

УДК 629.7

**ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
(КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С ОГРАНИЧЕННЫМ
УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАННОГО
ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА**

© 2025 г. М. В. Левский^а, *

^а Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –
филиал Государственного космического научно-производственного центра
им. М.В. Хруничева, Королев, Россия

*E-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 02.07.2024 г.

После доработки 25.01.2025 г.

Принята к публикации 31.01.2025 г.

Представлено кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела (космического аппарата) из произвольного начального в назначенное угловое положение при наличии ограничений на управляющие переменные. Для оптимизации процесса управления использовался комбинированный функционал качества, который объединяет в заданной пропорции сумму времени и управляющих усилий, затраченных на разворот, и интеграл кинетической энергии вращения за время разворота. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина и кватернионных моделей управляемого движения твердого тела получено решение поставленной задачи. В аналитическом виде раскрыты свойства оптимального движения. Для построения оптимальной программы вращения записаны формализованные уравнения и расчетные формулы. Приведены аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального управления. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления вращением. Также приводится конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). В случае динамически симметричного твердого тела получено решение задачи переориентации в замкнутой форме. Представлены численный пример и результаты математического моделирования, подтверждающие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

Ключевые слова: кватернионы, управление ориентацией, принцип максимума, комбинированный критерий качества, управляющие функции, алгоритм управления, краевая задача

DOI: 10.31857/S1026351925040074, **EDN:** BNOGFN

Введение. Подробно изучена задача переориентации твердого тела, в частности космического аппарата (КА), из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главное отличие предложенного решения – применение нового функционала качества процесса управления при ограниченных управляющих переменных.

Огромное количество работ изучают проблемы управления угловым положением твердого тела в различных формулировках и использующих широкий диапазон методов решения [1–29]. Например, одни авторы предлагают синтез оптимального управления, основанный на методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов [1], другие используют концепцию обратных задач динамики для получения гладких управлений для реализации пространственного вращения КА, когда программная траектория разыскивается в классе полиномов заданной степени, коэффициенты которых определяются известными значениями фазовых переменных в граничных точках траектории [2]. Особое внимание уделяется проблемам оптимального управления [1, 3–27]. Методы оптимизации различны. В частности, решения задачи переориентации твердых тел различной конфигурации, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина, рассматриваются в работах [8–27]. Ранее использовались классические критерии качества процесса управления (быстродействие [4–12], минимум расхода топлива [13], минимум энергозатрат [11, 13, 14] и др.); более подробно рассмотрены кинематические задачи разворота [15–18]. Задачи оптимального управления в динамической постановке представляют особый интерес, однако они встречают определенные сложности при решении краевой задачи разворота; в отдельных частных случаях управления за фиксированное время краевая двухточечная задача разворота может быть решена методом разделения переменных [13]. Практически важными остаются аналитические решения задачи оптимального управления разворотом. Однако получить их для тел с произвольным сочетанием моментов инерции крайне затруднительно, известны лишь некоторые решения (в том числе аналитические) для сферически-симметричных [12, 19] и динамически симметричных тел [9–11, 16, 20–22].

Ниже решается задача оптимальной переориентации твердого тела (КА) на основе функционала качества, объединяющего в заданной пропорции интеграл энергии вращения, вклад управляющих сил на совершение маневра (по энергозатратам) и время, затраченные на разворот КА. Наличие интеграла энергии вращения в минимизируемом функционале приводит к ограничению кинетической энергии во время разворота, а присутствие времени ограничивает продолжительность маневра. Фазовыми переменными являются кватернион ориентации и вектор абсолютной угловой скорости твердого тела (КА). Решаемая задача отличается от других задач с комбинированным критерием оптимальности видом функционала качества, который включает не только фазовые и управляющие переменные, но и длительность маневра [21–23]. Кроме того, в рассмотренной нами задаче управление ограничено.

1. Постановка оптимизационной задачи управления. Вращательное движение твердого тела (КА) описывают следующие уравнения [12]:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = M, \quad (1.1)$$

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (1.2)$$

где ω – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела (КА); \mathbf{M} – управляющий момент; I – тензор инерции КА; Λ – нормированный кватернион [12], задающий движение связанной с КА системы координат относительно инерциальной системы координат ($\|\Lambda\| = 1$), “ \circ ” – знак умножения кватернионов [12, с. 11–20] (символ \times означает векторное произведение векторов).

Управление КА вокруг центра масс производится за счет изменения момента \mathbf{M} . На практике интересные задачи, когда в начальный и конечный моменты времени угловая скорость ω равна нулю. Выпишем граничные условия для управляемой системы (1.1)–(1.2):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \quad \omega(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \omega(T) = 0, \quad (1.4)$$

где T – время завершения маневра. Кватернионы Λ_{in} и Λ_f удовлетворяют условию $\|\Lambda_{in}\| = \|\Lambda_f\| = 1$. Учитывая, что кватернионы Λ и $-\Lambda$ соответствуют одному и тому же угловому положению твердого тела (КА), мы рассматриваем только те задачи, в которых $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{in}$.

Предполагается, что вращательное движение КА регулируется с помощью системы ориентации, создающей вращающие моменты относительно трех главных центральных осей инерции. Оптимальным считается управление, при котором минимальной является величина

$$G = T + k_1 \int_0^T \left(M_1^2 / J_1 + M_2^2 / J_2 + M_3^2 / J_3 \right) dt + k_2 \int_0^T \left(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \right) dt, \quad (1.5)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – постоянные положительные коэффициенты; M_i – проекции управляющего момента \mathbf{M} на главные центральные оси эллипсоида инерции КА (эти оси образуют связанный базис); w_i – проекции вектора ω абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса; J_i – главные центральные моменты инерции КА ($i = \overline{1, 3}$).

Как правило, мощность исполнительных органов системы ориентации КА ограничена. Поэтому приходится ограничивать управляющий момент во время разворота. Будем полагать, что область допустимых управлений \mathbf{M} подобна эллипсоиду инерции КА [11]:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2, \quad (1.6)$$

где $u_0 > 0$ определяет управляющие возможности системы ориентации КА. Задачу оптимального управления сформулируем в следующей постановке: КА требуется перевести из состояния (1.3) в состояние (1.4) согласно уравнениям (1.1), (1.2) с ограничением (1.6) так, чтобы сумма (1.5) была минимальной (время T не фиксировано). Решение $\mathbf{M}(t)$ находится в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества (1.5) отличает предлагаемую оптимизационную задачу от рассмотренных ранее задач видом минимизируемого функционала и наличием ограничения (1.6). Присутствие в показателе (1.5) интеграла энергии ограничивает кинетическую энергию вращения E_k во время разворота настолько это возможно (коэффициент $k_2 \neq 0$). То, насколько крутым (или пологим) будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота, зависит от коэффициента k_1 . Значение коэффициента k_2 определяет максимальную кинетическую энергию вращения КА в течение поворотного маневра. Поскольку длительность маневра T не фиксирована, заданный маневр переориентации может быть исполнен при любых условиях разворота L_{in} и L_f и любых значениях J_1, J_2, J_3, k_1, k_2 и u_0 . Так как оптимизация основана на комбинации квадратичного критерия качества и времени маневра T (в заданной пропорции, со своими коэффициентами пропорциональности), то существует оптимальное значение T_{opt} , относительно которого сумма (1.5) возрастает как с увеличением, так и с уменьшением времени T . Задача оптимального разворота КА с ограниченным управлением, в которой качество процесса управления определяется показателем (1.5), остается актуальной.

Необходимо отметить, что оптимизация вращений с минимальными затратами (1.5) может оказаться полезной для КА с системой управления ориентацией, основанной на электрореактивных двигателях (ЭРД), потому что, когда управляют ЭРД (в частности, ионные двигатели), первый интеграл в показателе (1.5) пропорционален потребляемой электроэнергии (тяга ЭРД прямо пропорциональна потребляемому электрическому току [30], и вращающий момент пропорционален плечу установки ЭРД). В случае использования ЭРД для пространственных разворотов КА ограничение (1.6) достаточно актуально (левая часть неравенства (1.6) пропорциональна электрической мощности ЭРД, необходимой для создания управляющего момента).

2. Применение принципа максимума. Найдем решение поставленной задачи (1.1)–(1.6) на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [31]. Управляющими функциями являются моменты M_i ($i = \overline{1, 3}$). Прежде всего, введем сопряженные переменные j_i , соответствующие проекциям угловой скорости КА w_i ($i = \overline{1, 3}$). В критерий качества (1.5) не входят элементы кватерниона ориентации L , поэтому вместо сопряженных функций u_j , которые соответствуют компонентам l_j кватерниона L , используем следующие переменные r_i ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, 3}$):

$$r_1 = (\lambda_0 \psi_1 + \lambda_3 \psi_2 - \lambda_1 \psi_0 - \lambda_2 \psi_3)/2, \quad r_2 = (\lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_0 - \lambda_3 \psi_1)/2, \\ r_3 = (\lambda_0 \psi_3 + \lambda_2 \psi_1 - \lambda_3 \psi_0 - \lambda_1 \psi_2)/2.$$

Аналогичный прием применяли многие исследователи [10–24], но с другими функционалами качества (чистые быстродействие, минимум энергозатрат и пр.); впервые указанную замену переменных сделали В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [11, 12]. Оптимальные функции r_i и вектор \mathbf{r} , образованный из r_i , удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2. \quad (2.1)$$

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина для оптимизационной задачи (1.1)–(1.6):

$$H = -1 - k_1 \left(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3 \right) - k_2 \left(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \right) + \\ + \varphi_1 \left(M_1 + (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \right) / J_1 + \varphi_2 \left(M_2 + (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \right) / J_2 + \\ + \varphi_3 \left(M_3 + (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \right) / J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3.$$

Уравнения для φ_i получаются из формул [31]:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Сопряженная система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= 2k_2 J_1 \omega_1 + \omega_3 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= 2k_2 J_2 \omega_2 + \omega_3 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= 2k_2 J_3 \omega_3 + \omega_2 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор \mathbf{r} неподвижен относительно инерциального базиса, и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (как следует из (2.1)). Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется с использованием кватерниона $\Lambda(t)$ [12]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где } \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{in} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in},$$

причем $\mathbf{r}(0) > 0$ (в противном случае $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, и дальше решать задачу не имеет смысла). Здесь $\tilde{\Lambda}$ – кватернион, сопряженный кватерниону Λ [12, с. 10–22].

