

УДК 539.4

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИСКРИВЛЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ АРМИРОВАННЫХ ДИСКОВ ИЗ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

© 2025 г. А. П. Янковский^{a, *}

^aИнститут теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Россия

*E-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.11.2024 г.

После доработки 19.12.2024 г.

Принята к публикации 30.12.2024 г.

Сформулирована задача на условный экстремум, позволяющая определять по второму предельному состоянию верхнюю границу допустимой угловой скорости вращения осесимметрично искривленного, армированного волокнами диска. Конструкция жестко закреплена на валу или ступице; к внешней кромке полотна диска могут быть прикреплены лопасти. Материалы компонентов композиции предполагаются жесткопластическими, имеющими асимметрию при растяжении и сжатии; материал связующей матрицы может обладать цилиндрической анизотропией. Пластическое деформирование компонентов композиции ассоциировано с кусочно-линейными критериями текучести. Структуры армирования полотна диска обладают меридиональной симметрией. Использована двуслойная модель искривленного диска с плосконапряженным состоянием в каждом из фиктивных композитных слоев. Дискретизированная поставленная задача решена симплекс-методом теории линейного программирования. Проведена верификация разработанного численного алгоритма. Проанализированы примеры численного расчета предельной угловой скорости вращения плоских, конических и сферических однородных и композитных дисков при разной степени их искривления. Исследованы случаи армирования полотна диска по геодезическим направлениям и по логарифмическим спиральям, а также по меридиональным и окружным траекториям. Сравнение проведено для дисков одинаковой массы при одинаковом расходе арматуры. Показано, что наибольшей несущей способностью обладают композитные диски с меридионально-окружной структурой армирования. Продемонстрировано, что даже незначительное осесимметричное искривление полотна диска приводит к резкому уменьшению его несущей способности по сравнению с аналогичной плоской конструкцией.

Ключевые слова: вращающиеся диски, оболочки вращения, армирование волокнами, жесткопластическая модель, предельное состояние, оценка

несущей способности сверху, кусочно-линейные критерии текучести, разносопротивляемость, анизотропия, численное решение, симплекс-метод линейного программирования

DOI: 10.31857/S1026351925040051, EDN: BNKPVR

1. Введение. Вращающиеся диски компрессоров высокого давления и газотурбинных двигателей, а также маховики (накопители механической энергии) являются одними из наиболее нагруженных тонкостенных элементов современных технических изделий [1–3]. И к дискам газотурбинных авиационных двигателей, и к маховикам предъявляются повышенные требования к уменьшению их массы (в последнем случае для увеличения удельной энергоемкости маховиков [3]), поэтому перспективным представляется изготовление их из композиционных материалов (КМ), которые обладают высокой удельной прочностью и жаростойкостью [3–6]. А значит, актуальной является проблема моделирования и расчета механического поведения вращающихся дисков, в том числе и из неоднородных, анизотропных и армированных материалов [1–3, 7–16]. Как показывают краткие обзоры, проведенные в работах [14–16], в подавляющей части публикаций, посвященных этой тематике, рассматривается упруго-линейное деформирование таких КМ-элементов конструкций. Моделирование же неупругого механического поведения армированных дисков на сегодняшний день находится в стадии становления. При этом, как правило, исследуются лишь диски с простейшей структурой – с армированием только в окружном направлении.

При проектировании конструкций разового назначения несущую способность вращающихся дисков целесообразно рассчитывать по второму предельному состоянию, предполагая, что материалы дисков (или все компоненты их композиции) находятся в пластическом состоянии. Для оценки несущей способности дисков, работающих в таких условиях, их можно моделировать как жесткопластические [14–19]. Известно, что построить полное решение (особенно в аналитической форме) соответствующей задачи даже для плоских дисков со сложными и неоднородными структурами армирования достаточно сложно [14, 15]. Поэтому в работе [16] был разработан численный метод определения верхней (кинематической) границы несущей способности плоских вращающихся КМ-дисков переменной толщины, жесткопластическое поведение материалов композиции которых ассоциировано с кусочно-линейными поверхностями текучести [17–19]. Однако в инженерной практике часто встречаются неплоские (искривленные) вращающиеся диски, например конической формы [1, 2, 7]. Оценка несущей способности таких вращающихся КМ-дисков по второму предельному состоянию с учетом разносопротивляемости материалов их компонентов композиций до настоящего времени не проводилась.

Согласно всему вышеизложенному, данная работа посвящена разработке метода расчета верхней (кинематической) границы предельной угловой скорости вращения неплоских (искривленных), осесимметрично армированных дисков из жесткопластических материалов, а также исследованию влияния

параметров армирования и формы меридионального их сечения на эту скорость вращения.

2. Основные предположения и постановка задачи. Исходя из общей формулировки рассматриваемой задачи, под полотном искривленного диска будем понимать тонкую незамкнутую оболочку вращения с отверстием в окрестности полюсной точки. Ось вращения z для удобства изложения ориентируем вертикально. При этом верхняя кромка оболочки имеет радиус r_0 , а нижняя — радиус r_1 ($r_0 < r_1$); высота подъема верхней кромки над нижней равна H (рис. 1). Толщина оболочки $2h$ в общем случае является переменной и зависит от меридиональной координаты или, например, от радиального расстояния r от оси вращения z до рассматриваемой точки срединной поверхности:

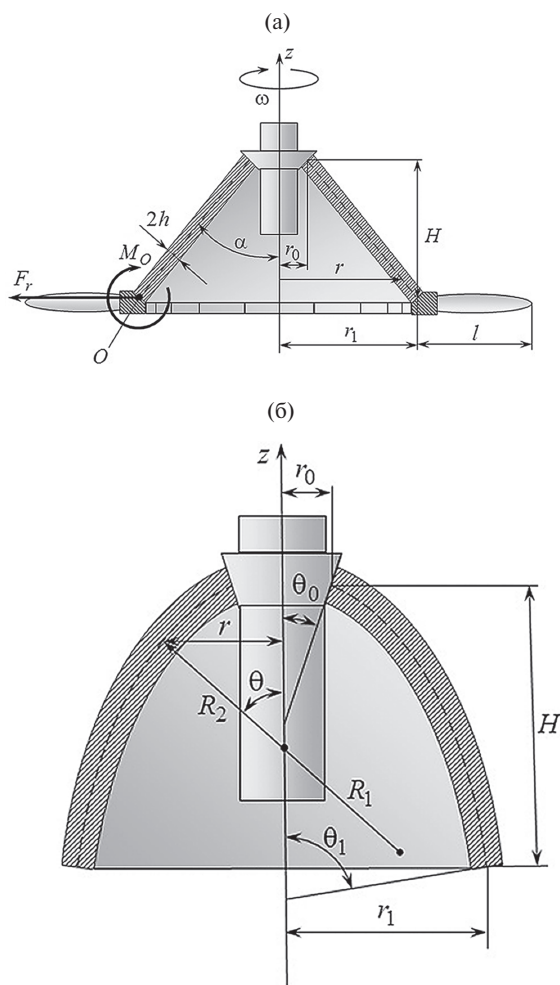


Рис. 1. Меридиональное сечение искривленного диска: (а) — конического с лопатками; (б) — эллипсоидального без лопаток.

$r_0 \leq r \leq r_1$ (см. рис. 1). На верхней (внутренней) кромке $r=r_0$ оболочка жестко соединена с недеформируемым валом (или ступицей). К нижней (внешней) кромке $r=r_1$ оболочки, вращающейся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω , могут быть приложены внешние центробежная сила F_r и распределенный изгибающий момент M_O от действия прикрепленных лопаток и разрезной замковой части обода диска [1, 2, 7] (см. рис. 1а).

Рассматриваются оболочки двух типов.

1. Коническая усеченная оболочка (см. рис. 1а), главные радиусы кривизны R_i и параметры Ламе A_i ($i=1, 2$) срединной поверхности которой имеют выражения [7, 20]:

$$\begin{aligned} R_1 \rightarrow \infty, \quad R_2 = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad A_1 = \frac{1}{\sin \alpha} = \text{const}, \\ A_2 = r \quad (r_0 \leq r \leq r_1), \quad \text{tg} \alpha = \frac{r_1 - r_0}{H} = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где α — угол конусности.

2. Оболочки, срединная поверхность которых получена вращением вокруг оси z некоторой плоской кривой второго порядка. Координаты точек срединной поверхности таких оболочек заданы углом θ между осью вращения z и нормалью к срединной поверхности в рассматриваемой точке. Верхняя (внутренняя) кромка оболочки при этом определяется значением угла $\theta = \theta_0$, а нижняя (внешняя) кромка задана значением угла $\theta = \theta_1$: $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi/2$ (см. рис. 1б). Для такого типа оболочек имеем [20, 21]:

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \beta \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \beta \sin^2 \theta}}, \quad A_1 = R_1, \quad A_2 \equiv r = R_2 \sin \theta, \quad (2.2)$$

где R_0 — значение радиусов кривизны в полюсной точке $\theta = 0$ (при этом $R_1 = R_2 = R_0$); β — параметр, задающий форму оболочки: при $-1 < \beta < \infty$ получаем эллипсоиды вращения (в частности, при $\beta = 0$ — сферу), при $\beta = -1$ — параболоид, а при $\beta < -1$ — гиперboloиды вращения. Здесь и далее нижний индекс “1” означает меридиональное, “2” — окружное и “3” — нормальное (трансверсальное) к срединной поверхности направления.

Если выполняется неравенство

$$H / (r_1 - r_0) \leq 1/4, \quad (2.3)$$

то оболочка считается полой [7, 20, 22]. Как правило, под искривленными вращающимися дисками понимают именно такие вращающиеся оболочки [1, 2, 7]. Если неравенство (2.3) нарушается, то оболочки считаются глубокими. В этом случае разрабатываемая теория может быть использована, например, для расчета предельных угловых скоростей вращения армированных жесткопластических центрифуг. Далее для простоты изложения все рассматриваемые вращающиеся оболочки (как при выполнении, так и при нарушении неравенства (2.3)) условно будем называть искривленными дисками, или просто дисками.

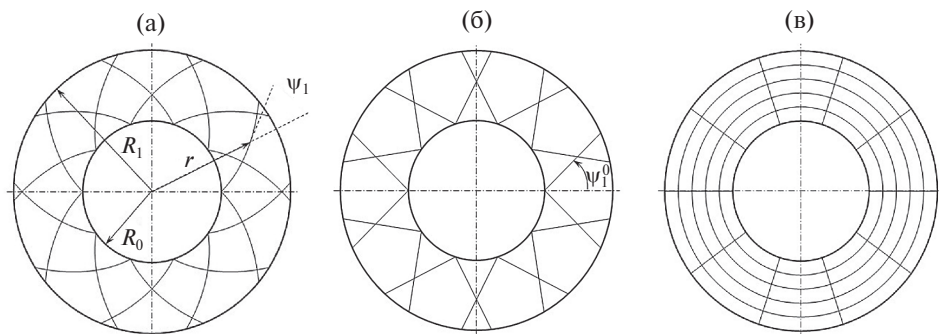


Рис. 2. Структуры армирования полотна диска (вид в плане): (а) — по логарифмическим спиралям; (б) — по геодезическим линиям; (в) — меридианально-окружное армирование.

Полотно диска (непосредственно сама оболочка) осесимметрично армировано двумя семействами волокон. Обозначим через μ_k и ψ_k плотности и углы армирования непрерывными волокнами k -го семейства ($k = 1, 2$). При этом угол армирования ψ_k отсчитывается от меридионального направления, как изображено на рис. 2а, где указан угол армирования первым семейством волокон ψ_1 . (Строго говоря, пропорции на рис. 2 приближенно выполняются лишь при соблюдении неравенства (2.3) и точно выполняются только для плоских дисков, когда $H=0$ [14–16].)

Рассматриваются два варианта армирования:

1) спиральное армирование двумя семействами волокон из одного материала, уложенных симметрично относительно меридионального направления; при этом $\mu_1(r) = \mu_2(r)$, $\psi_1(r) = -\psi_2(r)$, $r_0 \leq r \leq r_1$, $r \rightleftharpoons \theta$ (см. рис. 2а и б);

2) армирование в меридиональном ($\mu_1(r)$, $\psi_1(r) \equiv 0$) и/или окружном ($\mu_2(r)$, $\psi_2(r) \equiv \pi/2$, $r_0 \leq r \leq r_1$, $r \rightleftharpoons \theta$) направлениях (см. рис. 2в), причем волокна, уложенные в разных направлениях, могут быть выполнены из разных материалов.

Структуры армирования по толщине тонких дисков однородны. Согласно традиционным технологиям изготовления, непрерывные волокна имеют постоянные поперечные сечения [3–6], поэтому интенсивность армирования волокнами k -го семейства, осесимметрично намотанными по любым спиральным траекториям, для дисков типа 1 определяется по формулам [23]:

$$\mu_k(r) = h_0 \mu_k^0 \cos \psi_k^0 / [h(r) r \cos \psi_k(r)], \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (2.4)$$

$$h_0 \equiv h(r_0), \quad \mu_k^0 \equiv \mu_k(r_0), \quad \psi_k^0 \equiv \psi_k(r_0), \quad \psi_k^0 \neq \pi/2, \quad k = 1, 2,$$

а для дисков типа 2 [21, 23]:

$$\mu_k(\theta) = h_0 \mu_k^0 \cos \psi_k^0 R_2^0 \sin \theta_0 / [h(\theta) \cos \psi_k(\theta) R_2(\theta) \sin \theta], \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad (2.5)$$

$$h_0 \equiv h(\theta_0), \quad \mu_k^0 \equiv \mu_k(\theta_0), \quad \psi_k^0 \equiv \psi_k(\theta_0), \quad R_2^0 \equiv R_2(\theta_0), \quad \psi_k^0 \neq \pi/2, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $\mu_k^0 > 0$ — плотность армирования, заданная на внутренней (верхней) кромке $r = r_0$ (или $\theta = \theta_0$), которую можно варьировать. В случае окружной укладки волокон k -го семейства $\psi_k^0 = \psi_k = \pi/2$, поэтому в правых частях первых соотношений (2.4) и (2.5) возникает неопределенность типа 0/0. В силу этого

интенсивность армирования μ_k окружным семейством волокон можно задавать достаточно произвольно, учитывая лишь следующие физические ограничения: при любых структурах плотности армирования $\mu_i(r)$ ($i = 1, 2$) являются неотрицательными функциями и суммарная интенсивность армирования $\mu_\Sigma(r)$ в каждой точке должна быть меньше некоторого предельно допустимого значения μ_m :

$$\mu_\Sigma(r) \equiv \mu_1(r) + \mu_2(r) \leq \mu_m = \text{const} < 1 \quad (\mu_i(r) \geq 0, \quad i = 1, 2), \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (r \rightleftharpoons \theta). \quad (2.6)$$

В случае многонаправленного армирования на практике обычно принимают $\mu_m \approx 0.7$ [24].

