

УДК 539.376

О ПРИМЕНЕНИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ О ДЛИТЕЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

© 2025 г. Л. В. Фомин^а, *

^аНИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: fleonid1975@mail.ru,

Поступила в редакцию 11.12.2024 г.

После доработки 03.01.2025 г.

Принята к публикации 04.01.2025 г.

Исследуется длительное разрушение длинной тонкостенной цилиндрической оболочки при ползучести в условиях нестационарного сложного напряженного состояния с учетом влияния активной окружающей среды. Влияние окружающей среды на ползучесть и длительную прочность оболочки определяется диффузионным проникновением элементов окружающей среды в материал оболочки. С помощью кинетической теории Ю.Н. Работнова определены времена до разрушения такой оболочки при нестационарном нагружении. Применяется сингулярная дробно-линейная модель ползучести и длительной прочности, в которой предел прочности материала при соответствующей температуре выполняет роль предельного напряжения. Для учета накопления повреждений в процессе ползучести и определения критерия до разрушения используются скалярный и векторный параметры поврежденности, при этом компоненты векторного параметра поврежденности связаны с пространством главных напряжений. Для оценки скорости диффузионного процесса используется приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта. Учет влияния окружающей среды на время до разрушения осуществляется с помощью введения в определяющие и кинетические дробно-линейные соотношения функции от интегрально средней концентрации. Проведено сравнение времен до разрушения при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Определены особенности использования дробно-линейной модели для описания процессов длительного разрушения.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, нестационарное нагружение, ползучесть, длительное разрушение, дробно-линейная модель, активная среда, диффузия, диффузионный фронт, скалярный параметр поврежденности, векторный параметр поврежденности

DOI: 10.31857/S1026351925030137, EDN: BVKAIH

Введение. Обеспечение безопасной эксплуатации материалов и элементов конструкций, подверженных влиянию активной среды, является важной и актуальной задачей для обеспечения безопасности и надежности ответственных конструкций на протяжении всего срока эксплуатации. Особенное внимание следует уделять прогнозированию ресурса работы материалов и элементов конструкций в присутствии активной внешней среды. Это влияние может быть обусловлено как диффузионным проникновением, так и химическим взаимодействием активной среды с материалом. Особое значение приобретает изучение таких процессов при высокотемпературном длительном нагружении металлов и сплавов в условии ползучести [1–8].

Определение времени до разрушения тонкостенной цилиндрической оболочки, являющейся одним из распространенных элементов конструкций, в указанных условиях имеет как фундаментальный, так и прикладной характер при расчете элементов конструкций энергетического, химического и авиационно-космического назначения.

Вопросам ползучести и длительной прочности с учетом влияния активных сред уделяется недостаточное внимание. Среди авторов, которые занимаются подобными исследованиями, следует отметить работы И.Г. Овчинникова с соавт. [9–14], В.Н. Киселевского [15], П.А. Павлова с соавт. [16], А.М. Локощенко [2, 17–19] и других ученых. В литературе, как правило, рассматривается одноосное растяжение. Актуальность исследования длительного разрушения с учетом влияния активной среды при нестационарном сложном напряженном состоянии в данной работе несомненна.

Предлагаемое в данной статье исследование является развитием научных исследований по ползучести и длительной прочности с учетом взаимодействия активной среды с материалами и элементами конструкций, которые длительное время осуществлялись в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора А.М. Локощенко [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим длинную тонкостенную цилиндрическую оболочку без днищ с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки H . Пусть эта оболочка находится под действием растягивающей осевой силы P и внутреннего давления Q . Оболочка находится в активной среде. Влияние активной среды определяется диффузионным проникновением ее элементов внутрь материала. Кривизна тонкостенной оболочки мала, и отношение толщины стенки оболочки к ее радиусу много меньше единицы. Этот факт позволяет с высокой степенью точности рассматривать диффузию среды в стенку оболочки как одномерную диффузию в плоскую пластину. Оболочка со всех сторон окружена активной средой (например, воздух при высокой температуре является активной средой), поэтому рассматривается симметричный диффузионный процесс относительно срединной поверхности стенки оболочки.

В настоящем исследовании рассмотрена программа нестационарного нагружения оболочки, которая осуществляется путем раздельного, последовательного во времени действия внутреннего давления и осевой растягивающей силы вплоть до разрушения.