Задача поиска оптимального управления состоит в решении системы уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с ограничением (1.6) с одновременной максимизацией функции H в каждый текущий момент времени t и выполнением краевых условий (1.3), (1.4).

2.1. *Структура оптимального управления.* Гамильтониан H – квадратичная функция моментов M_i , и ее максимум определяют необходимые условия экстремума $\partial H / \partial M_i = 0$, из которых находим:

$$M_i = \varphi_i / (2k_1). \quad (2.3)$$

Перейдя к новым переменным $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$ и $n_i = \varphi_i / \sqrt{J_i}$ ($i = \overline{1, 3}$), запишем:

$$H = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - k_1 |\mathbf{u}|^2 + H_{inv},$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$, \mathbf{u} и \mathbf{n} – векторы, образованные u_i и n_i соответственно, а H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i (центральная точка “ \times ” означает скалярное произведение векторов). Если $\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 \leq 4k_1^2 u_0^2$, то решение (2.3) справедливо (условие (1.6) вы-

полняется), в этом случае максимум функции H по аргументу $|\mathbf{u}|$ находится внутри отрезка $[0, u_0]$ и совпадает с локальным максимумом (так как для (2.3) $|\mathbf{u}| \leq u_0$).

Если $\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 > 4k_1^2 u_0^2$, то точка экстремума функции H находится за пределами отрезка $0 \leq |\mathbf{u}| \leq u_0$, и H достигает максимума на границе указанного отрезка и когда векторы \mathbf{u} и \mathbf{n} одинаково направлены, т.е. в оптимальном решении $|\mathbf{u}| = u_0$ и следовательно

$$M_i = \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Объединяя оба случая, получим структуру оптимального управления для M_i :

$$M_i = \begin{cases} \varphi_i / (2k_1), & \varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 \leq 4k_1^2 u_0^2, \\ \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, & \varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3 > 4k_1^2 u_0^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1), (2.2), (2.4) – необходимые условия оптимальности для задачи (1.1)–(1.6). Решение системы уравнений (1.1), (2.1), (2.2), (2.4) существует и оно единственное (при условии $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$). Обозначим $r_0 = |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \neq 0$ и $\mathbf{p} = \mathbf{r}/r$, $p_i = r_i/r_0$. Для \mathbf{p} и p_i запишем [8, 24–27]:

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (2.5)$$

Задача поиска оптимальной программы разворота КА свелась к решению системы уравнений движения (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.5) вместе с равенствами $r_i = r_0 p_i$ при наличии закона (2.4) для управляющих моментов M_i . Искомое оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi_i = a(t) p_i, \quad (2.6)$$

$$\omega_i = b(t) p_i / J_i, \quad (2.7)$$

где $a(t)$, $b(t)$ – скалярные функции времени ($b(t) \geq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$).

Управляющие функции M_i пропорциональны компонентам p_i вектора \mathbf{p} :

$$M_i = m(t) p_i, \quad (2.8)$$

где $m(t)$ – скалярная функция, равная $m(t) = \mathbf{M} \times \mathbf{p}$ ($m(t)$ определяется $a(t)$ и константой $k_1 u_0$).

Из (2.1), (2.2), (2.4) видим, что искомые функции $a(t)$, $b(t)$ связаны соотношением

$$\dot{a}(t) = 2k_2 b(t) - r_0. \quad (2.9)$$

Подставив последовательно (2.6) в (2.2) при наличии (2.7) и $r_i = r_0 p_i$, убеждаемся в том, что (2.6), (2.7) действительно справедливы для системы

дифференциальных уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5) (соотношения (2.7) следуют непосредственно из системы (1.1), (2.4), (2.5) при связях (2.6)). После обозначения $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор, элементами которого являются переменные φ_i , $I = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции твердого тела, перепишем систему (2.2) в векторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 2k_2 I \boldsymbol{\omega} + (I \boldsymbol{\omega}) \times (I^{-1} \boldsymbol{\varphi}) - I (\boldsymbol{\omega} \times (I^{-1} \boldsymbol{\varphi})) - \mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Производная $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ в левой части (2.10) будет следующей: $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} + a(t) \dot{\mathbf{p}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$.

Теперь найдем правую часть уравнения (2.10) с учетом (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} & 2k_2 b \mathbf{p} + b \mathbf{p} \times (I^{-1} a \mathbf{p}) - I \left((I^{-1} b \mathbf{p}) \times (I^{-1} a \mathbf{p}) \right) - \mathbf{r} = \\ & = 2k_2 b \mathbf{p} + a \mathbf{p} \times (I^{-1} b \mathbf{p}) - \mathbf{r} = 2k_2 b \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} - r_0 \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Правая и левая части (2.10) тождественно равны, если $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют (2.9).

Из уравнений (2.4)–(2.6) ясно видно, что при оптимальном вращении управляющий момент \mathbf{M} действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевых граничных условиях $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ решение системы (1.1), (2.1)–(2.4) описывает движение, при котором кинетический момент КА \mathbf{L} имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное. Подстановка (2.7) в уравнение движения (1.1) подтверждает, что необходимое условие оптимальности (2.5) выполняется при наличии (2.4), (2.6). Уточним оптимальную функцию $m(t)$:

$$m(t) = \begin{cases} a(t)/(2k_1), a^2(t) \left(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 \right) \leq 4k_1^2 u_0^2, \\ \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}}, a^2(t) \left(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 \right) > 4k_1^2 u_0^2. \end{cases}$$

Для движений, соответствующих уравнениям (2.5), (2.7), выполняется условие $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$. Продифференцировав по времени левую часть приведенного равенства, убеждаемся, что полученная производная равна нулю после подстановки \dot{p}_i в соотношения (2.5), а затем рассчитав ω_i по выражениям (2.7). Отсюда следует одно из ключевых свойств оптимального движения КА: соотношение между квадратом модуля кинетического момента КА и кинетической энергией вращения E остается постоянным на протяжении всего разворота (внутри всего отрезка времени $[0, T]$). Действительно

$$E = b^2 \left(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 \right) / 2, \text{ и } E/|\mathbf{L}|^2 = \left(p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3 \right) / 2 = \text{const}$$

(зависимость $b^2 = |\mathbf{L}|^2$ следует непосредственно из формул (2.7)); $p_{i0} = p_i(0)$.

Принимая во внимание (2.4), (2.6) и свойства зависимости $a(t)$ имеем:

$$m(t) = \begin{cases} a(t)/(2k_1), & |a(t)| \leq 2k_1m_0, \\ m_0 \text{sign}a(t), & |a(t)| > 2k_1m_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $m_0 = u_0/C$; $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$, p_{10}, p_{20}, p_{30} – составляющие вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Время завершения маневра переориентации T не фиксировано, и гамильтониан H в явном виде не зависит от времени. Поэтому в каждый момент времени $t \in [0, T]$ оптимальное управление должно удовлетворять равенству $H = \text{const} = 0$ [32]. На концах оптимальной траектории (в начальный и конечный моменты времени) $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$, и функция H такова:

$$H(0) = H(T) = a(0)|\mathbf{M}(0)|C^2 - k_1|M(0)|^2 - 1 = -a(T)|\mathbf{M}(T)|C^2 - k_1|\mathbf{M}(T)|^2 - 1 = 0$$

Поэтому всегда $a(T) = -a(0)$ и $|\mathbf{M}(0)| = |\mathbf{M}(T)|$.

Если участки, на которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$, отсутствуют, то $|\mathbf{M}(0)| = a(0)/(2k_1) \leq m_0$ и должно быть $a^2(0)C^2/(4k_1) - 1 = 0$, откуда $a(0) = 2\sqrt{k_1}/C$ при условии $k_1u_0^2 \geq 1$.

Если $u_0^2k_1 < 1$, то в оптимальном управлении неизбежно наличие участков, на которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$, в начале и в конце разворота. В этом случае $H(0) = H(T) = a(0)u_0C - k_1u_0^2 - 1 = 0$, откуда $a(0) = (1 + k_1u_0^2)/(u_0C) > 2k_1m_0$ и $a(T) < -2k_1m_0$.

2.2. *Свойства оптимального вращения.* При любом варианте оптимального управления $a(0) > 0$, $a(T) < 0$, $\dot{a}(0) = \dot{a}(T) = -r_0$, а функции $b(t)$ и $m(t)$ связаны по выражениям

$$b(t) \int_0^t m(t)dt, \quad b(0) = 0, \quad \dot{b}(t) = 0, \quad \dot{b} = m(t),$$

(связь $\dot{b} = m(t)$ получается из динамических уравнений (1.1) и (2.4), (2.7)). Скалярная функция времени $m(t)$ не выходит за пределы диапазона от $-m_0$ до m_0 , поэтому $|\mathbf{M}| \leq m_0$. Для оптимальной функции $a(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение: $\ddot{a} = 2k_2\dot{b} = 2k_2m(t)$.

Если $|a(t)| \leq 2k_1m_0$, то $\ddot{a} = k_2a(t)/k_1$; если $|a(t)| > 2k_1m_0$, то $\ddot{a} = 2k_2m_0 \text{sign}a(t)$. На всем интервале времени $t \in [0, T]$ $a(t)$ – гладкая функция времени. Замкнутая система (2.9), (2.11) для функций $a(t)$, $m(t)$ вместе с уравнением $\dot{b} = m(t)$ описывает динамическую систему с обратной связью второго порядка (с начальными условиями $a(0) = 1/(u_0C) + k_1m_0$, $\dot{a}(0) = -r_0$), структурная схема которой приведена на рис. 1.

