ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 4, с. 115–127

*УДК 539.3: 534.1*

# СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ



**А. В. Ильяшенко**[a], *

[a]*Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

**E-mail: avi_56@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.01.2025 г.
После доработки 24.01.2025 г.
Принята к публикации 26.01.2025 г.

Для анизотропного слоя с произвольной упругой анизотропией построены дисперсионные соотношения для гармонических плоских волн Лэмба, проведен анализ решений для симметричной фундаментальной моды при бесконечно малой частоте (солитоноподобные волны). Дисперсионные уравнения для волн Лэмба, в том числе соответствующие предельные значения, получены в явном виде.

*Ключевые слова:* волна Лэмба, дисперсия, анизотропия, фазовая скорость, солитоноподобная волна

**DOI:** 10.31857/S1026351925040064, **EDN:** BNLCPU

**1. Введение.** Ниже анализируются низкочастотные волны, распространяющиеся в упругом слое и удовлетворяющие условиям, характерным для солитонов. Эти волны, в отличие от солитонов в гидродинамике, описываются решением системы *линейных* уравнений, известных как уравнения Кристоффеля для волн Лэмба при круговой частоте стремящейся к нулю ($\omega \to 0$), или в терминах волнового числа, при $r \to 0$. В ходе модельных численных экспериментов линейные низкочастотные волны в изотропных пластинах, по-видимому, впервые были обнаружены в работе [1]. В круговых цилиндрических изотропных стержнях низшая мода волн Похгаммера–Кри, приводящая при $r \to 0$ к низкочастотной волне, численно исследовалась в [2], а затем в работах [3–5] как специальное решение некоторого *линейного* дифференциального уравнения. Надо отметить, что в [2–5] не были получены аналитические выражения для скорости соответствующей низкочастотной волны. В рамках нелинейных уравнений, аналогичных KdV уравнению, низкочастотные волны в круговых цилиндрических стержнях исследовались в [6–8].

*Замечания 1.1.* а) Численные результаты, полученные в [1–5], свидетельствуют, что для солитоноподобной волны соответствующая дисперсионная кривая $c(r)$ удовлетворяет условию

$$\left| c(r) - c_s \right| = O(r^n), \; r \to 0, \tag{1.1}$$

где $c_s$ – фазовая скорость предельной низкочастотной волны при $r = 0$; $n > 0$ – некоторый целочисленный показатель. Отметим, что в численных экспериментах показатель $n$ определить не удавалось. В дальнейшем несколько более точное условие (см. Замечание 3.1) будет использоваться для нахождения фазовой скорости низкочастотной волны.

б) Тот факт, что низкочастотные волны Лэмба в пластинах распространяются при исчезающее малых частотах, обуславливает малую энергию, необходимую для их возбуждения. Действительно, распределенная кинетическая энергия волны Лэмба определяется выражением

$$E_{kin} \equiv \frac{1}{2}\rho|\dot{\mathbf{u}}|^2 = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{m}|^2\omega^2, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m}$ – амплитуда перемещений, зависящая от положения точки внутри пластины. Таким образом, при ограниченной амплитуде и $\omega \to 0$ кинетическая энергия стремится к нулю. Нетрудно показать, что распределенная потенциальная энергия также пропорциональна квадрату амплитуды и частоты.

Наряду с волнами Релея, волны Лэмба [9] играют важную роль в переносе энергии и весьма часто используются при неразрушающих методах исследования. Следуя [9], поле перемещений волны, распространяющейся в *изотропном* слое, обычно представляют в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \left(\sum_{p=1}^{4}\mathbf{m}_p C_p e^{ir\gamma_p x'}\right) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}$ – перемещения в слое, $\mathbf{m}_p$ – единичные амплитуды (векторы поляризации). Предполагается, что каждый из векторов $\mathbf{m}_p$ лежит в сагиттальной плоскости (эта плоскость определяется вектором $\mathbf{n}$, задающим направление распространения волнового фронта (вектор $\mathbf{n}$ лежит в срединной плоскости слоя), и единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$, нормальным к срединной плоскости слоя); $x' \equiv \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{x}$ – координата вдоль вектора $\boldsymbol{\nu}$, $r$ – волновое число, $c$ – фазовая скорость, $t$ – время, параметры $\gamma_p$ определяются из вводимого позднее уравнения Кристоффеля. В представлении (1.3) волны

$$\mathbf{u}^p(\mathbf{x},t) = \mathbf{m}_p e^{ir\gamma_p x'}\, e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)} \tag{1.4}$$