Материалы компонентов композиции полотна диска однородны и имеют разные пределы текучести при растяжении и сжатии. Армирующие волокна изотропны, а материал связующего в общем случае может быть ортотропным: оси его анизотропии совпадают с меридиональным, окружным и поперечным направлениями. В предельном состоянии пластическое течение в компонентах композиции ассоциировано с кусочно-линейными условиями текучести, аналогичными модифицированным критериям текучести Треска или Ильюшина—Ивлева [14–19, 21, 22, 25, 26].

Исследуется лишь случай осесимметричного деформирования диска в стационарном режиме вращения под действием центробежных сил, так как это главный этап его расчета на прочность [1–3, 7]. При необходимости возможен и учет влияния набегающего воздушного потока. (Наличие или отсутствие этого дополнительного воздействия не принципиально для разрабатываемой здесь методики расчета.) Для моделирования механического поведения полотна диска используются традиционные гипотезы [1–3, 7]: в частности, предполагается, что его изгибное деформирование описывается классической теорией оболочек [7, 17, 20], т.е. в нем приближенно реализуется обобщенное плоское напряженное состояние (ПНС), в том числе неоднородное и в трансверсальном направлении. При указанных свойствах материала связующего, особенностях структур армирования, нагружения, закрепления и геометрии вращающегося диска в нем отсутствует скручивание (относительно оси вращения z), поэтому направления главных напряжений и скоростей деформаций в связующем и в композиции совпадают с меридиональным, окружным и поперечным направлениями.

Согласно сделанным допущениям, на элемент полотна диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , в радиальном направлении r действует центробежная массовая сила [1, 2, 7]:

$$f_r(r) = \bar{f}(r)\omega^2, \quad \bar{f}_r(r) \equiv 2h(r)\rho(r)r, \quad (2.7)$$

$$\rho(r) = \mu_0(r)\rho_0 + \sum_{k=1}^2 \mu_k(r)\rho_k, \quad \mu_0(r) = 1 - \sum_{k=1}^2 \mu_k(r),$$

где ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и волокон k -го семейства; ρ — объемная плотность композиции; μ_0 — относительное объемное содержание связующей матрицы в представительном элементе композиции. В случае оболочек типа 2 в соотношениях (2.7) аргументы у функций необходимо заменить на θ .

Как уже отмечалось, к внешней кромке полотна диска (оболочки) прикладывается равномерно распределенная по окружности $r=r_1$ внешняя сила F_r , действующая в радиальном направлении r , которая порождена центробежным действием на диск прикрепленных к нему лопаток и разрезной замковой части обода [1, 2] (см. рис. 1а). В общем случае эти же центробежные силы могут порождать и изгибающий момент M_O . Погонные сила F_r и момент M_O предполагаются приложенными к внешнему контуру срединной поверхности полотна диска, т.е. в точке O , как изображено на рис. 1а. Величины F_r и M_O зависят от ω , формы, размеров и структуры армирования лопаток и конструктивного исполнения замковой части обода диска. В первом приближении лопатку можно рассматривать в форме прямолинейного стержня постоянной толщины h_* (в направлении оси вращения диска z) и длины l [1], возможно, продольно армированным одним семейством волокон [14, 16]. Так как на элемент лопатки действует центробежная сила, аналогичная (2.7), используя метод сечений, можем определить радиальную силу и момент в корневом сечении лопатки. Поэтому в первом приближении допустимо принять [14, 16]:

$$F_r = \bar{F}_r \omega^2, \quad M_O = \bar{M}_O \omega^2, \quad \bar{M}_O \equiv \pm a \bar{F}_r, \quad (2.8)$$

$$\bar{F}_r \equiv \frac{1}{2} h_* (\mu_0^* \rho_0^* + \mu_* \rho_*) (r_2^2 - r_1^2), \quad \mu_0^* = 1 - \mu_*, \quad r_2 = r_1 + l,$$

где ρ_0^* , ρ_* — объемная плотность материалов связующего и арматуры лопатки; μ_* — интенсивность армирования лопатки; a — фиктивное плечо приложения силы F_r относительно точки O (выбор знака “ \pm ” в выражении для \bar{M}_O определяется конкретным конструктивным исполнением обода диска).

Замечание. Влияние разрезной замковой части обода диска на момент M_O можно учесть, например, за счет соответствующего выбора величины a в (2.8), а на силу F_r — либо за счет дополнительного слагаемого в выражении для \bar{F}_r , либо за счет соответствующего формального изменения величин ρ_0^* и ρ_* в (2.8). Значения таких поправок зависят от конструктивных особенностей исполнения замков. В рамках настоящего исследования учет этих поправок не принципиален, так как значения величин \bar{F}_r и \bar{M}_O в (2.8) можно считать изначально заданными.

Как следует из соотношений (2.7) и (2.8), внешние силы f_r , F_r и момент M_O , действующие на полотно диска, пропорциональны ω^2 , а значит эту величину можно интерпретировать как параметр нагружения исследуемой конструкции. Согласно выражениям (2.7) и (2.8), при определении верхней (кинематической) границы квадрата угловой скорости вращения ω^2 для коэффициентов \bar{f}_r , \bar{F}_r и \bar{M}_O выполняется условие нормирования [17]:

$$2\pi r_1 (\bar{F}_r v_r(r_1) + \bar{M}_O \vartheta(r_1)) + \iint_S (\bar{f}_1 v_1 + \bar{f}_3 v_3) dS = 1, \quad (2.9)$$

где в случае оболочек типа 1 (см. рис. 1а) при учете (2.7)

$$\bar{f}_1(r) = \bar{f}_r(r) \sin \alpha, \quad \bar{f}_3(r) = \bar{f}_r(r) \cos \alpha, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (2.10)$$

а в случае оболочек типа 2 (см. рис. 1б)

$$\bar{f}_1(\theta) = \bar{f}_r(\theta)\cos\theta, \quad \bar{f}_3(\theta) = \bar{f}_r(\theta)\sin\theta, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad (2.11)$$

S — площадь срединной поверхности полотна диска; v_1 и v_3 — кинематически допустимая скорость перемещения точек срединной поверхности полотна диска (оболочки) в меридианальном и поперечном направлениях соответственно в системе координат, связанной с вращающейся конструкцией (v_3 — скорость прогиба); v_r — то же в радиальном направлении r ; ϑ — кинематически допустимая скорость угла поворота нормали к срединной поверхности в меридианальном направлении. (В силу отсутствия скручивания конструкции перемещения точек его срединной поверхности в указанной системе координат в окружном направлении равны нулю, поэтому соответствующая скорость $v_2 \equiv 0$.)

Предельное значение угловой скорости вращения диска найдем из принципа возможной мощности [17, 19], из которого следует, что для определения верхней границы несущей способности вращающегося диска необходимо найти минимум ω_m^2 параметра внешней нагрузки ω^2 :

$$\omega_m^2 = \min_{v_1, v_3} \omega^2 = \min_{v_1, v_3} \iint_S D dS, \quad (2.12)$$

при условии нормирования (2.9) и выполнении ограничений-неравенств

$$D \geq \sum_{j=1}^J Q_{j,n} q_j, \quad n = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (D \geq 0), \quad (2.13)$$

где D — мощность диссипации механической энергии, отнесенная к единице площади срединной поверхности; $Q_{j,n}$ — значения j -х обобщенных напряжений (например, изгибающих моментов и мембранных усилий) в n -й угловой точке кусочно-линейной поверхности текучести материала полотна диска; \bar{N} — количество угловых точек этой поверхности; q_j — значение j -й обобщенной скорости деформаций, сопряженной с обобщенным напряжением Q_j и определяемой через допустимые скорости перемещений точек срединной поверхности оболочки v_1 и v_3 за счет соответствующих кинематических соотношений [7, 17, 20]; J — количество обобщенных напряжений Q_j и скоростей деформаций q_j (в рассматриваемом случае осесимметричного деформирования полотна искривленного диска без его скручивания пространство мембранных усилий и изгибающих моментов имеет размерность $J=4$).

Условие (2.13) формализует принцип максимума Мизеса [17–19]: мощность “ассоциированных” обобщенных напряжений Q_j на соответствующих скоростях обобщенных деформаций q_j

$$\left(D \equiv \sum_{j=1}^J Q_j q_j \right)$$

не меньше мощности любого не “ассоциированного” обобщенного напряжения $Q_{j,n}$ на скоростях обобщенных деформаций q_j .

Согласно формуле (2.13), прежде чем решать задачу об определении верхней границы несущей способности вращающегося искривленного КМ-диска,

необходимо рассчитать кусочно-линейную поверхность текучести его композиции в обобщенных напряжениях: мембранных усилиях и изгибающих моментах. Как показано в работе [27], даже в случае цилиндрической однородной, осесимметрично деформируемой оболочки из разносопротивляющегося жесткопластического материала поверхность текучести в четырехмерном пространстве мембранных усилий и изгибающих моментов получается очень сложной и являются кусочно-гладкой (а не строго кусочно-линейной, как требует этого применение неравенства (2.13)) даже в тех случаях, когда исходная поверхность текучести материала оболочки в обычных напряжениях является кусочно-линейной. Еще большие трудности возникают при построении аналогичных поверхностей текучести в обобщенных напряжениях для тонкостенных КМ-конструкций, поэтому для решения этой проблемы в работе [28] была использована упрощенная — двуслойная модель армированной оболочки. Однако даже при использовании и такого упрощения поверхность текучести в обобщенных напряжениях для изгибаемой КМ-оболочки получается опять же кусочно-гладкой (а не кусочно-линейной) и очень сложной.

Учитывая все вышесказанное, при разработке численного алгоритма решения рассматриваемой задачи на условный экстремум имеет смысл сразу ориентироваться на двуслойную модель КМ-оболочки, что позволяет избежать построения ее сложной поверхности текучести в пространстве обобщенных напряжений Q_j ($j = \overline{1, J}$). Можно использовать и более сложную M -слойную модель тонкостенной конструкции ($M \geq 3$). Однако расчеты, проведенные в работе [17], показывают, что с практической точки зрения уточнение верхней границы несущей способности таких элементов конструкций при $M \geq 3$ пренебрежимо мало по сравнению со случаем $M = 2$, но порождает при этом существенные вычислительные трудности.

В рамках двуслойной модели оболочки считаем, что в трансверсальном направлении она состоит из двух фиктивных слоев равной толщины h , причем расстояние между срединными поверхностями этих слоев также равно h (см. рис. 1а). Наружный слой обозначим как “1”, а внутренний — “2”. При этом принято, что напряженное состояние в каждом слое приближенно соответствует ПНС и однородно в поперечном направлении. Тогда мощность диссипации механической энергии D (см. (2.12)) равна сумме мощностей диссипаций для двух рассматриваемых слоев [7, 17–22]:

$$D = D^{(1)} + D^{(2)}, \quad (2.14)$$

$$D^{(m)} = h[\sigma_1^{(m)}(\xi_1^0 - (-1)^m h\kappa_1/2) + \sigma_2^{(m)}(\xi_2^0 - (-1)^m h\kappa_2/2)], \quad m = 1, 2,$$

где $\sigma_1^{(m)}$ и $\sigma_2^{(m)}$ — главные напряжения в композиции m -го слоя; ξ_1^0 и ξ_2^0 — скорости мембранных деформаций оболочки в меридиональном и окружном направлениях соответственно; κ_1 и κ_2 — скорости изменения главных кривизн срединной поверхности полотна диска в тех же направлениях; верхний индекс в скобках — номер слоя. В случае конструктивного исполнения диска типа 1 (см. (2.1)) величины ξ_1^0 , ξ_2^0 , κ_1 , κ_2 и v_r , ϑ (см. (2.9)) выражаются через v_1 и v_3 по формулам [7, 20]:

$$\begin{aligned}\xi_1^0(r) &= v_1'(r) \sin \alpha, \quad \xi_2^0(r) = [v_1(r) \sin \alpha + v_3(r) \cos \alpha] / r, \quad \kappa_1(r) = -v_3''(r) \sin^2 \alpha, \\ \kappa_2(r) &= -v_3'(r) \sin^2 \alpha / r, \quad v_r(r) = v_1(r) \sin \alpha + v_3(r) \cos \alpha, \quad \vartheta(r) = -v_3'(r) \sin \alpha, \quad (2.15) \\ r_0 &\leq r \leq r_1;\end{aligned}$$

в случае же диска типа 2 (см. (2.2)) [20]

$$\begin{aligned}\xi_1^0(\theta) &= (v_1'(\theta) + v_3(\theta)) / R_1, \quad \xi_2^0(\theta) = (v_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta + v_3(\theta)) / R_2, \\ \kappa_1(\theta) &= -(v_3''(\theta) - v_1'(\theta)) / R_1^2 - g_1(\theta) (v_3'(\theta) - v_1(\theta)) / (R_1 R_2), \quad (2.16) \\ \kappa_2(\theta) &= -\operatorname{ctg} \theta (v_3'(\theta) - v_1(\theta)) / (R_1 R_2), \quad g_1(\theta) = 1.5 \beta \sin 2\theta, \\ v_r(\theta) &= v_1(\theta) \sin \theta + v_3(\theta) \cos \theta, \quad \vartheta(\theta) = -(v_3'(\theta) - v_1(\theta)) / R_1, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,\end{aligned}$$

где штрих – производная по указанному аргументу.