Если $k_1u_0^2 \geq 1$, то в любой момент времени $|\mathbf{M}| \neq \text{const}$, поскольку в этом случае $a(0) \leq 2k_1m_0$, и $|a(t)| \leq 2k_1m_0$ при любом $t \in [0, T]$. Ограничение (1.6) не существенно при таком сочетании величин k_1 и u_0 . В этом случае $a(0) = 2\sqrt{k_1}/C$ и

$$a(t) = C_1 \exp(-t\sqrt{k_2/k_1}) + C_2 \exp(t\sqrt{k_2/k_1}),$$

где C_1 и C_2 – постоянные параметры закона управления, причем $C_1 + C_2 = 2\sqrt{k_1}/C$.

Наглядную демонстрацию поведения функции $a(t)$ при оптимальном управлении для случая, когда $k_1u_0^2 < 1$, дает рис. 2, где t_1 и t_2 – времена наступления

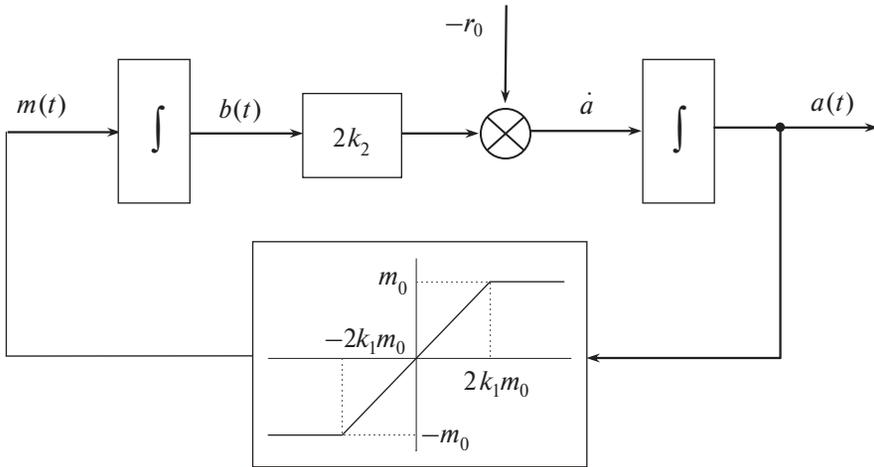


Рис. 1. Динамическая система для функций $a(t)$, $m(t)$.

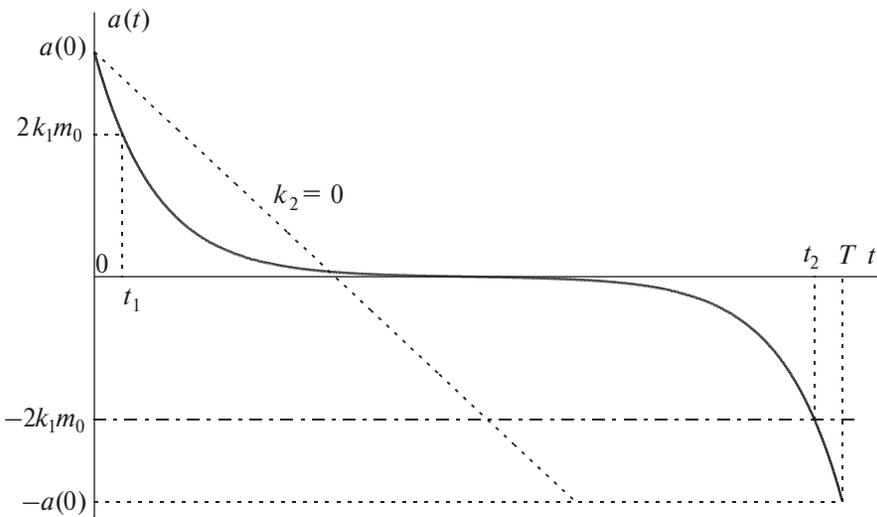


Рис. 2. Вид оптимальной функции $a(t)$ во время разворота.

равенств $a(t) = 2k_1m_0$ и $a(t) = -2k_1m_0$. На интервале, когда $|a(t)| \leq 2k_1m_0$, для функции $a(t)$ имеем:

$$a(t) = C_1 \exp((t_1 - t)\sqrt{k_2/k_1}) + C_2 \exp((t - t_1)\sqrt{k_2/k_1}), \quad (2.12)$$

где C_1 и C_2 – некоторые константы. Оптимальная функция $b(t)$ описывается выражением:

$$b(t) = \begin{cases} m_0 t, & t \leq t_1, \\ \left(C_2 \exp\left((t-t_1)\sqrt{k_2/k_1}\right) - C_1 \exp\left((t_1-t)\sqrt{k_2/k_1}\right) \sqrt{k_2/k_1} + r_0 \right) / (2k_2), & t_1 < t < t_2; \\ m_0 (T-t), & t \geq t_2, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $r_0 = (k_2 u_0^2 t_1^2 + 1 - k_1 u_0^2) / (u_0 t_1 C)$. Соответственно, функция $m(t)$ выглядит таким образом:

$$m(t) = \begin{cases} m_0, & t \leq t_1, \\ \left[C_1 \exp\left((t_1-t)\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_2 \exp\left((t-t_1)\sqrt{k_2/k_1}\right) \right] / (2k_1), & t_1 < t < t_2; \\ -m_0, & t \geq t_2, \end{cases} \quad (2.14)$$

так как в интервале времени, когда $|a(t)| \leq 2k_1 m_0$, функция $a(t)$ описывается формулой (2.12).

В силу непрерывности функций $a(t)$, $b(t)$, $m(t)$ можем записать:

$$\begin{aligned} m(t_{1-}) &= m(t_{1+}); & m(t_{2-}) &= m(t_{2+}); & a(t_{1-}) &= a(t_{1+}); & a(t_{2-}) &= a(t_{2+}); \\ b(t_{1-}) &= b(t_{1+}); & b(t_{2-}) &= b(t_{2+}); \\ \dot{b}(t_{1-}) &= \dot{b}(t_{1+}); & \dot{b}(t_{2-}) &= \dot{b}(t_{2+}); & \dot{a}(t_{1-}) &= \dot{a}(t_{1+}); & \dot{a}(t_{2-}) &= \dot{a}(t_{2+}); \\ \ddot{a}(t_{1-}) &= \ddot{a}(t_{1+}); & \ddot{a}(t_{2-}) &= \ddot{a}(t_{2+}), \end{aligned}$$

где $a(t_{1-})$ – значение функции $a(t)$ при бесконечно близком приближении к точке t_1 слева; $a(t_{1+})$ – значение функции $a(t)$ при бесконечно близком приближении к точке t_1 справа; $a(t_{2-})$ – значение функции $a(t)$ при бесконечно близком приближении к точке t_2 слева; $a(t_{2+})$ – значение функции $a(t)$ при бесконечно близком приближении к точке t_2 справа. Подобные обозначения по отношению к $b(t)$, $m(t)$ и \dot{a} , \ddot{a} имеют аналогичный смысл. В законе (2.13) использовали формулу $b = (r_0 + \dot{a}) / (2k_2)$, вытекающую непосредственно из (2.9).

Если $k_1 u_0^2 < 1$, то $a(0) > 2k_1 m_0$ и в оптимальном управлении неизбежны отрезки времени, внутри которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$. Поэтому $m(0) = m_0$. На участке, когда $|\mathbf{M}| \neq \text{const}$, справедливо уравнение $\ddot{a} = k_2 a(t) / k_1$, и функции $a(t)$, $b(t)$ таковы:

$$\begin{aligned} a(t) &= C_1 \exp\left((t_1 - t)\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_2 \exp\left((t - t_1)\sqrt{k_2/k_1}\right), \\ b(t) &= m_0 t_1 + \left(C_2 \exp\left((t - t_1)\sqrt{k_2/k_1}\right) - C_1 \exp\left((t_1 - t)\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_1 - C_2 \right) / \left(2\sqrt{k_1 k_2} \right). \end{aligned}$$

В начале разворота ($t < t_1$): $m(t) = m_0$, $b(t) = m_0 t$ и $a(t) = a(0) + k_2 m_0 t^2 - r_0 t$, $a(t_1) = 2k_1 m_0$. В момент $t = t_1$ функция a равна $a(t_1) = a(0) + k_2 m_0 t_1^2 - r_0 t_1 = 2k_1 m_0$. Следовательно,

$$r_0 = k_2 m_0 t_1 + (1 / (u_0 C) - k_1 m_0) / t_1. \quad (2.15)$$

Из условия $H(t_1) = H(t_2) = 0$ получаем уравнения $k_1 u_0^2 + r_0 C^2 b(t_1) - k_2 C^2 b^2(t_1) - 1 = 0$ и $k_1 u_0^2 + r_0 C^2 b(t_2) - k_2 C^2 b^2(t_2) - 1 = 0$, так как $a(t_1) = 2k_1 m_0$ и $m(t_1) = m_0$, а $a(t_2) = -2k_1 m_0$ и $m(t_2) = -m_0$. Из указанных уравнений следует, что $b(t_2) = b(t_1) = m_0 t_1$ и $T = t_2 + t_1$, а также (2.15).

В конце разворота ($t < t_2$): $m(t) = -m_0$ и $a(t) = (2k_2 m_0 t_1 - r_0)(t - t_2) - k_2 m_0 (t - t_2)^2 - 2k_1 m_0$, так как $b(t) = m_0 t_1 - m_0 (t - t_2) = m_0 (T - t)$ и $t_2 = T - t_1$.