обычно называют парциальными волнами. В (1.3) неизвестные (комплексные) коэффициенты $C_p$ определяются с точностью до множителя из граничных условий на свободных граничных поверхностях:

$$x' = \pm h: \quad \mathbf{t}_{\nu} \equiv \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = 0, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{C}$ – тензор упругости, а $2h$ – толщина слоя. Экспоненциальный множитель $e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ в (1.3) отвечает распространению плоского волнового фронта $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = \text{const}$; двойные точки в выражении (1.5) означают свертку по двум индексам.

*Замечание 1.2.* Представление (1.3) имеет место и в случае *анизотропных* слоев, если (А) тензор упругости обладает осью упругой симметрии и (Б) волна распространяется в направлении этой оси. Условие (А) эквивалентно наличию у тензора упругости моноклинной группы симметрии. В этом случае тензор упругости содержит 13 независимых разложимых компонент. При нарушении условий (А), (Б) амплитуды парциальных волн могут не принадлежать сагиттальной плоскости, это приводит к необходимости учета шести парциальных волн в представлении (1.3) для волны Лэмба, см. [10].

В случае многослойной среды, состоящей из двух и большего числа контактирующих слоев, соответствующие решения обычно получают с помощью двух различных методов. Эти методы известны как метод передаточных матриц (МПМ) (иногда его называют методом Томсона–Хаскелла, по имени разработчиков [11, 12]) и метод глобальной матрицы (МГМ) [13, 14]. МПМ основан на последовательном решении контактных граничных задач на поверхностях раздела и построении соответствующих передаточных матриц. Ниже этот метод будет обсуждаться более подробно. МГМ основан на решении обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-однородными коэффициентами, приводящем в итоге к построению специальной “глобальной” матрицы. Надо отметить, что, помимо волн Лэмба, солитоноподобные волны могут возникать при распространении акустических сигналов и в других элементах конструкций [18–21].

Далее развивается вариант МПМ, основанный на построении фундаментальных матриц и позволяющий проводить аналитические исследования низкочастотных мод волн Лэмба в средах с произвольной анизотропией.

**2. Основные соотношения.** Ниже все слои считаются однородными и линейно гиперупругими. Уравнения движения для упругой однородной анизотропной среды могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{A}(\partial_x,\partial_t)\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}_x \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0, \tag{2.1}$$

где тензор упругости $\mathbf{C}$ предполагается *положительно определенным*:

$$(\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{A}) \equiv \sum_{i,j,\ m,n} A_{ij}C^{ijmn}A_{mn} > 0, \quad \underset{\mathbf{A}\in\mathrm{sym}(R^3\otimes R^3),\ \ \mathbf{A}\neq 0}{\forall\mathbf{A}} \quad \operatorname{sym}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t). \tag{2.2}$$

*Замечание 2.1.* В случае изотропной упругой среды условие положительной определенности (2.2) эквивалентно

$$\mu > 0, \quad \lambda > -\frac{2}{3}\mu,$$

где $\lambda$ и $\mu$ — константы Ламе.

Следуя описанному ранее методу [15, 16], рассмотрим более общее, чем (1.3), представление для волны Лэмба, распространяющейся в слое с произвольной упругой анизотропией:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{f}(x'')e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}, \tag{2.3}$$

где $x''=irx'$ – безразмерная переменная; $\mathbf{f}$ – неизвестная векторная функция, определяющая изменение амплитуды на волновом фронте. Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\mathbf{f}$. Это уравнение известно как уравнение Кристоффеля для волны Лэмба:

$$-r^2\left(\mathbf{A}_1\partial_{x''}^2 + \mathbf{A}_2\partial_{x''} + \mathbf{A}_3\right)\cdot\mathbf{f} = 0\,, \tag{2.4}$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nu},\quad \mathbf{A}_2 = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nu},\quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}-\rho c^2\mathbf{I}\,. \tag{2.5}$$