Таким образом, в рамках двухслойной модели задача определения верхней границы предельной угловой скорости вращения искривленного диска типа 1 (см. (2.1), (2.7)–(2.10) и (2.12)–(2.15)) формулируется как нахождение минимума параметра нагрузки ω_m^2 по кинематически допустимым скоростям

$$\omega_m^2 = \min_{v_1, v_3} 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \left(D^{(1)}(r) + D^{(2)}(r) \right) \frac{r}{\sin \alpha} dr \quad (2.17)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}2\pi r_1 \left[\bar{F}_r (v_1 \sin \alpha + v_3 \cos \alpha) - \bar{M}_O v_3' \sin \alpha \right] \Big|_{r=r_1} + \\ + 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \left(\bar{f}_1(r) v_1(r) + \bar{f}_3(r) v_3(r) \right) \frac{r}{\sin \alpha} dr = 1; \quad (2.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{(m)} \geq 0, \quad D^{(m)} \geq h \left\{ \sigma_{1,n}^{(m)} \left[v_1' + 0.5(-1)^m h v_3'' \sin \alpha \right] \sin \alpha + \right. \\ \left. + \sigma_{2,n}^{(m)} \left[v_1 \sin \alpha + v_3 \cos \alpha + 0.5(-1)^m h v_3' \sin^2 \alpha \right] / r \right\}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (2.19) \\ m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad v_j = v_j(r), \quad j = 1, 3,\end{aligned}$$

где $\sigma_{i,n}^{(m)}$ – значение напряжения $\sigma_i^{(m)}$ ($i = 1, 2$) в n -й угловой точке кусочно-линейной кривой текучести композиции полотна диска в m -м слое при ПНС (эти величины определены в разд. 3); N – количество угловых точек этой кривой (см. разд. 3); \bar{f}_1 и \bar{f}_3 имеют выражения (2.10) при учете (2.7).

Так как полотно диска (оболочка) на внутренней кромке ($r = r_0$) жестко соединено с недеформируемым валом или ступицей (см. рис. 1), то для скоростей перемещений имеем следующие кинематические граничные условия – дополнительные ограничения-равенства [7, 20]:

$$v_1(r_0) = v_3(r_0) = 0, \quad v_3'(r_0) = 0. \quad (2.20)$$

В случае искривленного вращающегося диска типа 2 из (2.9), (2.12) и (2.13) при учете (2.2) вместо соотношений (2.17)–(2.19) получаем [7, 20, 21]:

$$\omega_m^2 = \min_{v_1, v_3} 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} (D^{(1)}(\theta) + D^{(2)}(\theta)) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.21)$$

$$2\pi R_2(\theta_1) \sin \theta_1 \left[\bar{F}_r(v_1(\theta) \sin \theta + v_3(\theta) \cos \theta) - \bar{M}_O(v'_3(\theta) - v_1(\theta)) / R_1(\theta) \right] \Big|_{\theta=\theta_1} + \\ + 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\bar{f}_1(\theta) v_1(\theta) + \bar{f}_3(\theta) v_3(\theta)) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta = 1, \quad (2.22)$$

$$D^{(m)} \geq 0, \quad D^{(m)} \geq h \left\{ \sigma_{1,n}^{(m)} \left[v'_1 + v_3 + 0,5(-1)^m h((v''_3 - v'_1) / R_1(\theta) + g_1(\theta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (v'_3 - v_1) / R_2(\theta)) \right] / R_1(\theta) + \right. \\ \left. + \sigma_{2,n}^{(m)} \left[v_1 \operatorname{ctg} \theta + v_3 + 0,5(-1)^m h \operatorname{ctg} \theta (v'_3 - v_1) / R_1(\theta) \right] / R_2(\theta) \right\}, \quad (2.23)$$

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad m=1, 2, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad v_j = v_j(\theta), \quad j=1, 3,$$

где \bar{f}_1 и \bar{f}_3 определяются по формулам (2.11) при учете (2.7); остальные величины имеют прежний смысл. К соотношениям (2.21)–(2.23) необходимо добавить граничные условия (2.20), в которых r_0 нужно заменить на θ_0 . Эти граничные условия при учете выражений (2.15) и (2.16) были фактически уже использованы при записи левых частей в равенствах (2.9), (2.18) и (2.22). Соотношения же (2.19) и (2.23) эквивалентны неравенствам (2.13).

3. Кривые текучести композиций армированных слоев при ПНС. Для определения значений осредненных напряжений $\sigma_{1,n}^{(m)}$ и $\sigma_{2,n}^{(m)}$ ($m=1, 2, 1 \leq n \leq N$) в соотношениях (2.19) и (2.23) необходимо предварительно построить кривые текучести композиции армированного полотна диска (оболочки). Согласно используемой двуслойной модели оболочки, в каждом из ее фиктивных слоев приблизительно реализуется ПНС, однородное в поперечном направлении, причем, как уже подчеркивалось выше, напряжения в меридиональном и окружном направлениях (в связующем материале и в композиции) являются главными для рассматриваемых типов нагружения и закрепления вращающегося диска, а также его вариантов армирования.

В силу однородности структур армирования по толщине полотна диска в обоих его фиктивных слоях кривые текучести композиции совпадают. На основании этого далее в настоящем разделе (в отличие от (2.19) и (2.23)) не будем указывать верхний индекс (m), соответствующий номеру слоя.

В случаях, когда кривые текучести всех материалов композиции при ПНС кусочно-линейны (рис. 3), кривые текучести армированного материала можно рассчитать по структурным формулам из работы [29]. Однако расчетная кусочно-линейная кривая текучести композиции задается при этом параметрически в неявном виде. Это порождает определенные (хотя и не принципиальные) трудности вычисления координат ее угловых точек. Поэтому воспользуемся упрощенным вариантом структурной модели из [29], который позволяет получить координаты угловых точек на кривой текучести композиции в явном виде [21, 22]. Так как материал связующей матрицы по предположению может обладать цилиндрической анизотропией, обозначим через

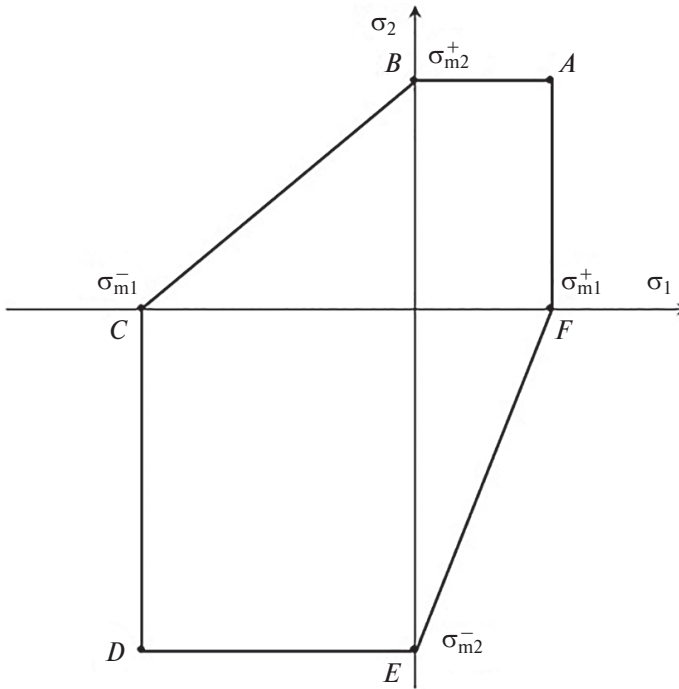


Рис. 3. Кривая текучести материала связующего полотна диска.

$\sigma_{mj}^{\pm} > 0$ его пределы текучести при растяжении (+) и сжатии (–) в меридиональном ($j=1$) и окружном ($j=2$) направлениях. При этом считаем, что кусочно-линейная кривая текучести $ABCDEF$ связующего материала при ПНС соответствует модифицированному критерию Треска [26] (см. рис. 3); в случае $\sigma_{m1}^+ = \sigma_{m2}^+$ и $\sigma_{m1}^- = \sigma_{m2}^-$ получаем критерий текучести Ху [25] для изотропного материала связующего, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, а при $\sigma_{m1}^+ = \sigma_{m2}^+ = \sigma_{m1}^- = \sigma_{m2}^-$ – критерий текучести Треска [17–19]. Пределы же текучести изотропного материала волокон k -го семейства при растяжении и сжатии обозначим $\sigma_{[k]}^+$ и $\sigma_{[k]}^-$ соответственно ($\sigma_{[k]}^{\pm} > 0$, $k=1, 2$).

Первый вариант армирования. Как уже отмечалось выше, в этом случае (см. рис. 2а и б) имеем $\psi_2 = -\psi_1$, $\mu_2 = \mu_1$ и $\sigma_{[2]}^+ = \sigma_{[1]}^+$. Кривая текучести композиции при такой структуре армирования представляет собой восьмиугольник ($N=8$ $ABCDEFGH$ (см. рис. 4б в [22]), вершины которого имеют следующие координаты [21, 22]:

$$A: \sigma_1 \equiv \sigma_{1,1} = \bar{\sigma}_{f1}^+ + \bar{\sigma}_{m1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,1} = \bar{\sigma}_{f2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+,$$

$$B: \sigma_1 \equiv \sigma_{1,2} = \bar{\sigma}_{f1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,2} = \bar{\sigma}_{f2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+,$$

$$C: \begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_{1,3} = -\bar{\sigma}_{f1}^-, & \sigma_2 \equiv \sigma_{2,3} = -\bar{\sigma}_{f2}^- + \bar{\sigma}_{m2}^+ \quad (\bar{\sigma}_{f2}^- / \bar{\sigma}_{f1}^- \leq \bar{\sigma}_{m2}^+ / \bar{\sigma}_{m1}^-), \\ \sigma_1 \equiv \sigma_{1,3} = \bar{\sigma}_{f1}^+ - \bar{\sigma}_{m1}^-, & \sigma_2 \equiv \sigma_{2,3} = \bar{\sigma}_{f2}^+ \quad (\bar{\sigma}_{f2}^- / \bar{\sigma}_{f1}^- > \bar{\sigma}_{m2}^+ / \bar{\sigma}_{m1}^-), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
D: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,4} = -\bar{\sigma}_{f1}^- - \bar{\sigma}_{m1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,4} = -\bar{\sigma}_{f2}^-, \\
E: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,5} = -\bar{\sigma}_{f1}^- - \bar{\sigma}_{m1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,5} = -\bar{\sigma}_{f2}^- - \bar{\sigma}_{m2}^-, \\
F: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,6} = -\bar{\sigma}_{f1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,6} = -\bar{\sigma}_{f2}^- - \bar{\sigma}_{m2}^-, \\
G: \begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_{1,7} = \bar{\sigma}_{f1}^+, & \sigma_2 \equiv \sigma_{2,7} = \bar{\sigma}_{f2}^+ - \bar{\sigma}_{m2}^- \quad (\bar{\sigma}_{f2}^+ / \bar{\sigma}_{f1}^- \leq \bar{\sigma}_{m2}^- / \bar{\sigma}_{m1}^+), \\ \sigma_1 \equiv \sigma_{1,7} = -\bar{\sigma}_{f1}^- + \bar{\sigma}_{m1}^+, & \sigma_2 \equiv \sigma_{2,7} = -\bar{\sigma}_{f2}^- \quad (\bar{\sigma}_{f2}^+ / \bar{\sigma}_{f1}^- > \bar{\sigma}_{m2}^- / \bar{\sigma}_{m1}^+), \end{cases} \\
H: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,8} = \bar{\sigma}_{f1}^+ + \bar{\sigma}_{m1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,8} = \bar{\sigma}_{f2}^+,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\bar{\sigma}_{ff}^\pm \equiv 2\sigma_{[1]}^\pm \mu_1 l_{1j}^2, \quad \bar{\sigma}_{mj}^\pm \equiv (1 - 2\mu_1 l_{1j}^2) \sigma_{mj}^\pm \quad (j=1, 2), \quad l_{11} = \cos \psi_1, \quad l_{12} = \sin \psi_1; \tag{3.2}$$

плотность армирования μ_1 задается соотношением (2.4) или (2.5) при $k=1$.

Второй вариант армирования. Согласно результатам работы [22], в случае меридионально-окружной структуры армирования полотна диска (см. рис. 2в) кривая текучести композиции представляют собой шестиугольник ($N=6$) $ABCDEF$ (см. рис. 4а в [22]), вершины которого имеют координаты [22]:

$$\begin{aligned}
A: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,1} = \bar{\sigma}_{f1}^+ + \bar{\sigma}_{m1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,1} = \bar{\sigma}_{f2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+, \\
B: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,2} = -\bar{\sigma}_{f1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,2} = \bar{\sigma}_{f2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+, \\
C: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,3} = -\bar{\sigma}_{f1}^- - \bar{\sigma}_{m1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,3} = \bar{\sigma}_{f2}^+, \\
D: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,4} = -\bar{\sigma}_{f1}^- - \bar{\sigma}_{m1}^-, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,4} = -\bar{\sigma}_{f2}^- - \bar{\sigma}_{m2}^-, \\
E: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,5} = \bar{\sigma}_{f1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,5} = -\bar{\sigma}_{f2}^- - \bar{\sigma}_{m2}^-, \\
F: \sigma_1 &\equiv \sigma_{1,6} = \bar{\sigma}_{f1}^+ + \bar{\sigma}_{m1}^+, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,6} = -\bar{\sigma}_{f2}^-,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\bar{\sigma}_{mj}^\pm \equiv (1 - \mu_j) \sigma_{mj}^\pm, \quad \bar{\sigma}_{lj}^\pm \equiv \sigma_{lj}^\pm \mu_j, \quad j=1, 2, \tag{3.4}$$

интенсивность армирования μ_1 определяется по формуле (2.4) или (2.5) при учете $\psi_1=0$ ($k=1$), а функцию μ_2 можно задавать достаточно произвольно, лишь удовлетворяя неравенствам (2.6); пределы текучести волокон разных семейств могут быть различны ($\sigma_{[2]}^\pm \neq \sigma_{[1]}^\pm$).

Таким образом, выражения (3.1) и (3.3) при учете соотношений (2.4)–(2.6), (3.2) и (3.4) в явном виде определяют значения напряжений $\sigma_{1,n}$ и $\sigma_{2,n}$ ($1 \leq n \leq N$) в неравенствах (2.19) и (2.23) для двух рассматриваемых вариантов армирования полотна диска. Согласно формулам (3.2) и (3.4), значения $\sigma_{1,n}$ и $\sigma_{2,n}$ зависят от параметров армирования ψ_k и μ_k ($k=1, 2$), поэтому в случаях неоднородных структур армирования (что, как правило, и имеет место на практике) кривые текучести композиции будут различны в тех точках КМ-конструкции, в которых параметры армирования различаются.