Необходимо отметить, что значения t_1 , t_2 , C_1 и C_2 должны удовлетворять равенствам

$$C_1 + C_2 = 2k_1 m_0, \quad k_2 m_0 t_1 - (1/(u_0 C) - k_1 m_0)/t_1 = (C_2 - C_1) \sqrt{k_2/k_1},$$

$$C_1 - C_2 = C_1 \exp\left((t_1 - t_2) \sqrt{k_2 - k_1}\right) - C_2 \exp\left((t_2 - t_1) \sqrt{k_2/k_1}\right),$$

$$C_1 \exp\left((t_1 - t_2) \sqrt{k_2/k_1}\right) + C_2 \exp\left((t_2 - t_1) \sqrt{k_2/k_1}\right) = -2k_1 m_0,$$

так как в момент времени t_1 функция $a(t)$ равна $a(t_1) = 2k_1 m_0$, а в момент времени t_2 функция $a(t)$ будет $a(t_2) = -2k_1 m_0$. Кроме того, для $\dot{a}(t)$ запишем следующие уравнения:

$$\dot{a}(t_1) = k_2 m_0 t_1 + (k_1 m_0 t_1 - 1/(u_0 C)) / t_1 = (C_2 - C_1) \sqrt{k_2/k_1},$$

$$\dot{a}(t_2) = 2k_2 m_0 t_1 - r_0 = \dot{a}(t_1) = (C_2 - C_1) \sqrt{k_2/k_1}.$$

Из последнего уравнения находим $r_0 = 2k_2 m_0 t_1 + (C_1 - C_2) \sqrt{k_2/k_1}$ ($k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$).

Максимальное значение кинетического момента b_{\max} связано с константой r_0 уравнением

$$C^2 b_{\max} (r_0 - k_2 b_{\max}) = 1 + k_1 u_0^2$$

($H = 0$ в любой момент, и $H(T/2) = 0$). Нетрудно убедиться, что при любых значениях k_1 , k_2 и u_0 выполняются условия $C_1 > 0$, $C_2 < 0$, и тем самым обеспечивается $r_0 > 0$ и $a(0) > 0$, $a(T) < 0$.

$$C_2 = -C_1 \exp\left((t_1 - t_2) \sqrt{k_2/k_1}\right), \quad C_1 = 2k_1 m_0 / \left(1 - \exp\left((t_1 - t_2) \sqrt{k_2/k_1}\right)\right),$$

$$C_2 = 2k_1 m_0 / \left(1 - \exp\left((t_2 - t_1) \sqrt{k_2/k_1}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что $a(T) = -a(0)$ и $a(T/2) = 0$, $\dot{a}(T/2) < 0$.

$$a(T/2) = C_1 \exp\left(0.5(t_1 - t_2) \sqrt{k_2/k_1}\right) + C_2 \exp\left(0.5(t_2 - t_1) \sqrt{k_2/k_1}\right) = 0,$$

$$\dot{a}(t) = \left(C_2 \exp\left((t - t_1) \sqrt{k_2/k_1}\right) - C_1 \exp\left((t_1 - t) \sqrt{k_2/k_1}\right)\right) \sqrt{k_2/k_1}.$$

В интервале времени $t_1 < t < t_2$, когда $|a(t)| < 2k_1 m_0$, оптимальная функция $b(t)$ такая:

$$b(t) = m_0 t_1 + \left(C_2 \exp\left((t - t_1)\sqrt{k_2/k_1}\right) - C_1 \exp\left((t_1 - t)\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_1 - C_2 \right) / \left(2\sqrt{k_1 k_2} \right).$$

Если $a(t) \geq 2k_1 m_0$, то $b(t) = m_0 t$; если $a(t) \leq -2k_1 m_0$, то $b(t) = m_0(t_1 + t_2 - t)$.

Новое решение близко к [27]: функция Гамильтона–Понтрягина, сопряженная система уравнений аналогичны (с точностью до постоянных множителей), как и уравнения типа (2.5)–(2.7); а если $k_1 u_0^2 \geq 1$, то построенное в статье оптимальное решение совпадает с предыдущим решением [27]. Однако наложенное ограничение на управление привносит существенные отличия – закон управления (и структура оптимального управления) другой. Хотя по характеру изменения управляющих функций он близок к решению [26]. Здесь возможно наличие участков вращения с $|\mathbf{M}| = \text{const}$, как и в [26]. Однако главная особенность – сложность определения времен t_1 и t_2 , что, собственно, существенно отличает новое решение.

3. Доказательство единственности оптимального решения. Введем орт \mathbf{q} , коллинеарный моменту \mathbf{M} , причем направления векторов \mathbf{q} и \mathbf{M} совпадают в начальный момент времени $t = 0$. Далее определим скалярный множитель f , удовлетворяющий двум условиям: $\boldsymbol{\varphi} = f\mathbf{q}$ и $f(0) > 0$. В окрестности точки $t = 0$ справедливы соотношения $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$, где χ – скалярный множитель. Сначала оптимальный управляющий момент \mathbf{M} , рассчитанный по выражению (2.4) при условии $\boldsymbol{\varphi} = f(t)\mathbf{q}$, подставляем в (1.1) с учетом зависимости $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ и получаем:

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2 = m(t)\mathbf{q}. \tag{3.1}$$

Векторы $\dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ и \mathbf{q} ортогональны, либо сумма $\dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ есть нулевой вектор ($|\mathbf{q}| = 1$, а значит $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = 0$). Условие (3.1) означает, что $\dot{\mathbf{q}} = -(I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{q}$ и $\dot{\chi} = m(t)$. Далее векторы $\boldsymbol{\varphi} = f(t)\mathbf{q}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ подставим в (2.10). С учетом соотношения $\dot{\mathbf{q}} = -(I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{q}$, которое следует из уравнения (3.1) (оптимальное вращение удовлетворяет одновременно уравнениям (1.1) и (2.10)), левая часть (2.10) станет такой:

$$\dot{f}\mathbf{q} + f\dot{\mathbf{q}} = \dot{f}\mathbf{q} - f(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}.$$

Правая часть (2.10) принимает вид:

$$2k_2\chi\mathbf{q} + \chi(\mathbf{q} \times (I^{-1}\dot{f}\mathbf{q})) + I((I^{-1}\dot{f}\mathbf{q}) \times (I^{-1}\chi\mathbf{q})) - \mathbf{r} = 2k_2\chi\mathbf{q} - f(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - r_0\mathbf{p}.$$

Приравнивая правую и левую части (2.10), получаем уравнение $\dot{f}\mathbf{q} = 2k_2\chi\mathbf{q} - r_0\mathbf{p}$, из которого $f = 2k_2c - r_0$ и $\mathbf{q} \circ \mathbf{p}$ (так как $f(0) > 0$, $f(T) < 0$, и $f < 0$). Приходим к выводу: если в какой-либо момент времени t векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{L} коллинеарны, то они остаются коллинеарными внутри всего интервала времени $0 < t < T$. Требования $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ гарантируют существование как минимум двух таких моментов времени, когда \mathbf{L} и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны ($\mathbf{L} = ht\boldsymbol{\varphi}$ при $t \rightarrow 0$, и $\mathbf{L} = -h(T - t)\boldsymbol{\varphi}$ при $t \rightarrow T$). Можем утверждать, что в процессе оптимального маневра свойство $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ сохраняется внутри всего отрезка времени $t \in [0, T]$ и оптимальное вращение обязано удовлетворять (2.6), (2.7). Мы

доказали, что (2.6), (2.7) – единственное решение системы (1.1), (2.2), (2.4), (2.5), поскольку $\omega(0) = 0$ и $\omega(T) = 0$ (напомним, $r_i = r_0 p_i$).

Таким образом, оптимизация свелась к определению такого вектора \mathbf{p}_0 , чтобы в ходе вращения КА, согласно уравнениям (1.2), (2.5), (2.7), удовлетворились условия $\Lambda(T) = \Lambda_f$, $\omega(T) = 0$. Краевая задача принципа максимума состоит в определении вектора $\mathbf{p}(0)$ и величины $r_0 > 0$, при которых решение системы уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.4), (2.5) с начальными условиями (1.3) и связью $r_i = r_0 p_i$ удовлетворит крайевым условиям (1.4). Необходимо особо отметить, что предложенное решение задачи возможно лишь в общем случае, когда коэффициент k_1 функционала (1.5) не равен нулю (из общего решения нельзя получить частное решение в случае отсутствия в минимизируемом функционале (1.5) второго слагаемого).

4. Особенности проектирования оптимальной программы управления вращением. Решение задачи оптимального разворота описывается уравнениями (2.6), (2.7), (2.8), (2.11); управляющие функции M_i и угловые скорости w_i изменяются в соответствии с (2.7), (2.8). Вектор \mathbf{p}_0 находится из решения двухточечной краевой задачи разворота. Программу вращения КА полностью определяют m_0 и коэффициенты k_1, k_2 . Программное значение \mathbf{M} связано с кватернионом Λ по выражению

$$\mathbf{M} = m(t) \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda,$$

в котором $m(t)$ изменяется в соответствии с (2.14).

При оптимальном вращении имеет свойство симметрии (прежде всего для функций $m(t)$ и $b(t)$) и характеризуется следующими закономерностями:

$$m(0) = -m(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad m(T-t) = -m(t), \quad b(T-t) = b(t),$$

$$\int_0^{T/2} |a(t)| dt = \int_{T/2}^T |a(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} |m(t)| dt = \int_{T/2}^T |m(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt,$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda},$$

$$\max_{t < T/2} m(t) = -\min_{t > T/2} m(t) = m(0),$$

$$L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

Из (2.7) следует, что \mathbf{p} – орт кинетического момента \mathbf{L} . Оптимальные функции $\omega_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ соответствуют требованиям (2.6), (2.7), где $p_i(t)$ – решение системы (2.5). Оптимальное управление определяется выражением (2.8), векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} коллинеарны в любое время $t \in [0, T]$ (направление кинетического момента \mathbf{L} остается постоянным относительно инерциальной системы координат). Управление (2.8) является действительно оптимальным, поскольку оно – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5).