Для последующего анализа редуцируем уравнение (2.4) к матричному ОДУ первого порядка, введя вспомогательную функцию $\mathbf{w}=\partial_{x''}\mathbf{f}$. С учетом этой функции уравнение (2.4) примет вид:

$$\partial_{x''}\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}=\mathbf{G}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

где $\mathbf{G}$ – матрица шестого порядка для среды с произвольной анизотропией и четвертого порядка для случая, когда выполняются условия А, Б замечания 1.2:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{A}_2\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

причем

$$\det(\mathbf{G}) = \det\left(\mathbf{A}_3\right)\cdot\det{}^{-1}\left(\mathbf{A}_1\right). \tag{2.8}$$

В правой части (2.7) $\mathbf{0}$ и $\mathbf{I}$ соответствующие 3×3 матрицы. Матрица (2.7) позволяет представить общее решение уравнения (2.6) в виде:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}_0 = e^{ir\mathbf{G}x'}\cdot\vec{C}, \tag{2.9}$$

где $\vec{C}$ – шестимерный, вообще говоря, комплексный вектор, определяемый с точностью до скалярного множителя граничными условиями (1.5). С учетом (2.9) представление (2.3) принимает вид:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\end{pmatrix}=\left(e^{ir\mathbf{G}x'}\cdot\vec{C}\right)e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}, \tag{2.10}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{w}(x'')e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}$.

*Замечание 2.2.* Представление (2.10) остается справедливым и в случае *неполупростого* вырождения матрицы $\mathbf{G}$, т.е. при наличии жордановых блоков в канонической нормальной форме матрицы $\mathbf{G}$.

**3. Низкочастотная волна в гомогенном анизотропном слое**. Подстановка решения в форме (2.10) в граничные условия (1.5) дает

$$\mathbf{M}\cdot\vec{C}=0,\,, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_1\right) \cdot e^{+ir\mathbf{G}h} \\ -\left(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_1\right) \cdot e^{-ir\mathbf{G}h} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В выражении (3.2)

$$\mathbf{A}_4 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}\,. \tag{3.3}$$

Наличие нетривиального решения уравнения (3.2) эквивалентно условию

$$\det(\mathbf{M}) = 0\,. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) известно как дисперсионное уравнение для волны Лэмба, поскольку это уравнение определяет фазовую скорость, как неявную функцию от частоты или волнового числа.

*Предложение 3.1.* При $r=0$ и любой анизотропии упругого гомогенного слоя уравнение (3.4) тождественно удовлетворяется.

*Доказательство* вытекает из (3.2) при $r=0$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Выражение (3.5) обеспечивает выполнение (3.4).

Однако полученное при $r=0$ решение бессодержательно: во-первых, оно не обеспечивает удовлетворения условия (3.4) при малых $r \to 0$, а во-вторых, не определяет фазовой скорости низкочастотной волны. В дальнейшем для отыскания такой волны будет использоваться условие (1.1). С учетом выражения (3.4) и Предложения 3.1, условие (1.1) может быть записано в виде следующих условий:

$$\frac{d^k}{dr^k} c(r) \equiv -\left(\partial_r^k \det(\mathbf{M})\right) \Big/ \left(\partial_c \det(\mathbf{M})\right)\Big|_{r=0} = 0, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что условия (3.6) эквивалентны:

$$\partial_r^k \det(\mathbf{M})\Big|_{r=0} = 0, \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Разложим в ряд Тейлора по $r$ экспоненциальные отображения, фигурирующие в (3.2). Это дает матрицу $\mathbf{M}$ в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix} + \frac{irh}{1!}\begin{pmatrix} -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{(irh)^2}{2!}\begin{pmatrix} -\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} + O(r^3). \tag{3.8}$$