4. Численные примеры и анализ результатов расчетов. Минимизация функционала (2.17) (или (2.21)) при ограничениях (2.18)–(2.20) (или (2.20), (2.22)

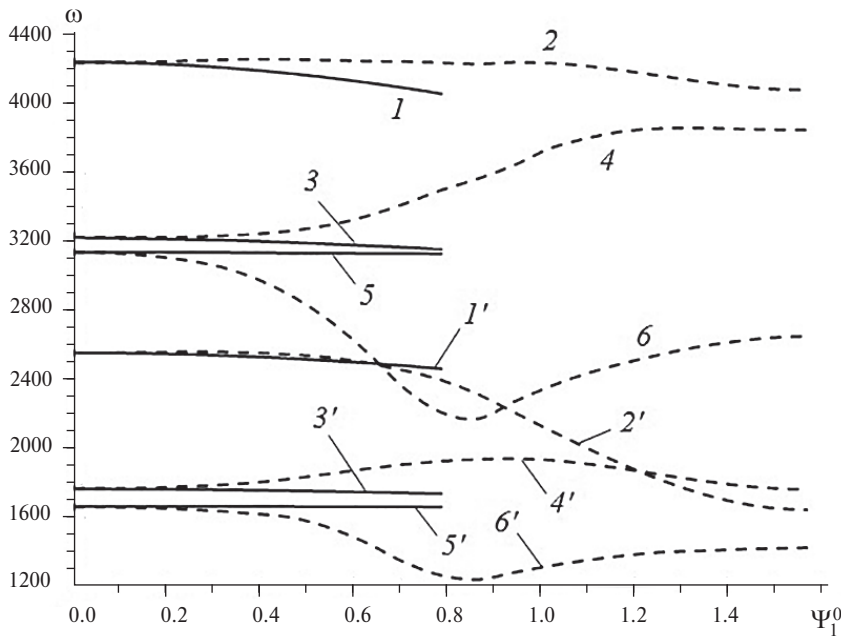


Рис. 4. Зависимость предельной угловой скорости вращения ω [рад/с] от угла армирования ψ_1^0 [рад] на внутренней кромке полотна диска.

и (2.23)) с учетом соотношений (3.1)–(3.4) выполнена численно методами линейного программирования. Для этого сформулированная экстремальная задача предварительно была дискретизирована. А именно: на отрезке $r \in [r_0, r_1]$ (или $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$) вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta = (r_1 - r_0)/(L - 1)$ (или $\Delta = (\theta_1 - \theta_0)/(L - 1)$), где L — количество узлов сетки. Интегралы в соотношениях (2.17) и (2.18) (или (2.21) и (2.22)) приближенно вычислялись с использованием формулы трапеций; производные по радиусу r (или углу θ) в формулах (2.18)–(2.20) (или (2.20), (2.22) и (2.23)) заменялись их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне, а вторые производные v_3'' в неравенствах (2.19) (или (2.23)) в крайних узлах сетки с номерами 1 и L аппроксимировались скошенными конечными разностями на четырехточечных шаблонах [30]. Производные v_3' и v_3'' во внутренних узлах сетки аппроксимировались центральными конечными разностями. Для корректного же предельного перехода от искривленных дисков к плоским (см. рис. 1 и (2.1) при $H \rightarrow 0$), согласно результатам работы [16], для аппроксимации производной v_1' в (2.19) (или (2.23)) во всех узлах сетки необходимо использовать скошенные конечные разности на трехточечном шаблоне. Такая дискретизация позволяет аппроксимировать сформулированную в разд. 2 задачу со вторым порядком точности по шагу Δ . Дискретизированная экстремальная задача (2.17)–(2.20) (или (2.20)–(2.23)) при учете выражений (3.1)–(3.4), как и в работе [16], решалась численно симплекс-методом Данцига [31].

Далее рассматриваются конические диски – типа 1 (см. (2.1) и рис. 1а) – и сферические диски – типа 2 (см. (2.2) при $\beta=0$), для которых справедливы выражения (см. рис. 1б) [22]

$$R_1 = R_2 = R_0 = \sqrt{r_1^2 + b^2} = \text{const}, \quad b = \frac{r_1^2 - r_0^2 - H^2}{2H} = \text{const}. \quad (4.1)$$

Как и в работах [14, 16], эти диски имеют характерные размеры $r_0=5$ см, $r_1=19.75$ см [1] и разную величину H , а лопатки – длину $l=11.4$ см [1] и толщину $h_*=5$ мм (см. формулы (2.8)). Полотно диска (оболочка) может быть однородно и изготовлено из изотропного магниевго сплава МА2 ($\sigma_{m1}^+=\sigma_{m2}^+=151$ МПа, $\sigma_{m1}^-=\sigma_{m2}^-=113$ МПа и $\rho_0=1740$ кг/м³ [6, 32]) или из стали марки 35ХГСНА ($\sigma_{m1}^+=\sigma_{m2}^+=1554$ МПа, $\sigma_{m1}^-=\sigma_{m2}^-=1754$ МПа и $\rho_0=7800$ кг/м³ [6, 32]), а также композитным, состоящим из магниевго связующего (сплава марки МА2) и усиленным двумя семействами углеродных волокон Торнел-400 ($\sigma_{[k]}^+=\sigma_{[k]}^-=2750$ МПа и $\rho_k=1780$ кг/м³, $k=1, 2$ [4, 6]). Лопатки же изготовлены из магниевго сплава МА2 и продольно армированы углеродными волокнами Торнел-400 с интенсивностью армирования $\mu_*=0.6$ (см. (2.8)). Согласно замечанию, для учета влияния разрезной замковой части обода диска в соотношениях (2.8) объемная плотность связующего лопатки искусственно увеличена и принята равной $\rho_0^*=2700$ кг/м³ (а не $\rho_0^*=1740$ кг/м³, как указано выше). Конструктивное исполнение разрезной замковой части обода предполагается таким, что $M_O=0$ (см. рис. 1а), т.е. в формулах (2.8) принято $a=0$.

В работе [14] аналитически было получено полное решение рассматриваемой задачи для плоских вращающихся дисков при втором варианте их армирования. В работе же [16] была продемонстрирована сходимость численного решения к аналитическому для таких плоских дисков. Предварительные расчеты, выполненные по формулам настоящего исследования для предельных случаев, когда в выражениях (2.1) и (4.1) $H \rightarrow 0$, т.е. когда искривленные диски вырождаются в плоские, показали, что предельные угловые скорости вращения искривленных дисков в этих вырожденных случаях с точностью порядка 1% совпадают с результатами, полученными в [16]. Наблюдаемое при этом незначительное различие результатов объясняется, по-видимому, накоплением ошибок округления. Действительно, в [16] использовалась модель однослойных, а не двуслойных дисков, в предельном состоянии которых от нуля отличалась только радиальная скорость v_1 ($v_3=0$). В настоящем же исследовании используется двуслойная модель диска (см. (2.14)), поэтому в его предельном состоянии от нуля отличны обе скорости v_1 и v_3 . Следовательно, согласно формулам данной работы, даже в предельных случаях ($H \rightarrow 0$) количество неизвестных при одинаковой степени дискретизации задачи (при одинаковых значениях L) здесь в два раза больше, чем в [16], а значит, размер матрицы симплекс-метода в 4 раза больше, чем в [16]. Вычислительные ошибки, накапливаемые в процессе реализации метода Данцига [31] для такой большой матрицы, и приводят к незначительному различию результатов, полученных по формулам работы [16] и по формулам настоящего исследования в предельных случаях, когда $H \rightarrow 0$. Следует отметить, что при таком сравнении в соотношениях (3.1) принималось $\alpha = \pi/2$ ($H=0$), а в равенствах

(4.1) задавалось $H = 10^{-7} r_1$. В последнем случае, строго говоря, $H \neq 0$, что также является причиной некоторого различия обсуждаемых выше результатов для искривленных дисков сферической формы.

Хорошее совпадение значений предельных угловых скоростей вращения искривленных дисков, полученных в предельном случае ($H \rightarrow 0$), с аналогичными величинами, определенными в работах [14, 16], позволяет доверительно относиться к обсуждаемым ниже результатам расчетов дисков конической и сферической формы.

Далее в настоящем исследовании, как и в работе [16], рассматриваются диски постоянной толщины ($2h = \text{const}$). Толщина полотна однородного изотропного плоского диска ($H = 0$) из магниевового сплава МА2 принимается равной $2h = 8$ мм. Масса полотна такого диска ($m_e = 1.596$ кг) считается эталонной. Толщину полотна $2h$ дисков из других материалов (в том числе и композитных) будем задавать так, чтобы их масса m , вычисляемая по формуле

$$m = \rho_0 (V_d - V_f) + \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2, \quad (4.2)$$

была равна эталонной ($m = m_e$). Здесь ρ_0 и ρ_k определены в (2.7); V_k ($k = 1, 2$) — объем арматуры k -го семейства; V_d — объем диска; V_f — общий объем арматуры в диске, определяемый так:

$$V_f = V_1 + V_2, \quad (4.3)$$

где в случае диска типа 1

$$V_d = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} 2h(r) \frac{r}{\sin \alpha} dr, \quad V_k = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} 2h(r) \mu_k(r) \frac{r}{\sin \alpha} dr, \quad k = 1, 2, \quad (4.4)$$

а в случае диска типа 2

$$V_d = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2h(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta, \quad V_k = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2h(\theta) \mu_k(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (4.5)$$

$$k = 1, 2.$$

Рассмотрим далее влияние параметров армирования (углов ψ_k и плотностей μ_k , $k = 1, 2$) на предельное значение угловой скорости вращения КМ-дисков.

4.1. Влияние углового армирования при фиксированном расходе волокон. В начале исследуем частный случай спирального армирования — армирование по геодезическим (в случае плоского диска — по прямолинейным) траекториям (см. рис. 26), так как этот тип армирования наиболее просто реализуется технологически [24, 33]. При этом в осесимметричном случае углы армирования $\psi_k(r)$ определяются по формуле Клеро [34]:

$$r \sin \psi_k(r) = r_0 \sin \psi_k^0 = \text{const} > 0, \quad k = 1, 2, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (4.6)$$

где угол ψ_k^0 определен в (2.4) и (2.5). В случае диска типа 2 в равенстве (4.6) радиус r необходимо выразить через угол θ по последней формуле (2.2).

Согласно соотношениям (2.4) (или (2.5)) при учете (4.6), плотность армирования μ_k при такой укладке волокон монотонно убывает при возрастании r , оставаясь положительной при $\psi_k^0 > 0$ ($k = 1, 2$). В случае задания $\mu_1^0 = \mu_2^0$ и $\psi_1^0 = -\psi_2^0$ из (2.4) (или (2.5)) и (4.6) получаем $\mu_1 \equiv \mu_2$ и $\psi_1 \equiv -\psi_2$. Так как плотности армирования μ_k при этом являются убывающими положительными функциями, то выполнение физического ограничения (2.6) достаточно проверять только на внутренней кромке полотна диска (оболочки) $r = r_0$ или $\theta = \theta_0$.

Для плоского диска ($H = 0$) с рассматриваемой структурой армирования при углах $\psi_1^0 = -\psi_2^0 = \pi/4$ — ортогональное армирование в окрестности внутренней кромки $r = r_0$ (именно этот случай изображен на рис. 2б) — примем $\mu_1^0 = \mu_2^0 = 0.35$. При этом выполняется физическое ограничение (2.6) во всех точках диска с предельным значением $\mu_m = 0.7$. Относительный объем арматуры в таком плоском диске $\Omega \equiv V_f/V_d = 0.2155$ (см. (4.3) и (4.4)). Как и в работе [16], это значение далее примем за эталонное ($\Omega_e = 0.2155$). Будем варьировать углы армирования $\psi_1^0 = -\psi_2^0$ в КМ-дисках в пределах $\psi_1^0 \in [0, \pi/4]$, а плотности армирования $\mu_1^0 = \mu_2^0$ при разных ψ_1^0 будем задавать так, чтобы относительный объем арматуры Ω , определенный с учетом соотношений (2.4), (2.5) и (4.3)—(4.6), был равен эталонному значению ($\Omega = \Omega_e$). Таким образом, далее сравнивается несущая способность вращающихся КМ-дисков, имеющих одинаковую массу $m = m_e$ (см. (4.2)) при одинаковом расходе арматуры ($\Omega = \Omega_e$). Для дисков с армированием по геодезическим траекториям (см. (4.6) и рис. 2б) углы армирования в диапазоне $\psi_1^0 \in (\pi/4, \pi/2)$ не рассматриваются, так как при этом нарушается физическое ограничение (2.6) при требовании выполнения условия $\Omega = \Omega_e$.

На рис. 4 изображены значения предельных угловых скоростей вращения дисков ω в зависимости от угла армирования ψ_1^0 на внутренних кромках $r = r_0$ или $\theta = \theta_0$. (На рис. 4–7 кривые, номера которых помечены штрихом, рассчитаны при учете наличия лопаток на внешней кромке (см. (2.8) и рис. 1а), а кривые с теми же номерами, но без штриха, получены при тех же условиях, но при отсутствии лопаток (см. рис. 1б): при $\bar{F}_r = 0$ в (2.8), (2.18) и (2.22).) Сплошные кривые с нечетными номерами на рис. 4 рассчитаны для рассматриваемого случая армирования дисков по геодезическим траекториям (см. рис. 2б). Кривые 1 и 1' получены для плоских дисков ($H = 0$); кривые 3 и 3' — для конических дисков при $H = 5$ мм (см. (2.1) и рис. 1а); кривые 5 и 5' — для сферических дисков также при $H = 5$ мм (см. (4.1) и рис. 1б). Согласно неравенству (2.3), полотно таких искривленных дисков — весьма пологие оболочки. Все указанные кривые монотонно убывают, поэтому из всех рассматриваемых структур армирования по геодезическим линиям наибольшую несущую способность обеспечивает армирование по меридиональным направлениям ($\psi_1^0 = -\psi_2^0 = 0$). Однако, как видно, эти кривые имеют малую изменяемость (особенно кривые 1', 3, 3', 5 и 5'), поэтому варьирование углов армирования $\psi_1^0 = -\psi_2^0$ незначительно влияет на изменение несущей способности дисков с рассматриваемым типом структуры армирования. Кривые 3 и 5 лежат существенно ниже кривой 1, аналогично кривые 3' и 5' лежат существенно ниже кривой 1'. Следовательно, даже незначительное искривление полотна диска (в данном случае $H/(r_1 - r_0) = 0.034 \ll 1/4$ (см. (2.3)) приводит к значительному

уменьшению его предельной угловой скорости вращения при армировании по геодезическим траекториям.

