of thick-walled cylinders // International Journal of Mechanical Sciences. 1971. V. 13. № 12. P. 987–1009.
8. *Bhatnagar N.S., Gupta S.K.* Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // Journal of the Physical Society of Japan. 1969. V. 27. № 6. P. 1655–1662.  
<https://doi.org/10.1143/JPSJ.27.1655>
9. *Bhatnagar N.S., Kulkarni P.S., Arya V.K.* Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1986. V. 21. № 1. P. 61–71.
10. *Liu S.-A., Chen W.-P.* On the creep rupture of a pressurized sphere // Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers. 1997. V. 18. № 5. P. 467–475.
11. *Liu S.-A.* Creep-fatigue rupture of a thick sphere subjected to pulsating internal pressure // Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers. 2004. V. 25. № 4. P. 363–372.
12. *Miller G.K.* Stresses in a spherical pressure vessel undergoing creep and dimensional changes // International Journal of Solids and Structures. 1995. V. 32. № 14. P. 2077–2093.
13. *Rimrott F.P.J., Luke J.R.* Large strain creep of rotating cylinders // ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1961. V. 41. № 12. P. 485–500.
14. *Bhatnagar N.S., Arya V.K.* Creep of thick-walled spherical vessels under internal pressure considering large strains // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. 1975. № 6. P. 1080.
15. *Sakaki T., Kuroki T., Sugimoto K.* Creep of a hollow sphere // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 1990. V. 57. № 2. P. 276–281.  
<https://doi.org/10.1115/1.2891985>
16. *Baniasadi M., Fareghi P., Darijani F., Baghani M.* Finite strain relaxation and creep in coupled axial and torsional deformation // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. P. 2795–2811.  
<https://doi.org/10.1080/15397734>
17. *Hoseini Z., Nejad M., Niknejad A., Ghannad M.* New exact solution for creep behavior of rotating thick-walled cylinders // Journal of Basic and Applied Scientific Research. 2011. V. 1. № 10. P. 1704–1708.
18. *Nejad M., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M.* A new analytical solution for creep stresses in thick-walled spherical pressure vessels // Journal of Basic and Applied Scientific Research. 2011. V. 1. № 11. P. 2162–2166.
19. *Hoseini Z., Nejad M., Niknejad A., Ghannad M.* New exact solution for creep behavior of rotating thick-walled cylinders // Journal of Basic and Applied Scientific Research. 2011. V. 1. № 10. P. 1704–1708.
20. *Kobelev V.* Some Basic Solutions for Nonlinear Creep // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51. № 4. P. 3372–3381.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.029>

21. *Kuznetsov E.B., Leonov S.S.* On the analytical solution of one creep problem // Journal of SVMO. 2018. V. 20. № 3. P. 282–294.  
<https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.282-294>
22. *Shutov A., Altenbach H., Naumenko K.* Steady-State Creep Analysis of Pressurized Pipe Weldments by Perturbation Method // International Journal of Solids and Structures. 2006. V. 43. № 22–23. P. 6908–6920.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.013>
23. *Bykovtsev G.I., Shitikov A.V.* Finite deformations of elastoplastic media // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1990. V. 311. № 1. P. 59–62.
24. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* On one simple model for an elastoplastic medium under finite deformations // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1996. V. 347. № 2. P. 199–201.
25. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
26. *Kovtanyuk L.V.* Analytical solution of the problem of creep of a viscoelastic material in a round pipe // Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, Technical Sciences. 2023. V. 514. P. 70–74.  
<https://doi.org/10.31857/S2686740023060111>
27. *Norton F.H.* The Creep of Steel at High Temperatures // McGraw Hill Book Company. New York, 1929. 90 p.