Ограничиваясь при малых $r$ первыми четырьмя членами тейлоровского разложения в (3.8) и применяя формулы Шура [17], получим условия (3.7) в виде:

$$\partial_r^k \det(\mathbf{M})\Big|_{r=0} \equiv \partial_r^k \Big(\det\big(\mathbf{W}\big)\det\big(\mathbf{Z} - \mathbf{X}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}\big)\Big)\Big|_{r=0} = 0, \quad k = 1,\ldots,n\,, \tag{3.9}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathbf{W} = \mathbf{A}_4 - (irh)\mathbf{A}_3 + \frac{(irh)^2}{2}\Big(-\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3\Big) + \\
+\frac{(irh)^3}{3!}\Big(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \big(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\big)^2\mathbf{A}_3\Big), \\
\mathbf{X} = -\mathbf{A}_4 - (irh)\mathbf{A}_3 + \frac{(irh)^2}{2}\Big(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3\Big) + \\
+\frac{(irh)^3}{3!}\Big(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \big(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\big)^2\mathbf{A}_3\Big), \\
\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1 + (irh)\big(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2\big) + \frac{(irh)^2}{2}\Big(-\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\Big) + \\
+\frac{(irh)^3}{3!}\Big(-\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4\big(\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\big)^2 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \big(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\big)^2\mathbf{A}_2\Big), \\
\mathbf{Z} = -\mathbf{A}_1 + (irh)\big(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2\big) + \frac{(irh)^2}{2}\Big(\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\Big) + \\
+\frac{(irh)^3}{3!}\Big(-\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4\big(\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\big)^2 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_3 - \big(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\big)^2\mathbf{A}_2\Big).
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Матрицы в (3.9), (3.10) корректно определены, если фазовая скорость $c$ отлична от скоростей объемных волн, распространяющихся в направлении волновой нормали $\mathbf{n}$. В дальнейшем это условие предполагается выполненным. Уравнения (3.9) доставляют необходимые и достаточные условия для существования низкочастотной волны, удовлетворяющей условию (1.1).

*Замечание 3.1.* Присутствие в условиях (3.6), (3.7) параметра $n \geq 1$, зависящего от анизотропии и характеризующего убывание фазовой скорости $c(r)$ при $r \to 0$, связано с тем, что при малых $r$ определитель матрицы $\mathbf{M}$ представим в виде:

$$\det(\mathbf{M}) = r^n V_n + o(r^n), \quad r \to 0\,, \tag{3.11}$$

где $V_n$ – некоторая, не зависящая от $r$, константа. Принимая во внимание (3.11), становится ясным, что условия (3.6), (3.7) определяют фазовую скорость, при которой вырождается младший коэффициент $V_n$ асимптотического разложения (при $r \to 0$) определителя матрицы $\mathbf{M}$.

**4. Низкочастотная волна Лэмба в гомогенном изотропном слое.** Для изотропного упругого слоя имеем:

$$\mathbf{A}_1 = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}), \;\; \mathbf{A}_2 = (\lambda + \mu)(\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\nu}),$$
$$\mathbf{A}_3 = (\lambda + 2\mu - \rho c^2)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\mu - \rho c^2)(\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}), \tag{4.1}$$
$$\mathbf{A}_4 = \lambda \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\nu}.$$

где $\mathbf{w} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}$.

Подстановка матриц (4.1) в выражение (2.7) дает матрицу $\mathbf{G}$ в виде:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\rho c^2 - \mu}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & \dfrac{\rho c^2 - (\lambda + 2\mu)}{\mu} & 0 & -\dfrac{\lambda + \mu}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho c^2 - \mu}{\mu} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Для изотропной среды фундаментальную матрицу $e^{ir\mathbf{G}x'}$ удается построить явно. Для этого приведем матрицу $\mathbf{G}$ к жордановой нормальной форме:

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}^{-1}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{W}$ – матрица, состоящая из правых (ненормализованных) собственных векторов $\mathbf{G}$, расположенных по столбцам:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -a & a & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-1} \\ a & -a & b & -b & 0 & 0 \\ -a^2 & -a^2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

а $\mathbf{D}$ – диагональная матрица:

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left(a, -a, b, -b, a, -a\right). \tag{4.5}$$

В (4.4), (4.5) параметры $a$ и $b$ принимают значения:

$$a = \sqrt{\frac{\rho c^2}{\mu} - 1}, \qquad b = \sqrt{\frac{\rho c^2}{\lambda + 2\mu} - 1}\,. \tag{4.6}$$

Можно доказать, что при любых допустимых значениях $\lambda$ и $\mu$, удовлетворяющих условию (2.2), матрица (4.2) – полупростая. С учетом (4.3)–(4.6) фундаментальная матрица принимает вид:

$$e^{irx'\mathbf{G}} = \mathbf{W} \cdot e^{irx'\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A}\,, \tag{4.7}$$

где **A** – произвольная невырожденная матрица. Объединяя (3.2), (4.1), (4.2), (4.7), получаем матрицу **M** в замкнутом виде.