Рассмотрим другой вид армирования – армирование по логарифмическим спиралям: $\psi_1 = -\psi_2 = \psi_1^0$ (см. рис. 2а), тогда для диска типа 1 постоянной толщины из (2.4) следует выражение:

$$\mu_k(r) = r_0 \mu_k^0 / r, \quad k = 1, 2, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (4.7)$$

а для диска типа 2 из (2.5) при учете (4.1) получаем:

$$\mu_k(\theta) = \mu_k^0 \sin \theta_0 / \sin \theta, \quad k = 1, 2, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (4.8)$$

Из формул (4.7) и (4.8) видно, что плотности армирования μ_k не зависят от углов ψ_k^0 и монотонно убывают по r или θ (при $\theta_1 \leq \pi/2$). При $\mu_1^0 = \mu_2^0$ из (4.7) и (4.8) получаем $\mu_1 = \mu_2$. Следовательно, при расположении арматуры по логарифмическим спиралям и фиксированных значениях $\mu_1^0 = \mu_2^0$ при любых углах армирования $\psi_1^0 \in [0, \pi/2]$ общий расход волокон одинаков. Чтобы относительный объем арматуры в плоском диске был равен эталонному значению, следует задать $\mu_1^0 = \mu_2^0 = 0.2667$. В случае слабо искривленных дисков (пологих оболочек) для $\mu_1^0 = \mu_2^0$ приближенно можно принять это же значение.

Зависимости предельной скорости вращения ω КМ-дисков со структурой армирования по логарифмическим спиралям от угла армирования ψ_1^0 изображены на рис. 4 штриховыми линиями и имеют четные номера. Кривые 2 и 2', как и линии 1 и 1', рассчитаны для плоских дисков; кривые 4 и 4', как и линии 3 и 3', – для конических дисков ($H = 5$ мм); кривые 6 и 6', как и линии 5 и 5', – для сферических дисков ($H = 5$ мм). Левые участки сплошных кривых и штриховых линий с номерами, на единицу большими, чем у сплошных, визуально почти не различаются, а при $\psi_1^0 = 0$ (меридиональное армирование) совпадают. Все штриховые кривые ведут себя немонотонно и имеют значительную изменчивость по сравнению со сплошными линиями (за исключением кривой 2). Так, на кривой 2 локальный максимум достигается при $\psi_1^0 \approx \pi/8$, на кривой 2' – при $\psi_1^0 \approx \pi/10$, на кривой 4 – при $\psi_1^0 \approx 17\pi/40$, а на кривой 4' – при $\psi_1^0 \approx 3\pi/10$. Следовательно, наибольшую несущую способность плоским и коническим КМ-дискам обеспечивают именно спиральные структуры армирования. Правый участок кривой 4 лежит незначительно ниже кривой 2, т.е. при углах армирования по логарифмическим спиралям $\psi_1^0 \geq 1.2$ рад замена плоского диска без лопаток на аналогичный конический диск (по крайней мере, при $H = 5$ мм) не приводит к значительному уменьшению его предельной угловой скорости вращения.

Поведение кривых 4, 4', 6 и 6' на рис. 4 свидетельствует о том, что несущая способность искривленных вращающихся дисков существенно зависит от угла армирования по логарифмическим спиралям. Аналогичный вывод справедлив и для плоских КМ-дисков с лопатками (см. кривую 2').

Кривые 1'–6' рис. 4 лежат существенно ниже кривых 1–6 соответственно. Следовательно, наличие лопаток приводит к значительному уменьшению предельной угловой скорости вращения плоских и искривленных дисков, армированных как по геодезическим линиям, так и по логарифмическим спиралям.

4.2. *Влияние плотностей армирования при фиксированных углах укладки волокон.* Исследуем влияние плотностей армирования μ_k на значение предельной угловой скорости вращения КМ-дисков при фиксированных углах армирования ψ_k ($k = 1, 2$) в случае меридионально-окружной структуры (см. рис. 2в). В рассматриваемом осесимметричном случае армирование в меридиональном и окружном направлениях совпадает с армированием по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций в композиции. Такие структуры армирования традиционно принято считать рациональными [24]. Первое ($k = 1$) семейство волокон укладывается в меридиональном направлении ($\psi_1 \equiv 0$), плотность армирования μ_1 которого при $2h = \text{const}$ вычисляется по формуле (4.7) или (4.8). Второе ($k = 2$) семейство волокон наматывается в окружном направлении ($\psi_2 \equiv \pi/2$). Его плотность армирования μ_2 является произвольной функцией радиуса r или угла θ , если при этом выполняются ограничения (2.6).

Пусть s — длина дуги меридиана срединной поверхности, тогда для дисков типа 1 (конических) имеем (см. рис. 1а):

$$s \equiv s(r) = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (4.9)$$

а для дисков типа 2 (см. рис. 1б)

$$s \equiv s(\theta) = \int_0^\theta R_1(\tau) d\tau, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (4.10)$$

В частности, для сферического диска радиуса R_0 из (4.10) при учете (4.1) получаем:

$$s \equiv s(\theta) = R_0 \theta, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (4.11)$$

Для определенности считаем, что плотность армирования μ_2 линейно зависит от координаты s :

$$\begin{aligned} \mu_2(s) &= \frac{s-s_0}{s_1-s_0} \mu_2^1 + \frac{s_1-s}{s_1-s_0} \mu_2^0 \quad (s_0 \leq s \leq s_1), \\ s_0 &\equiv s(r_0), \quad s_1 \equiv s(r_1), \quad \mu_2^0 \equiv \mu_2(s_0), \quad \mu_2^1 \equiv \mu_2(s_1) \quad (r \rightleftharpoons \theta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

С целью дальнейшего обоснованного сравнения меридианально-окружного армирования со спиральным предполагаем, что условие одинакового относительного расхода арматуры имеет вид (см. (4.3)):

$$\frac{V_f}{V_d} \equiv \frac{V_1 + V_2}{V_d} = \Omega_e = 0.2155. \quad (4.13)$$

Для рассматриваемых конструкций $2h = \text{const}$, поэтому из (4.4) при учете (4.7), (4.9) и (4.12) для конических дисков получаем:

$$V_d = \frac{2\pi h}{\sin \alpha} (r_1^2 - r_0^2), \quad V_1 = \frac{4\pi h r_0}{\sin \alpha} (r_1 - r_0) \mu_1^0, \quad (4.14)$$

$$V_2 = \frac{4\pi h}{(r_1 - r_0)\sin\alpha} \left[\frac{\mu_2^0 - \mu_2^1}{3} (r_1^3 - r_0^3) + \frac{\mu_2^0 r_1 - \mu_2^1 r_0}{2} (r_1^2 - r_0^2) \right], \quad (4.15)$$

а в случае сферического диска, согласно (4.5), (4.8), (4.11) и (4.12), имеем:

$$V_d = 4\pi h R_0^2 A, \quad V_1 = 4\pi h R_0^2 \sin\theta_0 (\theta_1 - \theta_0) \mu_1^0, \quad A \equiv \cos\theta_0 - \cos\theta_1, \quad (4.16)$$

$$V_2 = \frac{4\pi h R_0^2}{\theta_1 - \theta_0} \left[A(\theta_1 \mu_2^0 - \theta_0 \mu_2^1) + B(\mu_2^1 - \mu_2^0) \right], \quad B \equiv \sin\theta_1 - \sin\theta_0 + A(\theta_1 - \theta_0). \quad (4.17)$$

Из равенства (4.15) для конического диска следует выражение

$$\mu_2^1 = \left(\frac{r_1^3 - r_0^3}{3} - r_0 \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \right)^{-1} \left[\frac{V_2 (r_1 - r_0) \sin\alpha}{4\pi h} + \left(\frac{r_1^3 - r_0^3}{3} - r_1 \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \right) \mu_2^0 \right], \quad (4.18)$$

где, согласно (4.13) и (4.14), справедлива зависимость

$$V_2 \equiv V_2(\mu_1^0) = \frac{2\pi h}{\sin\alpha} \left[\Omega_e (r_1^2 - r_0^2) - 2r_0 (r_1 - r_0) \mu_1^0 \right]. \quad (4.19)$$

Аналогично в случае сферического диска из (4.17) получаем:

$$\mu_2^1 = \frac{1}{B - A\theta_0} \left[\frac{V_2 (\theta_1 - \theta_0)}{4\pi h R_0^2} + (B - A\theta_1) \mu_2^0 \right], \quad (4.20)$$

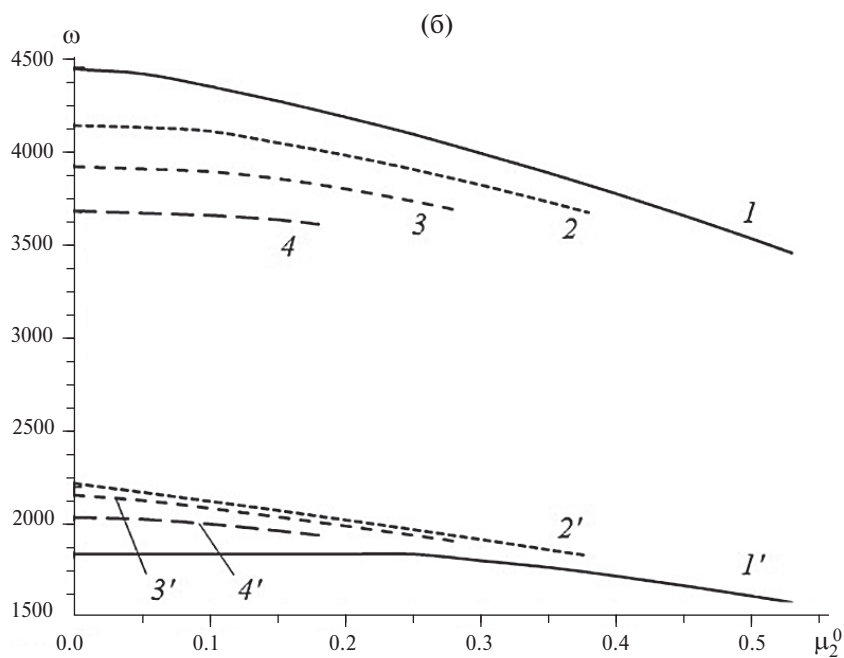
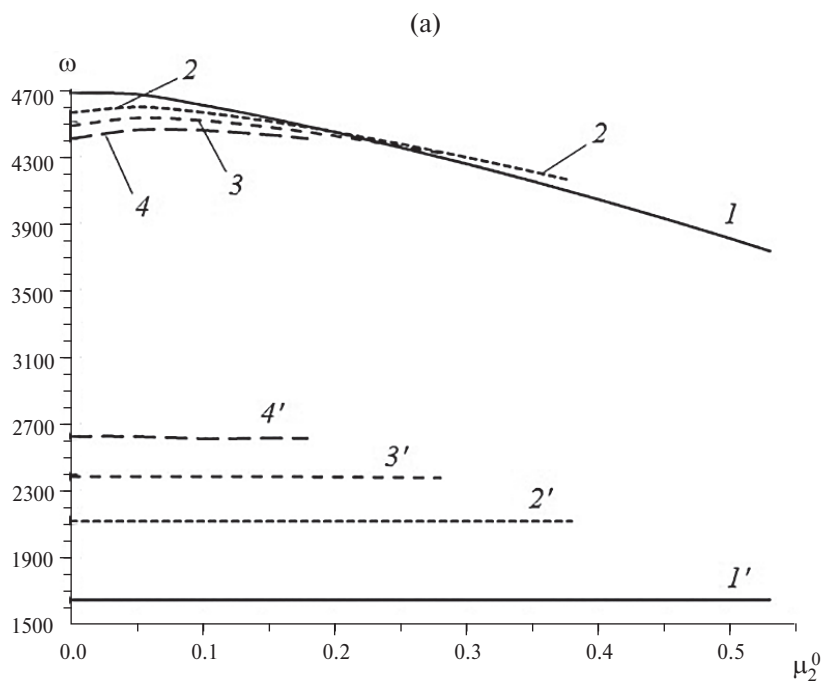
где, используя равенства (4.13) и (4.16), следует учесть, что

$$V_2 \equiv V_2(\mu_1^0) = 2\pi h R_0^2 \left[\Omega_e A - \sin\theta_0 (\theta_1 - \theta_0) \mu_1^0 \right]. \quad (4.21)$$

В соотношении (4.18) (или (4.20)) при учете (4.19) (или (4.21)) и известном значении Ω_e (см. (4.13)) параметры μ_1^0 и μ_2^0 можно варьировать, получая, согласно (4.7) и (4.9), (4.12) (или (4.8) и (4.11), (4.12)), разные распределения плотностей армирования. При этом необходимо учитывать ограничения (2.6) и $\mu_1^0 \geq 0$, $\mu_2^0 \geq 0$ и $\mu_2^1 \geq 0$.

Толщина $2h = \text{const}$ дисков с меридионально-окружной структурой армирования выбиралась такой же, как и в случае армирования по логарифмическим спиралям. Это обеспечивает одинаковую массу сравниваемым дискам и одинаковый общий расход арматуры в них.

На рис. 5 изображены зависимости $\omega(\mu_1^0)$, рассчитанные при некоторых значениях μ_1^0 для плоских дисков (рис. 5а), конических дисков при $H = 5$ мм (рис. 5б) и сферических дисков также при $H = 5$ мм (рис. 5в) с меридионально-окружными структурами армирования. Кривые 1 и 1' на рис. 5 получены при $\mu_1^0 = 0$ (окружное армирование), кривые 2 и 2' — при $\mu_1^0 = 0.15$, кривые 3 и 3' — при $\mu_1^0 = 0.25$, кривые 4 и 4' — при $\mu_1^0 = 0.35$. Кривые 2–4 и 2'–4' соответствуют меридионально-окружным структурам армирования с разным распределением плотностей армирования $\mu_k(r)$ или $\mu_k(\theta)$ ($k = 1, 2$). Линии 1'–4' на рис. 5а визуально практически не отличаются от горизонтальных прямых.