Для неограниченного управления (т.е. при $k_1 u_0^2 \geq 1$) оптимальное решение заметно проще:

$$\begin{aligned}
a(t) &= C_1 \exp\left(-t\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_2 \exp\left(t\sqrt{k_2/k_1}\right), \quad \mathbf{M} = a(t)\mathbf{p}/(2k_1), \\
C_1 &= -C_2 \exp\left(T\sqrt{k_2/k_1}\right), \\
b(t) &= \left(C_2 \exp\left(t\sqrt{k_2/k_1}\right) - C_1 \exp\left(-t\sqrt{k_2/k_1}\right) + C_1 - C_2\right) / \left(2\sqrt{k_1 k_2}\right), \\
C_1 &= 2\sqrt{k_1} / \left(C\left(1 - \exp\left(-T\sqrt{k_2/k_1}\right)\right)\right), \quad C_2 = 2\sqrt{k_1} / C - C_1, \\
r_0 &= (C_1 - C_2)\sqrt{k_2/k_1}.
\end{aligned}$$

Для управления, ограниченного требованием (1.6), когда $k_1 u_0^2 < 1$, оптимальное решение $\mathbf{M} = m(t)\mathbf{p}$, где $m(t) = u_0/C$, если $a(t) > 2k_1 m_0$; $m(t) = a(t)/(2k_1)$, если $|a(t)| \leq 2k_1 m_0$; $m(t) = -u_0/C$, если $a(t) < -2k_1 m_0$. Значения \mathbf{p}_0 и m_0 определяются исключительно значениями u_0 , Λ_{in} , Λ_f и J_1, J_2, J_3 , а времена t_1, t_2 зависят от k_1 и k_2 . В момент времени $t = T/2$ момент \mathbf{M} меняет свое направление на противоположное, модуль $|\mathbf{L}|$ максимален ($|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\max}$).

4.1. *Некоторые частные случаи оптимального управления разворотом.* Управляющие функции формируются согласно (2.8), (2.14), для чего надо в каждый момент времени t знать p_1, p_2, p_3 . Угловая скорость $\omega(t)$ (как решение системы уравнений (1.1), (2.4)–(2.6) с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) удовлетворяет соотношениям (2.7). Аналитическое решение системы (1.2), (2.5), (2.7) существует только для сферически-симметричных и динамически симметричных тел. В случае сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) зависимости известны [19]:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m(t) p_{i0}, \quad \omega_i(t) = b(t) p_{i0} / J_i,$$

где временные функции $b(t)$ и $m(t)$ определяются параметрами $m_0 = u_0 \sqrt{J_1}$ и k_1, k_2 ; v_0, v_1, v_2, v_3 – элементы кватерниона разворота $\Lambda_t = \Lambda_{in} \circ \Lambda_f$. Траекторию вращения $\Lambda(t)$ запишем в следующей аналитической форме:

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/(2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt.$$

Для динамически симметричного твердого тела ($J_2 = J_3$) задача оптимального управления (1.1)–(1.6) может быть доведена до аналитического решения (для конкретности дальнейшего изложения за ось симметрии принята ось OX). При таком распределении масс оптимальное движение есть одновременное вращение тела (КА) вокруг направления, задаваемого вектором \mathbf{p} , неподвижным относительно инерциальной системы координат, и вокруг оси OX , образующей с \mathbf{p} постоянный угол ϑ . Угловые скорости относительно \mathbf{p} и оси OX изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, из-за чего имеем [8, 11]:

$$\Lambda_f = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta / 2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha / 2},$$

где \mathbf{e}_1 – орт оси симметрии КА; α, β – углы поворота вокруг оси OX и вокруг \mathbf{p} ($|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$). Решение $\mathbf{p}(t)$ представим в аналитической форме [8, 11]:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \\ p_3 &= -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa, \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $p_{i_0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная скорость $\omega_1(t)$ определяется из (2.7) при том, что $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Значения α, β и p_{i_0} рассчитываются по значениям Λ_{in} и Λ_f из системы [8, 11]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1, \\ p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

при этом $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ (здесь v_0, v_1, v_2, v_3 – элементы кватерниона $\Lambda_t = \Lambda_{in} \circ \Lambda_f$).

В случае динамически симметричного КА описанное решение отличается от [11], так как все управляющие переменные $M_i(t)$ – непрерывные функции времени. Угловые скорости ω_i рассчитываются по уравнениям (2.7) и (4.1). Искомые оптимальные управления $M_i(t)$ имеют аналитический вид:

$$M_1 = m(t) p_{10}, \quad M_2 = m(t) \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma), \quad M_3 = m(t) \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma),$$

где $\gamma = \arcsin\left(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}\right)$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin\left(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}\right)$, если

$p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \neq 1$); вариант $|p_{10}| = 1$ означает плоское вращение вокруг оси OX , поэтому мы его не рассматриваем.

Оптимальная траектория $\Lambda(t)$ представляется в следующем аналитическом виде:

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu \mathbf{e}_1 / 2},$$

где $\sigma = J_2^{-1} \int_0^t b(t) dt$; $\mu = p_{10} \sigma (J_2 - J_1) / J_1$.

Параметры \mathbf{p}_0, m_0, T для динамически симметричного тела находятся намного проще. Величины b_{\max}, G зависят от β . Чтобы (1.5) было минимальным, необходимо, чтобы угол b был минимально возможным, что возможно, если $b \in \mathbf{p}$ (именно поэтому (4.2) включает условие $0 \leq \beta \leq \pi$). Отметим, что в более ранних работах [11, 14] также выписаны предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота, но для других функционалов качества, и доведено до конца решение для частного случая динамической симметрии твердого тела. При этом авторы статьи [11] показали, что система (4.2) имеет решение для любых Λ_t и $J_1, J_2 = J_3$.

В случае произвольного распределения масс ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы (1.2), (2.5), (2.7) можно найти только численными методами (в частности,

методом последовательных приближений [33] или способом, описанным в предыдущем исследовании [8]). Искомый вектор \mathbf{p}_0 получается из решения краевой задачи $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}(T) = \Lambda_T \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_T$ для системы (2.5), (2.7). Ранее применяли метод итераций (см. систему [34] и способ [35]). Используя известное свойство независимости оптимального вектора \mathbf{p}_0 от поведения $b(t)$ [18], мы рассчитываем \mathbf{p}_0 при допущении $b(t) = \text{const}$, что существенно облегчает расчет \mathbf{p}_0 . Решение $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ системы уравнений (2.5), (2.7) при условии $b(t) = \text{const}$ отражает вращение по инерции, поскольку уравнения (2.5), (2.7) выполняются совместно с (1.1), из которых следует $\mathbf{M} = 0$. Ранее же было доказано, что если внешний момент, действующий на тело, сохраняет неизменным свое направление в инерциальном пространстве, будучи параллельным вектору кинетического момента \mathbf{L} , то геометрия движения тела остается такой же, как и движения в случае Эйлера (при этом модуль этого внешнего момента может быть произвольной функцией времени [36]).

Необходимо заметить, что чем больше k_2 , тем меньше максимальная энергия вращения $E_{\max} = E(T/2)$ и максимальный кинетический момент $L_{\max} = |\mathbf{L}(T/2)|$. При $k_2 \rightarrow 0$ функция $a(t)$ изменяется практически по линейному закону. Соответственно, в интервале времени, когда $|\mathbf{M}| \neq \text{const}$, $b(t)$ близка к квадратичной функции времени, поскольку в этом интервале времени функция $m(t)$ практически линейна. С уменьшением коэффициента k_2 максимальная энергия вращения E_{\max} и максимальный кинетический момент L_{\max} увеличиваются. С другой стороны, увеличение коэффициента k_1 приводит к увеличению длительности маневра T .

5. Численное решение задачи оптимального управления и пример математического моделирования. Наглядное представление о поведении параметров движения рассмотрим на примере разворота на 150° некоторого КА в положение, соответствующее кватерниону Λ_γ с элементами $\lambda_0 = 0.25882$; $\lambda_1 = 0.68288$; $\lambda_2 = 0.59161$; $\lambda_3 = 0.34161$. В исходном положении направления одноименных осей связанного и инерциального базисов совпадают, и $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Далее приводится численное решение задачи управляемого разворота в постановке (1.1)–(1.6) для случая, когда $k_1 = 58.58$ с/Вт, $k_2 = 1.17$ 1/Дж и $u_0 = 0.044$ Н/кг^{1/2}, при этом инерционные характеристики КА $J_1 = 4710$ кг·м², $J_2 = 17160$ кг·м², $J_3 = 18125$ кг·м².