С учетом (4.2), (4.5), (4.7) дисперсионное уравнение (3.7) дает следующее значение скорости $c_s$ низкочастотной волны Лэмба, распространяющейся в изотропном слое:

$$c_s = 2\sqrt{\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)}}\,. \tag{4.8}$$

Интересно отметить, что эта скорость не зависит от толщины пластины. Анализ (4.8) показывает, что при любых допустимых значениях параметров $\lambda$ и $\mu$ эта скорость лежит в диапазоне $c_T^{bulk} < c_s \le c_L^{bulk}$, где $c_T^{bulk}$, $c_L^{bulk}$ – скорости соответственно объемной поперечной и продольной волн. Лишь при $\lambda = 0$ скорость низкочастотной волны достигает скорость объемной продольной волны.

С помощью собственных векторов (4.4) оказывается возможным определить поляризацию низкочастотной волны. Подставляя $r = 0$ фазовую скорость $c = c_s$ в выражение для матрицы **M**, найдем с точностью до (комплексных) констант два собственных вектора $\vec{C}$, отвечающих нулевому собственному числу матрицы **M**:

$$\vec{C}_1 = \left(1, 0, 0, -1, 0, 0\right); \qquad \vec{C}_2 = \left(0, 1, -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, 0, 0, 0\right). \tag{4.9}$$

Умножая векторы поляризации парциальных волн (4.4) на векторы (4.9), получаем, что при $r = 0$ низкочастотная волна Лэмба имеет: (А) круговую поляризацию в сагиттальной плоскости, и (Б) постоянную по толщине пластины амплитуду.

**5. Низкочастотная волна Лэмба в двухслойной анизотропной пластине.** Рассмотрим двухслойную пластину, состоящую из двух гомогенных упругих анизотропных слоев, на границе раздела которых формулируются условия идеального механического контакта:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(-h_1) &= \mathbf{u}(+h_2), \\ \mathbf{t}_{-\nu}(-h_1) &= -\mathbf{t}_{\nu}(+h_2), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $2h_k$, $k = 1, 2$ – толщины соответствующих слоев.

Внешние поверхности пластины предполагаются свободными от усилий:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\nu}(+h_1) &= 0, \\ \mathbf{t}_{-\nu}(-h_2) &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

По аналогии с (2.10) шестимерное поле в каждом из слоев представим в виде соответствующих фундаментальных матриц $e^{ir\mathbf{G}_k x'}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_k(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{v}_k(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} = \left( e^{ir\mathbf{G}_k x'} \cdot \vec{C}_k \right) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}. \tag{5.3}$$

Подстановка представления (5.3) в интерфейсные условия (5.1) дает:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_1 & (\mathbf{A}_1)_1 \end{pmatrix} \cdot \left( e^{-ir\mathbf{G}_1 h_1} \cdot \vec{C}_1 \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_2 & (\mathbf{A}_1)_2 \end{pmatrix} \cdot \left( e^{+ir\mathbf{G}_2 h_2} \cdot \vec{C}_2 \right). \tag{5.4}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия положительной определенности (2.2) для тензоров упругости $\mathbf{G}_k$, $k=1$, 2 все $6\times 6$ матрицы, фигурирующие в правой и левой частях (5.4), – невырожденные. Это позволяет выразить шестимерный вектор $\vec{C}_2$ через вектор $\vec{C}_1$:

$$\vec{C}_2 = \left( e^{-ir\mathbf{G}_2 h_2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_2 & (\mathbf{A}_1)_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_1 & (\mathbf{A}_1)_1 \end{pmatrix} \cdot \left( e^{-ir\mathbf{G}_1 h_1} \right) \cdot \vec{C}_1. \tag{5.5}$$

*Замечание 5.1.* Выражение (5.5), позволяющее выразить неизвестные коэффициенты в представлении для волны в “нижнем” слое через коэффициенты “верхнего” слоя, составляет основу МПМ метода, а соответствующая матрица в (5.5) известна как передаточная матрица.