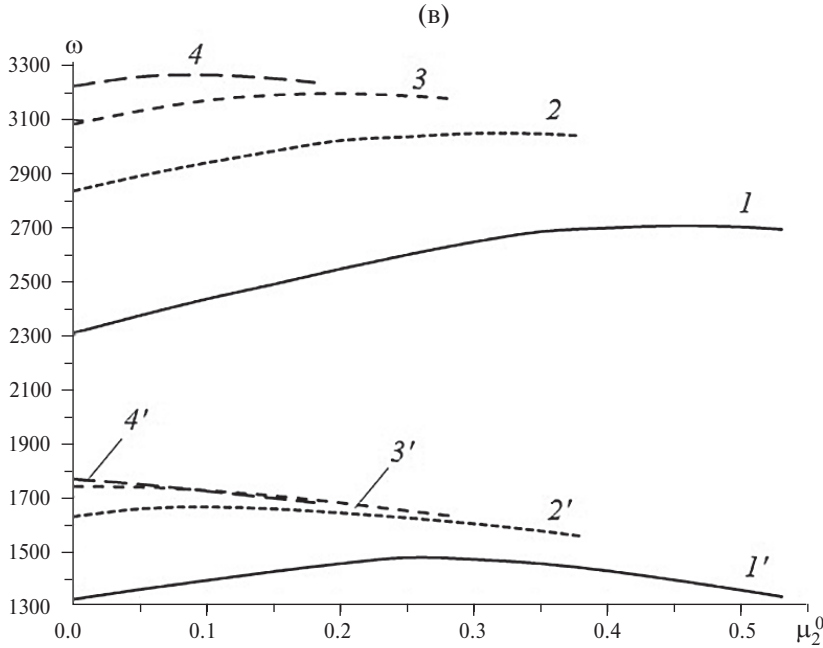


Рис. 5. Предельная угловая скорость вращения ω [рад/с] дисков с меридионально-окружной структурой армирования в зависимости от μ_2^0 (плотности окружного армирования при $r=r_0$ или $\theta=\theta_0$): (а) – плоский диск; (б) – конический диск ($H=5$ мм); (в) – сферический диск ($H=5$ мм).

Наименьшие значения ординат точек на этих кривых отличаются от наибольших значений (при $\mu_2^0=0$) менее чем на 1%.

Правые точки на всех кривых являются предельными, так как при соответствующих значениях μ_1^0 и μ_2^0 по формуле (4.18) или (4.20) с учетом (4.19) или (4.21) получается $\mu_2^1=0$. Дальнейшее увеличение значения μ_2^0 при фиксированном μ_1^0 приводит к $\mu_2^1<0$, что противоречит физическим ограничениям (2.6).

Поведение кривых на рис. 5 (за исключением кривых 1'–4' на рис. 5а) свидетельствует о том, что в случае меридионально-окружного армирования зависимость предельно допустимой угловой скорости вращения ω рассматриваемых дисков от плотностей армирования на внутренней кромке μ_1^0 и μ_2^0 является достаточно сложной. Однако видно, что

$$\max_{\mu_1^0, \mu_2^0} \omega(\mu_1^0, \mu_2^0) = \max_{\mu_1^0} \omega(\mu_1^0, 0) \quad (4.22)$$

(см. кривые 1 и 4' на рис. 5а, кривые 1 и 2' на рис. 5б и кривую 4' на рис. 5в) или

$$\max_{\mu_1^0, \mu_2^0} \omega(\mu_1^0, \mu_2^0) \approx \max_{\mu_1^0} \omega(\mu_1^0, 0) \quad (4.23)$$

(см. кривую 4 на рис. 5с).

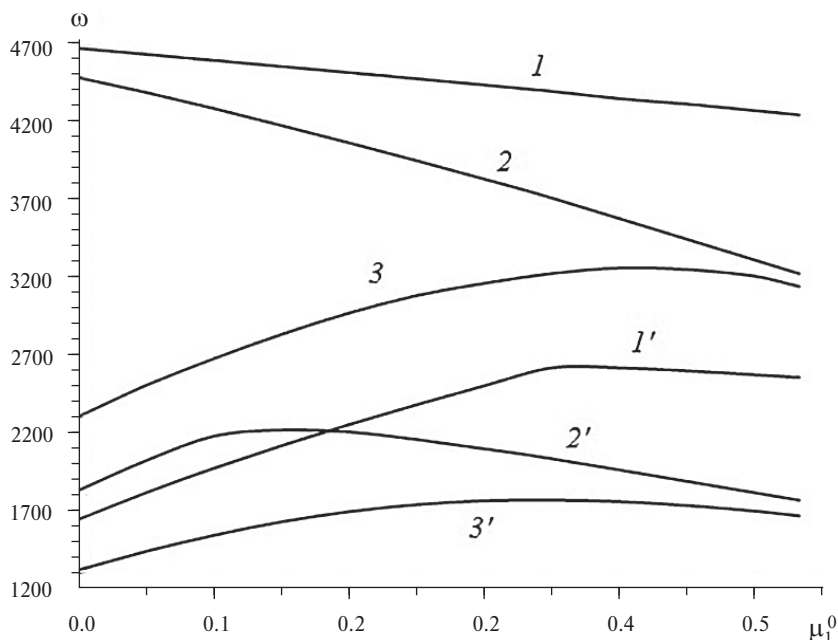


Рис. 6. Предельная угловая скорость вращения ω [рад/с] дисков с меридиально-окружной структурой армирования при $\mu_2^0 = 0$ в зависимости от μ_1^0 (μ_1^0 и μ_2^0 плотности армирования меридиональным и окружным семействами волокон при $r = r_0$ или $\theta = \theta_0$).

Таким образом, согласно соотношениям (4.22) и (4.23), максимальное значение зависимости $\omega(\mu_1^0, 0)$ позволяет определить максимальную (или близкую к ней) угловую скорость вращения дисков на всем множестве рассматриваемых структур армирования с меридиально-окружной укладкой волокон. Поэтому на рис. 6 изображены зависимости $\omega(\mu_1^0)$, полученные на основании (4.22) и (4.23) при $\mu_2^0 = 0$. Кривые 1 и 1' соответствуют плоскому диску, кривые 2 и 2' — коническому диску, кривые 3 и 3' — сферическому диску. Правым точкам всех кривых на рис. 6 ($\mu_1^0 \approx 0.533$) соответствует вырожденный случай — меридианальное армирование полотна дисков ($\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \equiv 0$). При $\mu_1^0 > 0.533$ относительный объем арматуры в дисках Ω будет превышать эталонное значение Ω_e (см. (4.13)), если дополнительно потребовать $\mu_2 \equiv 0$, либо, согласно (4.18) и (4.19) (или (4.20) и (4.21)) при соблюдении условия (4.13), получается $\mu_2^1 < 0$, что недопустимо в силу выполнения физических неравенств (2.6). Поэтому на интервале $0.533 < \mu_1^0 \leq 0.7 = \mu_m$ кривые на рис. 6 не изображены.

Абсциссы точек максимумов на кривых рис. 6 определяют рациональные параметры μ_1^0 и $\mu_2^0 = 0$ меридиально-окружного армирования соответствующих дисков, при которых несущая способность рассматриваемых конструкций является наибольшей или близка к ней (последнее относится к кривой 3 на рис. 6). Кривые 1 и 2 на рис. 6 являются убывающими, т.е. их максимум достигается при $\mu_1^0 = 0$. Поэтому для плоских и конических (по крайней мере при $H = 5$ мм) дисков без лопаток рациональной является окружная структура армирования с распределением плотности армирования $\mu_2(s)$, определяемой

по формуле (4.12) при учете (4.18), (4.19) и $\mu_2^0 = 0$ (в случае плоского диска $\alpha = \pi/2$).

Ординаты точек максимумов на кривых 1 и 1' на рис. 6 больше ординат аналогичных точек на кривых 2 и 1', 2' на рис. 4 (плоские диски); ординаты таких же точек на кривых 2 и 2' на рис. 6 также больше ординат точек максимумов на кривых 3, 4 и 3', 4' на рис. 4 (конические диски); аналогично, и ординаты точек максимумов на кривых 3 и 3' на рис. 6 больше ординат таких же точек на кривых 5, 6 и 5', 6' на рис. 4 (сферические диски). Следовательно, диски с меридионально-окружной структурой армирования (рис. 6) при рациональных значениях параметров армирования μ_1^0 и μ_2^0 имеют большую предельную угловую скорость вращения, чем диски с рассмотренными спиральными структурами армирования (рис. 4) той же массы и с тем же расходом арматуры.

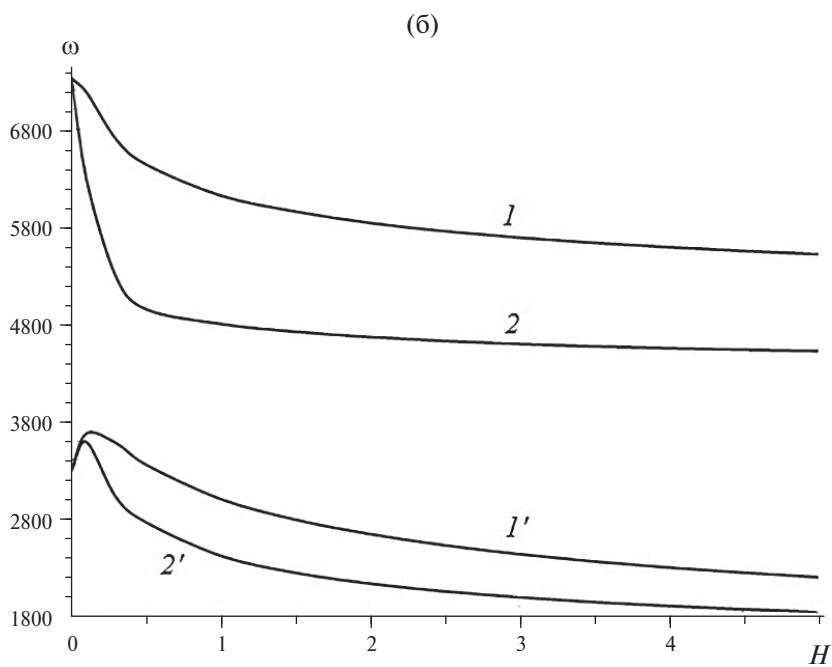
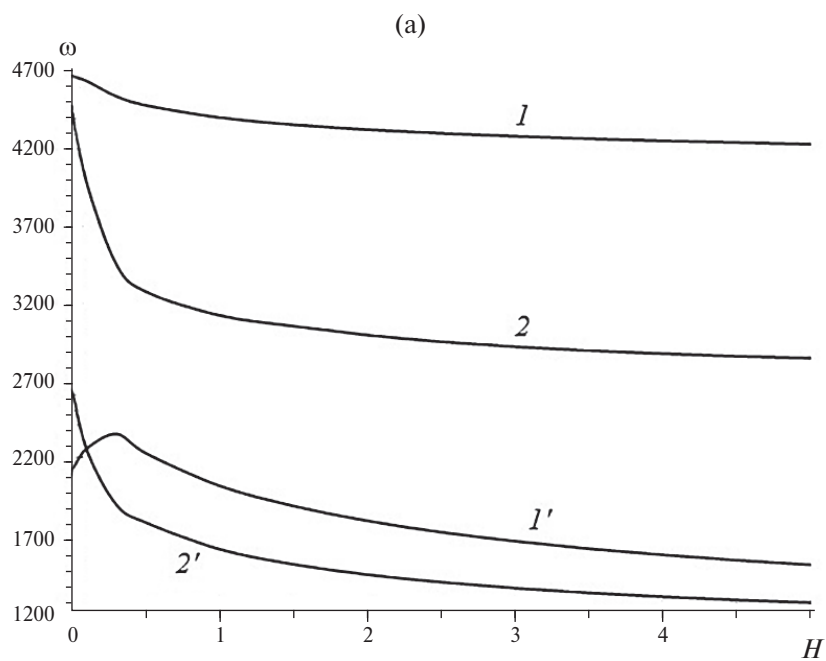
Ординаты точек максимумов на кривых 2, 3 и 2', 3' на рис. 6 (искривленные диски) меньше ординат точек на кривых 1 и 1' (плоские диски). А значит, несущая способность искривленных дисков с меридионально-окружной структурой армирования, как и в случае спирального армирования, меньше, чем у плоских дисков.

4.3. Влияние степени искривления вращающихся дисков на их несущую способность. Выше рассматривались конические и сферические диски с малой степенью искривленности ($H = 5$ мм, $H/(r_1 - r_0) \approx 0.034 \ll 1/4$ (см. (2.3)), т.е. весьма пологие оболочки. Как видно из предыдущего, даже столь малое искривление полотна вращающегося диска может приводить к значительному уменьшению его несущей способности. В связи с этим целесообразно проследить за изменением предельной угловой скорости вращения искривленных дисков в зависимости от изменения величины H (см. рис. 1).

На рис. 7 изображены указанные зависимости $\omega(H)$ для дисков с меридионально-окружной структурой армирования при эталонном значении относительного расхода арматуры $\Omega = \Omega_e = 0.2155$ (рис. 7а) и при $\Omega = 0.7$ (рис. 7б), а также для изотропных однородных дисков (рис. 7в). Кривые 1, 1', 3 и 3' на рис. 7 соответствуют коническим дискам (см. (2.1) и рис. 1а), кривые 2 и 2' – сферическим дискам (см. (2.2) и (4.1)). Кривые 1 и 2 на рис. 7а рассчитаны при $\mu_2^0 = 0$ и тех значениях μ_1^0 , при которых на кривых 2 и 3 на рис. 6, соответственно, достигается максимум. Аналогично, кривые 1' и 2' на рис. 7а получены при $\mu_2^0 = 0$ и таких значениях μ_1^0 , при которых на кривых 2' и 3' на рис. 6, соответственно, реализуется максимум. Ординаты точек кривых 1, 2 и 1', 2' на рис. 7а при $H = 0$ (плоские диски) различаются, потому что кривые 1, 1' и 2, 2' рассчитаны при разных структурах армирования.