При решении двухточечной краевой задачи разворота в (2.7) полагаем $b(t) = \text{const}$ (и $|\mathbf{L}| = \text{const}$), так как характер поведения функции $b(t)$ не влияет на расчетное значение \mathbf{p}_0 [18]. Начинаем с решения той же задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему между J_2 и J_3 значению (исследователи нередко используют принцип осреднения [37]). Допустима величина $J = (J_2 + J_3)/2$, хотя лучше взять следующее значение [8, 24]:

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} \left(\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1 \right).$$

Теперь решаем систему (4.2) в предположении, что КА – динамически симметричное тело. Вычисленные из (4.2) значения \mathbf{p}_0 и b берем как начальное приближение к истинным значениям, соответствующим оптимальному

решению. Они уточняются до тех пор, пока не станут удовлетворять системе (1.2), (2.5), (2.7) с учетом $b(t) = \text{const}$ (что соответствует $\mathbf{M} = 0$) при условиях $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$, накладываемых на вращение КА. Имея \mathbf{p}_0 и угол β , начальные угловые скорости ω_{ist} вычисляются по выражениям:

$$\omega_{1st} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \omega_{2st} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \omega_{3st} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при расчете \mathbf{p}_0 считалось $T = 250$ с). Прогноз неуправляемого движения осуществляем путем интегрирования системы уравнений (1.2), (2.5), (2.7) и $b(t) = J\beta(t)/T$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\omega(0) = \omega_{st}$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Мерой близости \mathbf{p}_0 к истинному решению служит величина $\varepsilon = \text{sqa}(\Lambda_{pr} \circ \Lambda_f)$, где Λ_{pr} – максимально близкое к Λ_f положение, полученное в ходе моделирования углового движения КА, соответствующего вращению по инерции ($M_i = 0$). Значение \mathbf{p}_0 уточняется до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ (ε_{th} – пороговая величина чуть меньше единицы, которая задает точность рассчитанного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ будет достигнуто (прогнозируемая ошибка удовлетворяет требуемой точности), вектор \mathbf{p}_0 считается найденным (чтобы удовлетворить краевые условия $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$), а краевая задача решенной. Вектор \mathbf{p}_0 уточнялся, используя рекуррентное правило [8, 25–27]:

$$\Lambda_t^{(n+1)} = \Lambda_t^{(n)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr},$$

где $\Lambda_t^{(n)}$ – кватернион разворота для расчета \mathbf{p}_0 и \mathbf{I}_{st} в на n -м приближении. Правые части системы (4.2) (элементы кватерниона разворота $\Lambda_t^{(n)}$) обновляются на каждом n -м шаге итераций, из (4.2) мы находим \mathbf{p}_0 , β , а также угловую скорость ω_{st} (согласно (5.1)) для интегрирования уравнений (1.2), (2.7), и вычисляем прогноз Λ_{pr} . Если $\varepsilon < \varepsilon_{th}$, то рассчитывается новый кватернион разворота $\Lambda_t^{(n+1)}$ для следующего $(n+1)$ -го приближения – процесс уточнения \mathbf{p}_0 возобновляется. В правых частях системы (4.2) для начального приближения берутся элементы кватерниона $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$. Итерационный процесс останавливается, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$. Поскольку $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(n)})| < |\text{vect} \Lambda_t^{(n)}|$ для всех n , то можно утверждать, что процесс приближений к искомому значению \mathbf{p}_0 сходится. Подробная схема расчета \mathbf{p}_0 описана ранее [8, 25].

Демонстрация движения КА во время оптимального разворота в графической форме приведена на рис. 3–7 (по результатам математического моделирования). По решению краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_f$ был рассчитан вектор $\mathbf{p}_0 = \{0.381804; 0.1941395; 0.9036236\}$. Соответственно, $m_0 = 5$ Н·м. Так как $k_1 u_0^2 < 1$, в начальный и конечный моменты времени $|\mathbf{M}(0)| = |\mathbf{M}(T)| = m_0$. Начальное значение функции $a(t)$ равно $a(0) = 2850.6$ с². В оптимальном развороте имеется два интервала времени, когда $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$ (в начале и в конце маневра), между которыми функция $m(t)$ уменьшается с $m(t) = m_0$ до $m(t) = -m_0$ по экспоненциальному закону изменения. Значение константы $r_0 = 244.8$ с. Точки переключения $t_1 = 13.8$ с и $t_2 = 286.5$ с, время разворота $T_{opt} = 300.3$ с. Кинетический момент достигает максимальной величины $L_{max} = 104.67$ Н·м·с в момент времени $t = 150.15$ с. Энергия вращения во время разворота не превысила $E_{max} = 0.4267$ Дж.

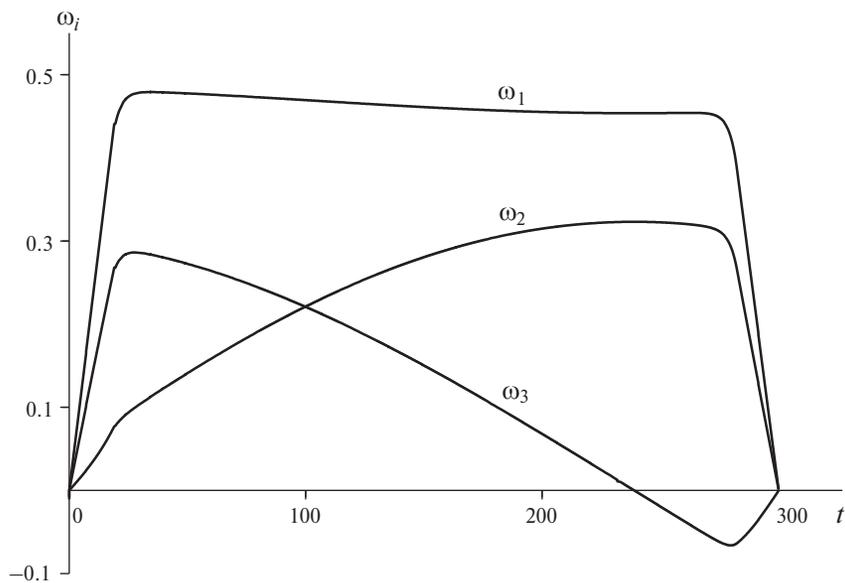


Рис. 3. Изменение угловых скоростей КА во время разворота.

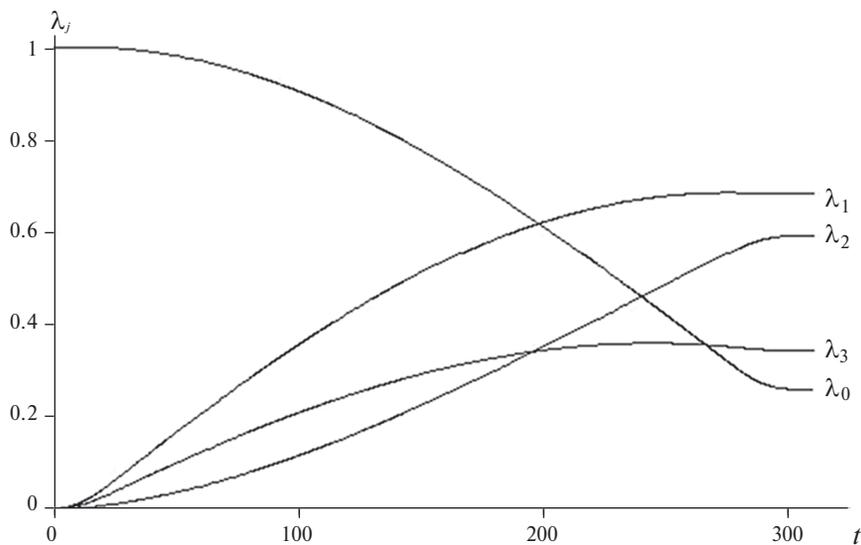


Рис. 4. Изменение компонент кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ во время разворота.

Отчетливо видно, что энергия вращения не превышает уровня $E_0 = 1 / (2k_2)$. На рис. 3 даны графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени (скорости w_i приведены в градусах/с). Рис. 4 иллюстрирует изменение элементов кватерниона $\Lambda(t)$ в процессе совершаемого маневра ($\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ отражают текущую ориентацию

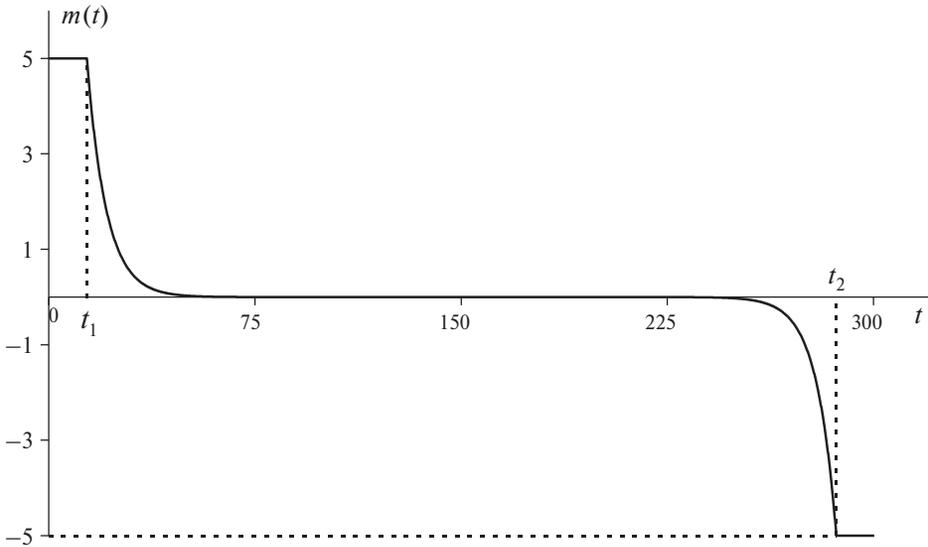


Рис. 5. Оптимальная функция $m(t)$ для модельного разворота.