С учетом (5.5) граничные условия (5.2) могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{M} \cdot \vec{C}_1 = 0, \tag{5.6}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \left( (\mathbf{A}_4)_1, (\mathbf{A}_1)_1 \right) \cdot \left( e^{+ir\mathbf{G}_1 h_1} \right) \\ \left( (-\mathbf{A}_4)_2, (-\mathbf{A}_1)_2 \right) \cdot (e^{-ir\mathbf{G}_2 h_2}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_2 & (\mathbf{A}_1)_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_4)_1 & (\mathbf{A}_1)_1 \end{pmatrix} \cdot (e^{-ir\mathbf{G}_1 h_1}) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Существование нетривиальных решений уравнения (5.6) при любых $r>0$ эквивалентно выполнению условия (3.4). Однако для низкочастотной волны при $r=0$, так же как и в случае гомогенного слоя, условие (3.4) оказывается бессодержательным, – здесь к матрице (5.7) должны применяться уравнения (3.6).

**6. Заключение.** Исследовано появление солитоноподобных волн в анизотропных слоистых пластинах с произвольной упругой анизотропией. Получены разрешающие уравнения для получения скоростей распространения дисперсионных волн в длинноволновых приближениях.

В явном виде найдено выражение для предельной скорости солитоноподобной волны Лэмба, распространяющейся в изотропной однослойной пластине. Показано, что скорость такой волны превышает коротковолновые пределы, соответствующие волне Рэлея и S-волне, однако солитоноподобной волны не может превышать скорость продольной P-волны. Полученные результаты необходимы при исследовании распространения акустических волн в анизотропных слоях как с помощью экспериментальных, так и численных методов [22–26]. В заключение надо отметить, что исследования по анализу распространения низкочастотных волн в цилиндрических стержнях содержатся в работах [27–29].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 24-49-02002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Planat M., Hoummady M.* Observation of soliton-like envelope modulation generated in an anisotropic quartz plate by metallic in interdigital transducers // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 55. P. 103–112.
https://doi.org/10.1063/1.102116
2. *Davies R.M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // Phil. Trans. R. Soc. 1948. V. 240. P. 375–457.
https://doi.org/10.1098/rsta.1948.0001
3. *Mindlin R.D., McNiven H.D.* Axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech. 1960. V. 27. № 1. P. 145–151.
https://doi.org/10.1115/1.3643889
4. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 729–734.
5. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. Clarendon Press: Oxford, 1975.
6. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. P. 260–268.
7. *Soerensen M.P., Christiansen P.L., Lomdahl P.S.* Solitary waves on nonlinear elastic rods. I. // J. Acoust. Soc. Amer. // 1984. V. 76. P. 871–879.
8. *Porubov I.V., Samsonov A.M., Velarde M.G., Bukhanovsky A.V.* Strain solitary waves in an elastic rod embedded in another elastic external medium with sliding // Phys.Rev. Ser. E. 1998. V. 58. P. 3854–3864.
https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.3854
9. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
https://doi.org/10.1098/rspa.1917.0008
10. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 577–587.
11. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 2. P.89–93.
https://doi.org/10.1063/1.1699629
12. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. № 1. P.17–34.
https://doi.org/10.1785/BSSA0430010017
13. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
14. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. P. 455–467.
https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X
15. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // Mech. Solids. 2017. V. 52. P. 700–707.
https://doi.org/10.3103/S0025654417060097

16. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64. № 1. P. 153–165.
17. *Meier C.D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM: N.Y., 2002.
18. *Djeran-Maigre I.*, *Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 200–207. https://doi.org/10.1134/S106377101402002X
19. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. P. 1385–1394. https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7
20. *Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V.*, *Sekerzh-Zenkovich S.Y.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959. https://doi.org/10.3103/S002565441106015X
21. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. P. 2021–2031. https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x
22. *Li S., Brun, M., Djeran-Maigre I.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // Eur. J. Environ. Civ. Eng. 2020. V. 24. № 14. P. 2400–2421. https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826
23. *Li S., Brun, M., Djeran-Maigre I.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // Comput. Geotech. 2021. V. 131. 103808. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103808
24. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // Russ. J. Nondestructive Testing. 2017. V. 53. № 4. P. 243–259. https://doi.org/10.1134/S1061830917040039
25. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 87–97.
26. *Dudchenko A.V., Dias D.*, *Kuznetsov S.V.* Vertical wave barriers for vibration reduction // Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91. P. 257–276. https://doi.org/10.1007/s00419-020-01768-2
27. *Kolsky H.* Stress waves in solids // J. Sound Vibr. 1964. V. 1. № 1. P. 88–110. https://doi.org/10.1016/0022-460X(64)90008-2
28. *Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 729–734.
29. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. V. 51. № 1B. P. 265–283. https://doi.org/10.1121/1.1912838

# SOLITON-LIKE DISPERSIVE LAMB WAVES IN AN ANISOTROPIC LAYER

**A.V. Ilyashenko**[a], *

[a] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*
**E-mail: avi_56@mail.ru*

For an anisotropic layer with arbitrary elastic anisotropy, dispersion relations for harmonic plane Lamb waves are constructed, and an analysis of solutions for a symmetric fundamental mode at an infinitely small frequency (soliton-like waves) is performed. Dispersion equations for Lamb waves, including the corresponding limiting values, are obtained in explicit form.

*Keywords:* Lamb wave, dispersion, anisotropy, phase velocity, soliton-like wave

## REFERENCES

1. *Planat M., Hoummady M.* Observation of soliton-like envelope modulation generated in an anisotropic quartz plate by metallic in interdigital transducers, Appl. Phys. Lett. // 1989. V. 55. P. 103–112.
2. *Davies R.M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // Phil. Trans. R. Soc. 1948. V. A240. P. 375–457.
3. *Mindlin R.D., McNiven H.D.* Axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech. 1960. V. 27. P. 145–151.
4. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 729–734.
5. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. Clarendon Press: Oxford. 1975.
6. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. P. 260–268.
7. *Soerensen M.P., Christiansen P.L., Lomdahl P.S.* Solitary waves on nonlinear elastic rods. I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. P. 871–879.
8. *Porubov I.V., Samsonov A.M., Velarde M.G., Bukhanovsky A.V.* Strain solitary waves in an elastic rod embedded in another elastic external medium with sliding // Phys.Rev. Ser. E. 1998. V. 58. P. 3854–3864.
9. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
10. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 577–587.
11. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 2. P. 89–93.
12. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V.43. № 1. P. 17–34.
13. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V.54. № 1. P. 431–438.
14. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. P. 455–467.

15. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // Mech. Solids. 2017. V. 52. P. 700–707.
https://doi.org/10.3103/S0025654417060097
16. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // Quart. Appl. Math. 2006. V.64. № 1. P. 153–165.
17. *Meier C.D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM: N.Y.,2002.
18. *Djeran-Maigre I.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 200–207.
https://doi.org/10.1134/S106377101402002X
19. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. P. 1385–1394.
https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7
20. *Kravtsov A.V., Sekerzh-Zenkovich, S.Y.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
21. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. P. 2021–2031.
https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x
22. *Li S., Brun, M., Djeran-Maigre I.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // European Journal of Environmental and Civil Engineering, 2020. V. 24. № 14. P. 2400–2421.
https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826
23. *Li S., Brun, M., Djeran-Maigre I.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // Computers and Geotechnics. 2021. V. 131. Article 103808.
https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826
24. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2017. V. 53. № 4. P. 243–259.
https://doi.org/10.1134/S1061830917040039
25. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 87–97.
https://doi.org/10.1090/qam/1878260
26. *Dudchenko A.V., Dias D.* Vertical wave barriers for vibration reduction // Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91. P. 257–276.
27. *Kolsky H.* Stress waves in solids // J. Sound Vibr. 1964. V. 1. P. 88–110.
28. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 729–734.
29. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. V. 51. P. 265–283.