До сих пор в данной работе исследовалось предельное состояние вращающихся дисков с фиксированным относительным объемом арматуры Ω в них, равным эталонному значению Ω_e (см. (4.13)). Рассмотрим теперь КМ-диски, в которых это условие не используется. Структура армирования дисков по-прежнему предполагается меридионально-окружной. Плотность армирования меридиональным семейством μ_1 задается формулой (4.7) или (4.8) при $k = 1$, а плотность армирования окружным семейством определяется соотношением:

$$\mu_2(r) = \mu_1^0 - \mu_1(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (r \neq \theta). \quad (4.24)$$



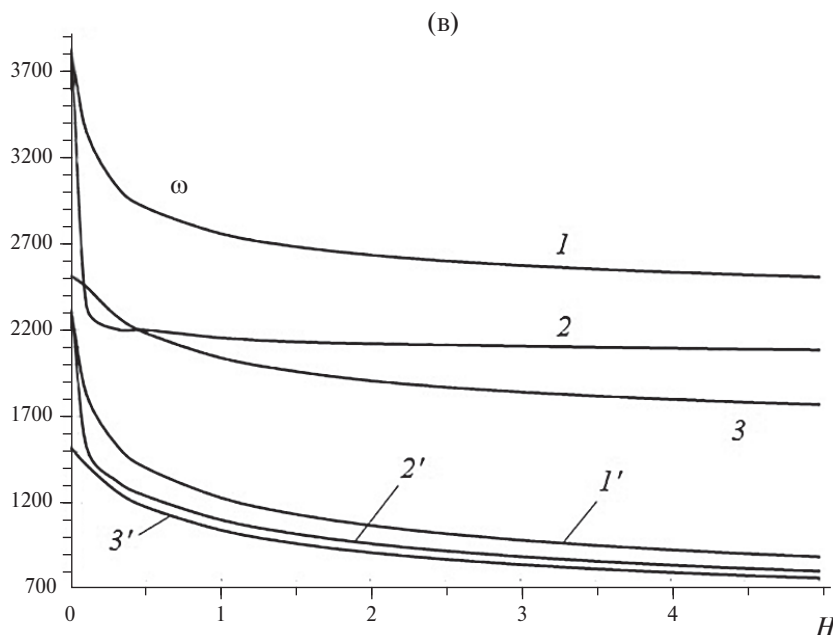


Рис. 7. Предельная угловая скорость вращения дисков ω [рад/с] в зависимости от осевого расстояния между внутренней и внешней кромками полотна диска H [см]: (а) — КМ-диски с меридионально-окружной структурой при эталонном значении относительного расхода арматуры ($\Omega = \Omega_e = 0.2155$); (б) — КМ-диски с меридионально-окружной структурой при значении относительного расхода арматуры $\Omega = 0.7$; (в) — однородные изотропные диски.

При этом суммарная плотность армирования

$$\mu_{\Sigma} \equiv \mu_1(r) + \mu_2(r) = \mu_1^0, \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (r \neq \theta) \quad (4.25)$$

постоянна и равна μ_1^0 (см. (4.7) или (4.8)). При $\mu_1^0 = 0$ получается изотропный диск из сплава МА2. Для каждого значения $\mu_1^0 \in [0, 0.7]$ постоянная толщина полотна диска $2h$ по-прежнему задается такой, чтобы масса КМ-диска была равна эталонному значению $m_e = 1.596$ кг (см. начало разд. 4).

Предварительные расчеты показали, что при выполнении равенств (4.24) и (4.25) зависимости $\omega(\mu_1^0)$ для всех рассматриваемых дисков (плоских, конических и сферических; с лопатками и без лопаток) являются монотонно возрастающими, поэтому наибольшей несущей способностью обладают диски с рассматриваемыми структурами армирования при $\mu_1^0 = \mu_m = 0.7$. В связи с этим на рис. 7б изображены зависимости $\omega(H)$, рассчитанные для таких КМ-дисков именно при значении $\mu_1^0 = 0.7$. В отличие от рис. 7а, на рис. 7б ординаты точек кривых 1, 2 и 1', 2' при $H = 0$ (плоские диски) совпадают, так как рассчитаны при одних и тех же структурах армирования (см. (4.24) и (4.25) при $\mu_1^0 = 0.7$). Кривые 1' на рис. 7а и 1', 2' на рис. 7б ведут себя немонотонно, остальные же кривые на рис. 7 монотонно убывают. Это означает, что в случае конического диска с лопатками при эталонном относительном расходе арматуры $\Omega = \Omega_e$

(кривая $1'$ на рис. 7а), а также в случаях конического и сферического дисков с лопатками при относительном расходе волокон $\Omega=0.7$ (кривые $1'$ и $2'$ на рис. 7б) за счет незначительного искривления полотна КМ-дисков можно увеличить их предельную угловую скорость вращения по сравнению с аналогичными плоскими дисками (ср. ординаты точек максимумов на указанных кривых с ординатами точек при $H=0$).

Кривые, изображенные на рис. 7б, лежат существенно выше аналогичных кривых, изображенных на рис. 7а. Следовательно, для достижения наибольшего допустимого значения угловой скорости вращения КМ-дисков их целесообразно армировать по меридионально-окружным направлениям с использованием формул (4.24) и (4.25) при учете (4.7) или (4.8) и $\mu_1^0 = \mu_m$. Однако при этом в дисках со структурами армирования, обладающими свойствами (4.24) и (4.25), при $\mu_1^0 = 0.7$ относительное объемное содержание волокон при $\Omega = 0.7$, что в 3.25 раза больше, чем в КМ-дисках с эталонным значением $\Omega = \Omega_e$ (см. (4.13)).

На рис. 7в для сравнения изображены зависимости $\omega(H)$, рассчитанные для изотропных однородных дисков. Кривые 1 , $1'$ и 2 , $2'$ получены для конических и сферических дисков из стали марки 3ХГСНА, а кривые 3 и $3'$ — для конических дисков из магниевых сплавов МА2. Аналогичные кривые для сферических магниевых дисков на рис. 7в не изображены, чтобы его не загромождать. Значения $\omega(H)$ для них меньше, чем для конических дисков (см. кривые 3 и $3'$).

Сравнение ординат точек кривых 3 и $3'$ на рис. 7в с ординатами точек кривых 1 и $1'$ на рис. 7а и б свидетельствует о том, что армирование магниевых дисков приводит к существенному увеличению их предельной угловой скорости вращения при одинаковой массе. Подобное сравнение кривых 1 , $1'$ и 2 , $2'$ на рис. 7в с такими же кривыми на рис. 7а и б показывает, что вращающиеся КМ-диски могут иметь существенно большую несущую способность, чем аналогичные диски той же массы, но изготовленные из высокопрочной стали. Таким образом, использование вращающихся КМ-дисков действительно представляется вполне перспективным.

Кривые 2 и $2'$ на рис. 7 почти всюду лежат ниже кривых 1 и $1'$ (исключение составляют лишь левые участки кривых $1'$ и $2'$ на рис. 7а). Следовательно, при одних и тех же значениях параметра H (см. рис. 1) сферические вращающиеся однородные и КМ-диски, как правило, имеют меньшую несущую способность, чем конические диски той же массы.

В целом поведение кривых на рис. 7 свидетельствует о том, что искривление полотна диска (особенно по сферической форме) приводит к значительному уменьшению его несущей способности по сравнению с плоскими вращающимися дисками той же массы и с теми же структурами армирования.

В предельном состоянии плоских дисков скорость прогиба $v_3 \equiv 0$, а скорость смещения точек в радиальном направлении $v_1(r)$ характеризуется зависимостями, изображенными на рис. 3 в работе [16]. В настоящей исследовании рассмотрены те же самые плоские диски, что и в [16], поэтому не будем здесь повторять рис. 3 из [16]. Пластическое течение в предельном состоянии искривленных дисков характеризуется наличием обеих зависимостей $v_1(r)$ и

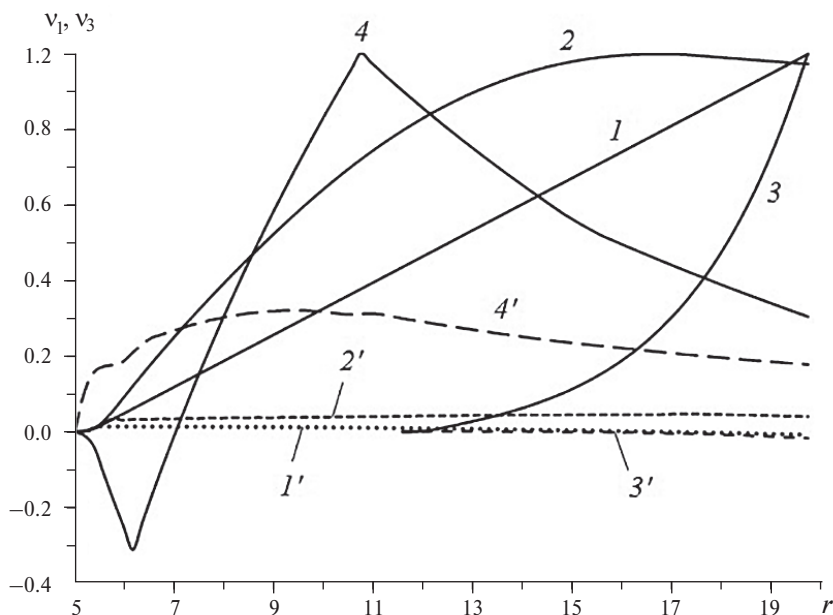


Рис. 8. Скорости v_1 и v_3 [м/с] точек срединной поверхности полотна диска в его предельном состоянии в зависимости от расстояния до оси вращения r [см].

$v_3(r)$, которые для некоторых случаев изображены на рис. 8. Сплошные кривые на рис. 8 соответствуют зависимостям $v_3(r)$, а штриховые кривые, номера которых помечены штрихом, соответствуют зависимостям $v_1(r)$, рассчитанным при тех же условиях, что и сплошные кривые с теми же номерами. Все кривые на рис. 8 нормированы так, чтобы для каждого рассматриваемого случая выполнялось условие $\max |v_3(r)| = 1$ м/с.

Кривые 1 и $1'$ на рис. 8 получены для сферического диска ($H=5$ мм) без лопаток при меридиональной структуре армирования (см. рис. 2б при $\psi_1^0=0$). В подавляющем большинстве проведенных расчетов в предельном состоянии вращающихся дисков (особенно с лопатками) зависимости $v_3(r)$ и $v_1(r)$ получаются качественно аналогичными кривым 1 и $1'$. Однако встречаются случаи, когда эти зависимости являются более сложными. Например, кривые 2 и $2'$ на рис. 8 также соответствуют сферическому диску ($H=5$ мм) без лопаток, но с окружной структурой армирования (см. (4.8), (4.11), (4.12), (4.20) и (4.21) при $\mu_1^0=\mu_2^0=0$). Во многих расчетных случаях в предельном состоянии вращающихся дисков в окрестности внутренней кромки ($r=r_0$) полотно диска остается абсолютно жестким, а пластическое течение развивается только в окрестности внешней кромки $r=r_1$. Кривые 3 и $3'$ на рис. 8 соответствуют именно такому случаю и рассчитаны для конического стального диска ($H=50$ мм) без лопаток. Поведение кривых 1 , $1'$, 2 и $2'$ в окрестности точки $r=r_0=5$ см свидетельствует о том, что в предельном состоянии соответствующих вращающихся дисков в окрестности внутренней кромки напряженное состояние близко к пластическому шарниру. В большинстве случаев, когда в

окрестности внутренней кромки появляется абсолютно жесткая подобласть, аналогичное напряженное состояние возникает и в окрестности границы раздела жесткой и пластической подобластей. Однако встречаются и исключения. Так, поведение кривых 3 и 3' на рис. 8 свидетельствует о том, что в соответствующем случае на границе раздела жесткой и пластической подобластей стального диска пластический шарнир не образуется. Напротив, в некоторых случаях в предельном состоянии искривленного вращающегося диска может возникнуть несколько пластических шарниров. Об этом свидетельствует, например, поведение кривых 4 и 4' на рис. 8 (см. точки изломов на кривой 4), которые рассчитаны для сферического стального диска ($H = 50$ мм) без лопаток. Кривые 1, 1', 2 и 2' на рис. 8 получены для весьма пологих сферических оболочек ($H = 5$ мм), поэтому ординаты точек кривых 1' и 2' пренебрежимо малы по сравнению с ординатами точек кривых 1 и 2. Кривые 4 и 4' получены для глубокой сферической оболочки ($H = 50$ мм), поэтому ординаты точек кривой 4' (зависимость $v_1(r)$) по модулю уже сопоставимы с ординатами точек кривой 4 (зависимость $v_3(r)$).

В некоторых случаях, например, для конического диска ($H = 5$ мм) с лопатками при окружной структуре армирования (см. (4.7), (4.9), (4.12), (4.18) и (4.19) при $\mu_1^0 = 0$ и $0 \leq \mu_2^0 \leq 0.2$) в предельном состоянии пластическое течение развивается в очень узкой зоне в окрестности внешней кромки ($19.749 \leq r \leq r_1 = 19.75$). При этом в зоне пластического течения $v_3(r) \equiv 0$, а зависимость $v_1(r)$ имеет вид, аналогичный кривой 1 на рис. 3б в [16], поэтому здесь не приводится.