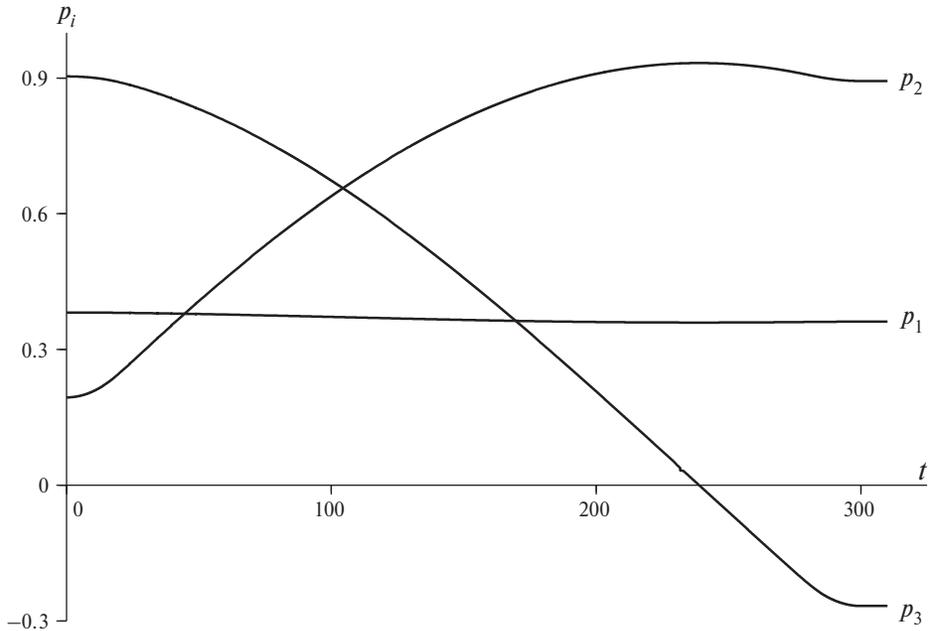


Рис. 6. Вид функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во время оптимального разворота.

КА). На рис. 5 показана оптимальная функция $m(t)$ для рассматриваемого разворота ($m(t)$ дается в Н · м). Характер поведения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ показан на рис. 6 (p_i и λ_j – безразмерные величины). Отмечаем, что ω_1 и p_1

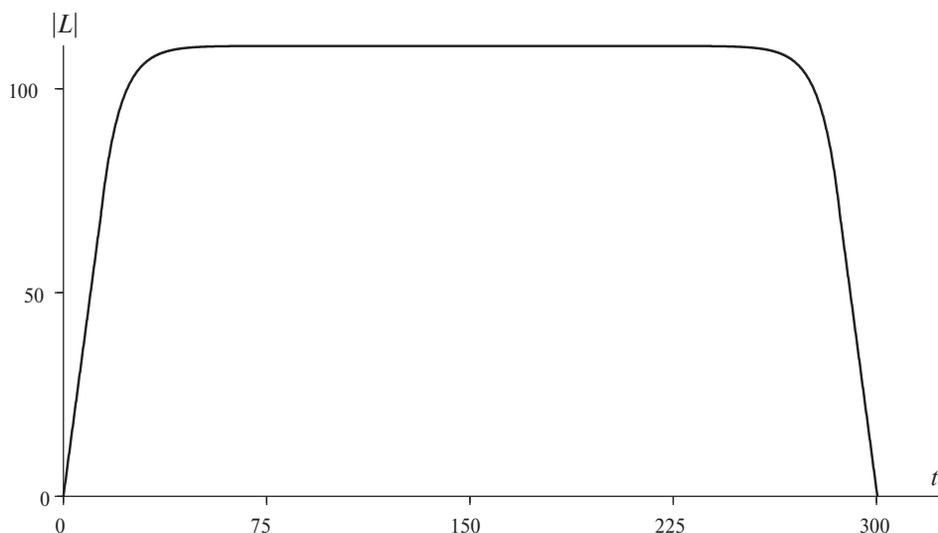


Рис. 7. Изменение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

знакопостоянны, причем p_1 меняется незначительно (в отличие от p_2 и p_3). Это свидетельствует о том, что OX – продольная ось КА. Для оптимального управления переменные p_i и λ_j – гладкие функции времени; ω_i – гладкие функции времени (за исключением $t=0$ и $t=T$); $m(t)$ – непрерывная функция времени с точками излома $t_1 = 13.8$ с и $t_2 = 286.5$ с. Изменение модуля кинетического момента КА иллюстрирует рис. 7 (величина $|L(t)|$ дана в $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Заключение. Исследуется задача оптимального управления вращением КА из исходного углового положения в предписанное конечное угловое положение. Выбранный показатель оптимальности включает управляющие функции и фазовые переменные, а также время разворота, и характеризует энергетические затраты совместно с временем, расходуемым на переориентацию КА. Вопросы экономичности управления вращениями актуальны и в настоящее время, поэтому рассмотренная задача является практически важной.

Чтобы решить поставленную задачу, мы использовали кватернионные модели и принцип максимума Л.С. Понтрягина. Для сформулированной оптимизационной задачи выписаны функция Гамильтона–Понтрягина, сопряженная система уравнений и аналитические выражения для оптимальных управляющих функций. На основе необходимых условий оптимальности определена структура оптимального управления. Обнаружены ключевые свойства разворота и тип траектории, соответствующей критерию (1.5). Даны соотношения для определения пространственного движения КА, и доказана единственность оптимального решения. Сделан вывод, что постоянной величиной является отношение квадрата модуля кинетического момента к кинетической энергии вращения КА. Описана реализация программного разворота.

Ключевое отличие представленного решения – минимизация затрат с новым функционалом качества для ограниченного управления. Наличие

интеграла энергии в минимизируемом функционале ограничивает максимальную кинетическую энергию вращения. Другое принципиальное отличие состоит в том, что из-за ограниченности управления не исключено наличие участков вращения с постоянным модулем управляющего момента во время оптимального разворота. Основными свойствами построенного оптимального управления является коллинеарность вектора оптимального управляющего момента и вектора кинетического момента твердого тела и постоянство направления кинетического момента в инерциальном пространстве.

Коэффициент k_1 и u_0 определяют тип оптимального управления, т.е. присутствуют или отсутствуют интервалы времени, когда КА вращается с постоянным модулем управляющего момента. От коэффициента k_2 зависит максимальная энергия вращения (и, соответственно, время разворота). Отношение k_1/k_2 , задающее пропорцию между затратами управляющих усилий и интегралом энергии вращения, определяет, насколько положим будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота. При $k_1 \rightarrow 0$ оптимальное в смысле (1.5) управление стремится к решению [24]. Когда $k_2 \rightarrow 0$ оптимальное в смысле (1.5) управление стремится к решению [25]. С увеличением k_2 продолжительность периода времени, когда $b(t) \approx \text{const}$ (и, соответственно, $a(t) \approx 0$), увеличивается. В статье выявлены и детально описаны все возможные варианты реализующегося оптимального управления, найдено условие (критерий), позволяющее определить тип оптимального управления, исходя из заданного коэффициента k_1 минимизируемого функционала и размера области допустимых управлений. В зависимости от значения u_0 оптимальным может быть один из двух вариантов управления: а) вращение с переменным модулем управляющего момента на протяжении всего маневра; б) управление с участками вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента (интенсивные раскрутка в начале разворота и торможение в конце разворота). Описана реализация программного разворота.

Полученные результаты отличаются от решения [11], где найдено оптимальное релейное управление вместо непрерывного управления, полученного в нашем случае. Описывается алгоритм численного решения краевой задачи разворота для тел с произвольным распределением масс. Приведен пример математического моделирования, демонстрирующий поведение параметров оптимального движения. В частном случае динамически симметричного КА решение задачи оптимального управления доведено до конца: в аналитическом виде получена система уравнений, позволяющая напрямую решить двухточечную краевую задачу и рассчитать ключевые константы закона управления (для этого можем использовать устройство [38]).

Представленная работа продолжает исследования, начатые в прошлые годы, которые актуальны в практике космических полетов (особенно для систем ориентации и КА с ЭРД). Решаемая задача оптимального управления разворотом твердого тела является максимально общей. Задачи, рассмотренные ранее, либо не учитывают фактор времени (длительность маневра была известна [26]), либо в них отсутствуют ограничения на управление [27], что существенно сужает полноту результатов, полученных прежде. Результаты, приведенные в данной статье, представляются наиболее полными — постановка

задачи учитывает время разворота, вклад управляющих усилий в совершение переориентации (в смысле энергозатрат), а также кинетическую энергию вращения. Немаловажно и то, что сформулированная задача оптимального управления движением решается в динамической постановке.

Заметим, что в последние годы в связи с увеличением сроков активного существования КА (15 лет и более) и применением высокоточных (прецизионных) систем ориентации интерес к ЭРД значительно возрос [39]. Бесспорные преимущества ЭРД – возможность маленькой величины единичного импульса тяги, низкая погрешность дозирования импульсов, практически отсутствует импульс последствия, что дает возможность точной ориентации КА. Из-за невообразимо высоких значений удельного импульса (до 6000 с) широкое применение ЭРД на КА (в том числе для ориентации КА) – одна из ведущих и закономерных тенденций космической деятельности в мире. Многие зарубежные КА в настоящее время используют ионные двигатели для управления ориентацией (например, при решении задач ориентации КА в космической программе США использовали ионные двигатели XIPS-25, созданные корпорацией Boeing Space Systems). В случае управления с помощью ЭРД потребляемая электроэнергия достаточно близко оценивается величиной, пропорциональной первому интегралу в (1.5); третье слагаемое в (1.5) ограничивает кинетическую энергию вращения, что также крайне желательно в практике космического полета. Учитывая потребность во всемерном сокращении электропотребления ЭРД для управления движением КА с одновременным ограничением кинетической энергии вращения, становится понятным выбор минимизируемого функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinitsin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys. Conf. Ser. V. 1745. 2021. P. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. *Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
4. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
<https://doi.org/10.31857/S000233880002843-6>
5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
<https://doi.org/10.2514/3.21187>
6. *Zhou H., Wang D., Wu B., Poh E.K.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Control. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>

7. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
<https://doi.org/10.7868/S0869565218180081>
8. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
11. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
13. *Айтанов Ш.А., Жакыпов А.Т.* Метод разделения переменных и его применение для задачи оптимального разворота космического аппарата // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 1. С. 73–84.
<https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
14. *Стрелкова Н.А.* Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь. ПГУ. 1990. С. 115–133.
15. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.
<https://doi.org/10.7868/S0002338814050114>
16. *Зеленукина О.В., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.
17. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.
18. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
19. *Levskii M.V.* About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
20. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 129–145.
<https://doi.org/10.7868/S0002338816060093>
21. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 39–49.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>

22. Сапунков Я.Г. Молоденков А.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106.
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
<https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>
24. Левский М.В. Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 139–162.
<https://doi.org/10.1134/S0002338819040103>
25. Левский М.В. Управление разворотом твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием оптимальности на основе кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 58–78.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600566>
26. Левский М.В. Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием качества // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 1. С. 197–222.
<https://doi.org/10.31857/S1026351924010115>
27. Левский М.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного критерия качества управления переориентацией твердого тела (космического аппарата) на основе кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2025. № 1. С. 49–74.
<https://doi.org/10.31857/S1026351925010035>
28. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
29. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // J. Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
<https://doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
30. Горшков О.А., Муравьев В.А., Шагайда А.А. Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.
31. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
32. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
33. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.
34. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994. № 2. Опубликовано 20.01.1994. С. 49–50.
35. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998. № 19. Опубликовано 10.07.1998. С. 234–236.