2. Приближенный метод решения уравнения диффузии. Дифференциальные уравнения параболического типа используются при решении многих задач диффузии [20], фильтрации [21] и теплопроводности [22], поэтому они

являются предметом обширных исследований. Представляют интерес методы, которые позволяют получить качественное и количественное описание изменения искомой характеристики во времени и в пространстве в обозримой форме.

Точные решения уравнения диффузии для ограниченных тел представляются обычно в виде тригонометрических рядов или рядов, состоящих из специальных функций, которые не всегда позволяют получить представления искомых характеристик в обозримом анализируемом виде. Эти решения громоздки по виду, и кроме того, для получения приемлемой точности в расчетах, особенно при малых временах, необходимо удерживать большое количество членов рядов. При решении уравнений, в которых границы рассматриваемой области зависят от времени, особенно если эта зависимость должна определяться из решения, целесообразно использовать приближенные методы.

Приближенные методы расчета нестационарных полей описаны в ряде классических монографий (например, [22–24]). В большинстве рассмотренных методов решение параболического уравнения представляется в виде полинома относительно пространственных координат. При этом коэффициенты членов ряда – постоянные или зависящие от времени величины – определяются с помощью различных вариационных методов. Ряд ученых считает целесообразным разделить всю рассматриваемую область на невозмущенную и возмущенную части и исследовать движение границы (диффузионного фронта) между этими частями.

Метод приближенного решения параболических задач с введением фронта возмущения впервые, по-видимому, был рассмотрен К.Э. Лембке [25], затем он был развит Л.С. Лейбензоном [26], И.А. Чарным [27], Г.И. Баренблаттом [28], С.А. Шестериковым и М.А. Юмашевой [29] и другими учеными.

В последние годы в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова проведено систематическое экспериментально-теоретическое исследование влияния агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность металлов (А.М. Локощенко, [2, 17–19]). При этом получены решения задач при взаимодействии диффузионного фронта и фронта разрушения, показана зависимость координаты диффузионного фронта не только от расстояния до внешней границы, но и от кривизны границы, проведена оценка погрешностей полученных решений.

В настоящей работе для анализа процесса диффузии активной окружающей среды внутрь рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта, распространяющегося от поверхности оболочки [2, 6, 17]. Из-за малой кривизны стенки оболочки можно рассматривать диффузионный процесс как одномерный процесс в плоской пластине, который происходит симметрично вследствие геометрической симметрии плоской пластины относительно срединной поверхности и симметрии граничных условий и характеристик диффузии. Рассматриваемый приближенный подход позволяет разделить все поперечное сечение оболочки на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную области (где еще нет проникновения среды) и затем отслеживать во времени движение

границы (диффузионного фронта) между этими областями. Зависимость концентрации c активной среды в материале оболочки от времени аппроксимируется в виде полинома, причем граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем поперечном сечении оболочки.

Из условия симметрии рассматриваем половину сечения оболочки по толщине. Введем безразмерные переменные $\bar{z} = 2z/H$, ($0 \leq z \leq 1$), $\bar{t} = 48Dt/H^2$, $\bar{c} = c/c_0$, где z — координата вдоль толщины оболочки ($z=0$ — на границе поперечного сечения оболочки с внешней средой, $z=1$ — на срединной линии поперечного сечения оболочки), t — время, c_0 — постоянная концентрация на границе материала оболочки и внешней среды, $D = \text{const}$ — коэффициент диффузии. Уравнение одномерной диффузии в этих переменных принимает следующий вид:

$$\partial \bar{c} / \partial \bar{t} = (1/12)(\partial^2 \bar{c} / \partial \bar{z}^2) \quad 0 < \bar{t} < \infty \quad 0 < \bar{z} < 1. \quad (2.1)$$

Начальное и граничные условия имеют вид:

$$\bar{c}(\bar{z}, 0) = 0, \quad \bar{c}(0, \bar{t}) = 1, \quad \partial \bar{c} / \partial \bar{z}(1, \bar{t}) = 0.$$

Здесь предполагается скачок концентрации на поверхности оболочки в момент времени $\bar{t} = 0$. Последнее условие (на срединной поверхности при $\bar{z} = 1$) принято вследствие симметрии диффузионного процесса относительно срединной поверхности оболочки.