В работе [16] было показано, что в случае фиксированного (эталонного) расхода волокон (см. (4.13)) в плоских вращающихся дисках с лопатками целесообразно армировать не все полотно ($r_0 \leq r \leq r_1$), а только внешнюю кольцевую подобласть, примыкающую к внешнему контуру ($r_* \leq r \leq r_1$, $r_0 < r_*$). При этом следует использовать радиально-окружную структуру армирования (см. рис. 1г в [16]), обладающую свойствам (4.24) и (4.25) при учете (4.7) и $\mu_1^0 = \mu_m = 0.7$, где $\mu_1^0 = \mu_1(r_*)$. Такой тип армирования обеспечивает наибольшую угловую скорость вращения плоских дисков с лопатками. Проведенные дополнительные расчеты показали, что в случае искривленных вращающихся дисков с лопатками указанный вариант армирования является неэффективным, так как несущая способность таких дисков оказывается меньше, чем у дисков с меридионально-окружной структурой армирования, рассмотренных выше в настоящем исследовании (см. рис. 6 и 7а). Объясняется это тем, что в искривленных дисках с лопатками при обсуждаемом варианте армирования в предельном состоянии неармированная область ($r_0 \leq r \leq r_*$) в основном остается абсолютно жесткой, а пластическое течение развивается в армированной области ($r_* \leq r \leq r_1$) и в малой ее окрестности в неармированной подобласти ($r \approx r_*$, $r < r_*$), в которой появляется пластический шарнир. Пластическое течение при этом развивается по схеме типа "усеченный конус", т.е. зависимости $v_1(r)$ и $v_3(r)$ качественно аналогичны кривым 1 и 1' на рис. 8, но начинают отличаться от нуля не при $r = r_0 = 5$ см, а при $r \leq r_* \leq r_0$. Соответствующие кривые на рис. 8 не изображены, чтобы его не загромождать. Так как пластический шарнир при этом образуется в неармированной зоне, то его вклад в общую

диссипацию механической энергии мал. Мала при этом и протяженность пластически деформируемой армированной подобласти ($r_* \leq r \leq r_1$). Оба эти обстоятельства объясняют малое значение диссипации механической энергии (см. (2.14)) в искривленных дисках с таким вариантом армирования и, как следствие, низкую их несущую способность по сравнению с КМ-дисками, в которых армировано все полотно ($r_0 \leq r \leq r_1$).

Заключение. Численно решена задача об определении верхних предельных значений угловых скоростей вращения плоских и искривленных (конических и эллипсоидальных) композитных дисков с лопатками из жесткопластических материалов при их квазистационарных режимах вращения. Полотно дисков армировано по меридианальным и (или) окружным или спирально-симметричным траекториям. Материалы композиции имеют разные пределы текучести при растяжении и сжатии, а материал связующего является ортотропным. Главные оси анизотропии связующего совпадают с меридиональным (в частности, радиальным), окружным и поперечным направлениями. Механическое поведение композиции описывается соотношениями структурной модели, учитывающей двумерное напряженное состояние во всех компонентах композиции. Для искривленных дисков использована двуслойная модель оболочек. Для решения задачи сформулирован экстремальный принцип и разработан нетрадиционный метод его дискретизации. Численное решение разыскивается с использованием методов линейного программирования. Проведена верификация разработанного численного метода в предельном случае, когда искривленные диски вырождаются в плоские, для которых в работе [14] получено полное аналитическое решение.

Исследовано влияние параметров армирования на предельное значение угловой скорости вращения дисков при расположении арматуры по геодезическим линиям, по логарифмическим спиральям и по меридиональным и/или окружным траекториям. Проведенные расчеты показали, что при условии одинакового относительного объема арматуры и одинаковой массы дисков их несущая способность существенно зависит от параметров армирования (плотностей и углов армирования) и от геометрии срединной поверхности полотна искривленных дисков. Исключение составляют только диски фиксированной геометрии при армировании их по геодезическим траекториям и плоские диски без лопаток при армировании их по логарифмическим спиральям.

При укладке волокон по геодезическим линиям наибольшее значение предельной угловой скорости вращения имеют диски, армированные по меридиональным направлениям или близким к ним. При армировании конических дисков по логарифмическим спиральям наибольшую угловую скорость вращения могут иметь конструкции со спиральным армированием, существенно отличным от меридионального. Значительно большую несущую способность имеют диски с меридионально-окружной структурой армирования.

Показано, что в случае искривленных дисков наибольшую предельную угловую скорость вращения имеют диски с меридионально-окружной структурой армирования, в которой суммарная плотность армирования постоянна (не зависит от меридиональной координаты) и равна предельно допустимому значению. Дополнительно повысить несущую способность таких вращающихся

дисков можно за счет их рационального профилирования (рационального изменения толщины вдоль меридиональной координаты).

Продемонстрировано, что при некоторых структурах армирования в предельном состоянии в окрестности внутренней кромки полотна диска может появиться абсолютно жесткая армированная подобласть.

Показано, что рациональное армирование дисков позволяет значительно увеличить их предельную угловую скорость вращения по сравнению даже с высокопрочными стальными дисками той же геометрии и массы.

Работа выполнена в рамках госзадания (№ госрегистрации 124021400036-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. III. Инерционные нагрузки. Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Устойчивость. М.: МАШГИЗ, 1959. 1120 с.
2. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
3. Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
4. Карролл-Порчинский Ц. Материалы будущего: Термостойкие и жаропрочные волокна и волокнистые материалы. М.: Химия, 1966. 238 с.
5. Composites: State of Art / Eds. L.W. Weeton, E. Scala. New York: AIME, 1974.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
7. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973. 228 с.
8. Takkar S., Gupta K., Tiwari V., Singh S.P. Dynamics of rotating composite disc // J. Vib. Eng. Technol. 2019. V. 7. № 6. P. 629–637.
<https://doi.org/10.1007/s42417-019-00155-8>
9. Rahi A. Lateral vibrations of a microrotating shaft-disk system subjected to an axial load based on the modified strain gradient theory // Mech. Adv. Mater. Struct. 2019. V. 26. № 20. P. 1690–1699.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1444223>
10. Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Y.N., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. Mathematical modeling of rotating disk states // J. Phys. conf. Ser. 2020. V. 1479. № 1. P. 12122.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012122>
11. Koo K.-N. Influence of rotation on vibration characteristics of thick composite disks // Mech. Adv. Mater. Struct. 2020. V. 27. № 8. P. 676–686.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1490832>
12. Farukoğlu Ö.C., Korkut I. On the elastic limit stresses and failure of rotating variable thickness fiber reinforced composite disk // ZAMM. 2021. V. 101. № 9. E202000356. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000356>
13. Wang B., Wang G., Shi Y., Huang L., Tian K. Stress-constrained thermo-elastic topology optimization of axisymmetric disks considering temperature-dependent material properties // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. V. 29. № 28. P. 7459–7475.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2000080>

14. Янковский А.П. Построение полного решения задачи определения несущей способности плоского армированного вращающегося диска // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 3. С. 289–309.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.25>
15. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks // Mech. Adv. Mater. Struct. 2024. V. 31. № 30. P. 12721–12739.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2328751>
16. Янковский А.П. Численный метод определения несущей способности плоских вращающихся армированных дисков // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17. № 3. С. 290–307.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.3.25>
17. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
18. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 707 с.
19. Chakrabarty J. Applied plasticity. 2nd ed. New York: Springer, 2010. 755 p.
20. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
21. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Investigation of load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced ellipsoidal shells of rotation // Mech. Adv. Mater. Struct. 2024. V. 31. № 18. P. 4387–4398.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2195416>
22. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. V. 29. № 26. P. 5651–5665.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1961952>
23. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 20–40.
24. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
25. Hu L.W. Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // J. Franklin Inst. 1958. V. 265. № 3. P. 187–204.
[https://doi.org/10.1016/0016-0032\(58\)90551-9](https://doi.org/10.1016/0016-0032(58)90551-9)
26. Ramu S.A., Iyengar K.J. Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading // Nucl. Eng. Des. 1979. V. 55. № 3. P. 363–373.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(79\)90115-8](https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90115-8)
27. Онат Е. Пластическое разрушение цилиндрических оболочек под действием осесимметричной нагрузки // Механика. Сборники переводов и обзоров иностранной периодической литературы. 1955. № 6 (34). С. 122–130.
28. Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 80–89.
29. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 8. P. 1235–1252.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420080221>
30. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker Inc., 2001. 786 p.

31. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1964. 348 с.
32. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / Сост. Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
33. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
34. Кармо М.П. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 608 с.

PREDICTION OF THE LOAD-BEARING CAPACITY OF CURVED ROTATING REINFORCED DISCS MADE OF RIGID-PLASTIC VARIOUS-RESISTANCE MATERIALS

A. P. Yankovskii^{a, *}

*^aKhrstianovich Institute of theoretical and applied mechanics
the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**E-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru*

A problem on a conditional extremum is formulated, which allows one to determine, based on the second limiting state, the upper limit of the maximum angular velocity of rotation of an axisymmetrically curved, fiber-reinforced disk. The structure is rigidly fixed to the vase or hub; blades can be attached to the outer edge of the disc blade. The materials of the components of the composition are assumed to be rigid-plastic, having asymmetry under tension and compression; the material of the binding matrix may have cylindrical anisotropy. Plastic deformation of the components of the composition is associated with piecewise linear yield criteria. The reinforcement structures of the disc web have meridional symmetry. A two-layer model of a curved disk with a plane-stress state in each of the fictitious composite layers is used. The discretized problem is solved using the simplex method of linear programming theory. The developed numerical algorithm has been verified. Examples of numerical calculation of the maximum angular velocity of rotation of flat, conical and spherical homogeneous and composite disks with different degrees of their curvature are analyzed. The cases of reinforcement of the disk web along geodetic directions and logarithmic spirals, as well as along meridional and circular trajectories, were investigated. The comparison was carried out for disks of the same mass with the same consumption of reinforcement. It has been shown that composite disks with a meridional-circumferential reinforcement structure have the highest load-bearing capacity. It has been demonstrated that even a slight axisymmetric curvature of the disk web leads to a sharp decrease in its load-bearing capacity compared to a similar flat structure.

Keywords: rotating disks, shells of revolution, fiber reinforcement, rigid-plastic model, limit state, upper bound for bearing capacity, piecewise linear yield criteria, different resistance, anisotropy, numerical solution, simplex-method of linear programming

REFERENCES

1. *Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'yev V.I.* Calculations for strength in mechanical engineering. Vol. III. Inertial loads. Vibrations and shock loads. Endurance. Sustainability. M.: MASHGIZ, 1959. [in Russian].
2. *Birger I.A., Dem'yanushko I.V.* Calculation for the strength of rotating disks. M.: Mashinostroenie, 1978 [in Russian].
3. *Vasiliev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. et al.* Composite Materials, Reference book / Ed. by V.V. Vasiliev, Yu.M. Tarnopol'skii. M.: Mashinostroenie, 1990 [in Russian].
4. *Karroll-Porczynski C.R.* Advanced Materials. Refractory Fibres, Fibrous Metals Composites. Guildford: Astex Publishing Company Ltd., 1962.
5. *Weeton L.W., Scala E. (ed.)* Composites: State of Art. New York: Metallurgical Society of AIME, 1974.
6. Composite materials. Handbook / Ed. by D.M. Karpinos. Kiev: Naukova dumka, 1985 [in Russian].
7. *Grigorenko Ya.M.* Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity. Kiev: Naukova dumka, 1973 [in Russian].
8. *Takkar S., Gupta K., Tiwari V., Singh S.P* Dynamics of rotating composite disc // J. Vib. Eng. Technol. 2019. V. 7. № 6. P. 629–637.
9. *Rahi A.* Lateral vibrations of a microrotating shaft-disk system subjected to an axial load based on the modified strain gradient theory // Mech. Adv. Mater. Struct. 2019. V. 26. № 20. P. 1690–1699.
10. *Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Y.N., Baranovskii E.S., Shashkin A.I.* Mathematical modeling of rotating disk states // J. Phys: conf. Ser. 2020. V. 1479. № 1. P. 12122. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012122>.
11. *Koo K.-N.* Influence of rotation on vibration characteristics of thick composite disks// Mech. Adv. Mater. Struct. 2020. V. 27. № 8. P. 676–686.
12. *Farukoglu Ö.C., Korkut I.* On the elastic limit stresses and failure of rotating variable thickness fiber reinforced composite disk // ZAMM. 2021. V. 101. № 9. E202000356. P. 1–18.
13. *Wang B., Wang G., Shi Y., Huang L., Tian K.* Stress-constrained thermo-elastic topology optimization of axisymmetric disks considering temperature-dependent material properties // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. V. 29. № 28. P. 7459–7475.
14. *Yankovskii A.P.* Building a complete solution to the problem of determining the bearing capacity of a flat reinforced rotating disk // Vycisl. meh. splos. Sred. 2023. V. 16. № 3. P. 289–309.
15. *Romanova T.P.* Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks // Mech. Adv. Mater. Struct. 2024. V. 31. № 30. P. 12721–12739. <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2328751>
16. *Yankovskii A.P.* Numerical method for determining the load capacity of flat rotating reinforced discs // Vycisl. meh. splos. Sred. 2024. V. 17. № 3. P. 290–307.
17. *Erkhov M.I.* Theory of ideally plastic bodies and structures. M.: Nauka, 1978 [in Russian].
18. *Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001 [in Russian].
19. *Chakrabarty J.* Applied plasticity. 2nd ed. New York: Springer, 2010.
20. *Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I.* Linear theory of thin shells. Leningrad: Polytechnica, 1991 [in Russian].

21. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Investigation of load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced ellipsoidal shells of rotation // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2023. V. 31. № 18. P. 4387–4398.
22. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29. № 26. P. 5651–5665.
23. *Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P.* Some features of the equations of shells reinforced with fibers of constant cross-section // *Mech. Compos. Mater. Struct.* 1997. V. 3. № 2. P. 20–40.
24. *Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B.* Optimization of structural elements made of composite materials. M.: Mashinostroenie, 1988 [in Russian].
25. *Hu L.W.* Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // *J. Franklin Inst.* 1958. V. 265. № 3. P. 187–204.
[https://doi.org/10.1016/0016-0032\(58\)90551-9](https://doi.org/10.1016/0016-0032(58)90551-9)
26. *Ramu S.A., Iyengar K.J.* Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading // *Nucl. Eng. Des.* 1979. V. 55. № 3. P. 363–373.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(79\)90115-8](https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90115-8)
27. *Onat E.* The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading // *Quarterly of Applied Mathematics.* 1955. V. XIII. № 1. P. 63–72.
28. *Nemirovskii Yu.V.* Limit equilibrium of multi-layer reinforced axisymmetric shells // *Izv. AN SSSR. MTT.* 1969. № 6. P. 80–89.
29. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state // *Mechanics of Solids.* 2020. V. 55. № 8. P. 1235–1252.
30. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. New York, Marcel Dekker Inc., 2001.
31. *Zuhovickii S.I., Avdeeva L.I.* Linear and convex programming. M.: Nauka, 1964 [in Russian].
32. *Il'yushin A.A.* Proceedings (1946–1966). V. 2. Plasticity. M.: Fizmatlit, 2004 [in Russian].
33. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013.
34. *Carmo M.P.* Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1976.