36. Смольников Б.А. Обобщение Эйлера случая движения твердого тела // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 735–736.
37. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
38. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.
39. Кульков В.М., Обухов В.А., Егоров Ю.Г., Белик А.А., Крайнов А.М. Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // Вестн. Самарск. гос. аэрокосмического ун-та. 2012. № 3 (34). С. 187–195.

OPTIMAL REORIENTATION OF A RIGID BODY (SPACECRAFTS) WITH LIMITED CONTROL BASED ON A COMBINED QUALITY FUNCTIONAL

M. V. Levskii^a, *

^aA.A. Maksimov Space Systems Research Institute – branch of the Khrunichev State Space Research and Production Center, Korolev, Russia

*E-mail: levskii1966@mail.ru

Abstract – A quaternion solution to the problem of optimal rotation of a rigid body (spacecraft) from an arbitrary initial to a designated angular position in the presence of constraints on the control variables is presented. To optimize the control process, a combined quality functional was used, which combines in a given proportion the sum of time and control efforts spent on the turn, and the integral of the kinetic energy of rotation during the turn. Based on the maximum principle of L.S. Pontryagin and quaternion models of controlled motion of a rigid body, a solution to the problem was obtained. The properties of optimal motion are disclosed in analytical form. Formalized equations and calculation formulas are written down to construct an optimal rotation program. Analytical equations and relationships for finding optimal control are given. Key relationships are given that determine the optimal values of the parameters of the rotation control algorithm. A constructive scheme for solving the boundary value problem of the maximum principle for arbitrary conditions of rotation (initial and final positions and moments of inertia of a rigid body) is also given. In the case of a dynamically symmetric rigid body, a solution to the reorientation problem in closed form is obtained. A numerical example and the results of mathematical modeling are presented, confirming the practical feasibility of the developed method for controlling the attitude of a spacecraft.

Keywords: quaternions, attitude control, maximum principle, combined quality criterion, control functions, control algorithm, boundary value problem

REFERENCES

1. *Sinitin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys. Conf. Ser. V. 1745. 2021. P. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. *Velishchansky M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B.* Synthesis of spacecraft reorientation algorithms based on the concept of the inverse problem of dynamics // Izvestiya RAS. TiSU. 2003. № 5. P. 156–163 [in Russian].
3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
4. *Reshmin S.A.* Threshold absolute value of relay control for the fastest possible bringing of a satellite to the desired angular position // Izvestiya RAS. TiSU. 2018. № 5. P. 30–41 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S000233880002843-6>
5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
<https://doi.org/10.2514/3.21187>
6. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Control. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
7. *Reshmin S.A.* Threshold absolute value of relay control for the fastest possible bringing of a satellite to a gravitationally stable position // Reports of the Academy of Sciences. 2018. V. 480. № 6. P. 671–675 [in Russian].
<https://doi.org/10.7868/S0869565218180081>
8. *Levskii M.V.* Application of L.S. Pontryagin's maximum principle to problems of optimal control of spacecraft orientation // Izvestiya RAS. TiSU. 2008. № 6. P. 144–157 [in Russian].
9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
10. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical solution to the problem of time-optimal turn of an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions // Izv. RAS. TiSU. 2018. № 2. P. 131–147 [in Russian].
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
11. *Branets V.N., Chertok M.B., Kaznacheev Yu.V.* Optimal rotation of a rigid body with one axis of symmetry // Cosmic research. 1984. V. 22. Issue 3. P. 352–360 [in Russian].
12. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Application of quaternions in problems of rigid body orientation. Moscow: Nauka, 1973. 320 p. [in Russian].
13. *Aipanov Sh.A., Zhakypov A.T.* Method of separation of variables and its application to the problem of optimal turn of a spacecraft // Cosmic research. 2020. V. 58. № 1. P. 73–84 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
14. *Strelkova N.A.* On the optimal reorientation of a rigid body // Problems of mechanics of controlled motion. Nonlinear dynamic systems. Perm. PSU. 1990. P. 115–133 [in Russian].
15. *Levskii M.V.* Kinematically optimal control of spacecraft reorientation // Izvestiya RAS. TiSU. 2015. № 1. P. 119–136 [in Russian].

- <https://doi.org/10.7868/S0002338814050114>
16. *Zelepukina O.V., Chelnokov Yu.N.* Construction of optimal laws of change of the vector of kinetic moment of a dynamically symmetric rigid body // *Izv. RAS. MTT.* 2011. № 4. P. 31–49 [in Russian].
 17. *Biryukov V.G., Chelnokov Yu.N.* Construction of optimal laws of change of the vector of kinetic moment of a rigid body // *Izv. RAS. MTT.* 2014. № 5. P. 3–21 [in Russian].
 18. *Levskii M.V.* Synthesis of optimal control of terminal orientation of a spacecraft using the quaternion method // *Izv. RAS. MTT.* 2009. № 2. P. 7–24 [in Russian].
 19. *Levskii M.V.* About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems.* 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
 20. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical solution of the problem of optimal turn of an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions // *Izv. RAS. TiSU.* 2016. № 6. P. 129–145 [in Russian].
<https://doi.org/10.7868/S0002338816060093>
 21. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical quasi-optimal solution to the problem of rotation of an axisymmetric rigid body with a combined functional // *Izv. RAS. TiSU.* 2020. № 3. P. 39–49 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>
 22. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Analytical solution to the problem of optimal, in the sense of the combined functional, rotation of an axisymmetric spacecraft // *Automation and Telemekhanics.* 2021. № 7. P. 86–106 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
 23. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical approximate solution of the problem of optimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions // *Izvestiya RAS. TiSU.* 2015. № 3. P. 131–141 [in Russian].
<https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>
 24. *Levskii M.V.* Synthesis of optimal control of spacecraft orientation using a combined quality criterion // *Izvestiya RAS. TiSU.* 2019. № 6. P. 139–162 [in Russian].
<https://doi.org/10.1134/S0002338819040103>
 25. *Levskii M.V.* Control of rigid body (spacecraft) turn with a combined optimality criterion based on quaternions // *Izv. RAS. MTT.* 2023. № 5. P. 58–78 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600566>
 26. *Levskii M.V.* Quaternion solution of the problem of optimal control of the orientation of a rigid body (spacecraft) with a combined quality criterion // *Izv. RAS. MTT.* 2024. № 1. P. 197–222 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S1026351924010115>
 27. *Levskii M.V.* Analytical solution of the problem of optimal in the sense of a combined quality criterion for control of the reorientation of a rigid body (spacecraft) based on quaternions // *Izv. RAS. MTT.* 2025. № 1. P. 49–74 [in Russian].
<https://doi.org/10.31857/S1026351925010035>
 28. *Quang M. Lam.* Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace.* 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
 29. *Levskii M.V.* Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // *J. Computer Science Applications and Information Technology.* 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.

- <https://doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
30. *Gorshkov O.A., Muravyov V.A., Shagaida A.A.* Hall and ion plasma engines for spacecraft. Moscow: Mashinostroenie, 2008. 280 p. [in Russian].
 31. *Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Nauka, 1983. 392 p. [in Russian].
 32. *Young L.* Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Moscow: Mir, 1974. 488 p. [in Russian].
 33. *Lyubushin A.A.* On the application of modifications of the method of successive approximations for solving optimal control problems // ZhVMMF. 1982. V. 22. № 1. P. 30–35 [in Russian].
 34. *Levskii M.V.* Control system for spatial rotation of a spacecraft. Patent for invention of the Russian Federation No. 2006431 // Bulletin “Inventions. Applications and Patents”. 1994. № 2. Published 20.01.1994. P. 49–50 [in Russian].
 35. *Levskii M.V.* Method for controlling the turn of a spacecraft and a system for its implementation. Patent for invention of the Russian Federation № 2114771 // Bulletin “Inventions. Applications and Patents”. 1998. № 19. Published 10.07.1998. P. 234–236 [in Russian].
 36. *Smolnikov B.A.* Generalization of the Euler case of rigid body motion // PMM. 1967. V. 31. Issue 2. P. 735–736 [in Russian].
 37. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Applied methods in the theory of oscillations. M.: Nauka, 1988. 328 p. [in Russian].
 38. *Levskii M.V.* Device for forming parameters of regular precession of a solid body. Patent for invention of the Russian Federation № 2146638 // Bulletin “Inventions. Applications and Patents”. 2000. № 8. Published 20.03.2000. P. 148 [in Russian].
 39. *Kulkov V.M., Obukhov V.A., Egorov Yu.G., Belik A.A., Kraynov A.M.* Comparative assessment of the efficiency of using promising types of electric rocket engines as part of small spacecraft // Vestn. Samara State Aerospace University. 2012. V. 3. № 34. P. 187–195 [in Russian].