Зависимость концентрации \bar{c} от координаты \bar{z} в данной работе принимается в виде квадратного полинома, удовлетворяющего граничным и начальным условиям. При этом рассматриваются два этапа процесса диффузии: этап проникновения фронта и этап насыщения, которые разделены моментом времени \bar{t}_0 [2, 6, 17]:

$$\bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) = \begin{cases} \left[1 - (\bar{z}/\bar{l}(\bar{t}))\right]^2 & \text{при } 0 < \bar{t} \leq \bar{t}_0, 0 \leq \bar{z} \leq \bar{l}(\bar{t}), \\ 0 & \text{при } 0 < \bar{t} \leq \bar{t}_0, \bar{l}(\bar{t}) < \bar{z} \leq 1, \\ \bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})] \cdot (1 - \bar{z})^2 & \text{при } \bar{t} > \bar{t}_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\bar{l}(\bar{t})$ — координата диффузионного фронта, \bar{t}_0 — время перехода между этапами диффузионного процесса, $B(\bar{t})$ — концентрация в центре поперечного сечения оболочки при $\bar{t} \geq \bar{t}_0$ (на срединной линии $\bar{z} = 1$).

Неизвестные зависимости $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ определяются из интегрального удовлетворения параболической функции $\bar{c}(\bar{z}, \bar{t})$ из (2.2) уравнению диффузии (2.1) [2].

В результате получим координату диффузионного фронта $\bar{l}(\bar{t})$ и концентрацию $B(\bar{t})$ в следующем виде:

$$\bar{l} = \sqrt{\bar{t}}, \quad B = 1 - \exp\left[-(1/4)(\bar{t} - \bar{t}_0)\right]. \quad (2.3)$$

Диффузионный фронт достигает срединной линии поперечного сечения оболочки в момент времени \bar{t}_0 , при этом $\bar{l} = 1$. На основе данного граничного условия получаем значение времени $\bar{t}_0 = 1$.

Используя соотношения для концентрации (2.2) и соотношения (2.3), получим выражения для $\bar{c}(\bar{z}, \bar{t})$ в следующем виде:

$$\bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) = \begin{cases} \left[1 - (\bar{z}/(\sqrt{\bar{t}}))\right]^2 & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{z} \leq \sqrt{\bar{t}}, \\ 0 & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1, \quad \sqrt{\bar{t}} < \bar{z} \leq 1, \\ 1 - (1 - (1 - \bar{z})^2) \exp[-(1/4)(\bar{t} - 1)] & \text{при } \bar{t} > 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

В дальнейшем для анализа влияния активной среды на время до разрушения оболочки будет использована интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$, которая имеет вид:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) d\bar{z} = \begin{cases} (1/3)\sqrt{\bar{t}} & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1, \\ 1 - (2/3) \cdot \exp[-(1/4)(\bar{t} - 1)] & \text{при } \bar{t} > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, уравнение (2.5) определяет два этапа развития диффузионного процесса в рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочке.

В монографии [2] приведен результат численного эксперимента по сравнению точного и предлагаемого приближенного решений уравнения диффузии. В качестве меры погрешности $\delta(\bar{t})$ приближенного решения $\bar{c}(\bar{z}, \bar{t})$ по сравнению с точным $\bar{c}_{\text{exact}}(\bar{z}, \bar{t})$ в [2] рассмотрено равенство:

$$\delta(\bar{t}) = \sqrt{\int_0^1 (\bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) - \bar{c}_{\text{exact}}(\bar{z}, \bar{t}))^2 d\bar{z}}. \quad (2.6)$$

В результате получено, что мера погрешности $\delta(\bar{t})$ по (2.5) составляет единицы процентов и уменьшается с ростом показателя степени используемого полинома аппроксимации $\bar{c}(\bar{z}, \bar{t})$.

С учетом известного факта о том, что экспериментальные кривые ползучести и времена до разрушения имеют, как правило, значительный статистический разброс при одних и тех же значениях механических напряжений и температур, влияние незначительного отклонения концентрации активной среды на ползучесть и длительную прочность в соответствии приближенным решением по сравнению с точным решением является вполне приемлемым.

3. Определение компонент напряженно-деформированного состояния при использовании дробно-линейной модели ползучести. Рассматриваемая задача является статически определимой, и напряженное состояние определяется только внешними нагрузками. Напряженное состояние в оболочке является плоским (с нулевым радиальным напряжением σ_r).

Компоненты тензора напряжений получены из уравнений равновесия элементарного объема тела (уравнения теории оболочек [30]):

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi RH}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{RQ}{H}. \quad (3.1)$$

Интенсивность напряжений σ_u и среднее нормальное напряжение σ в рассматриваемой задаче, соответственно, равны:

$$\sigma_u = \sqrt{(\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta})^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}),$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta}).$$

Рассмотрим вариант описания процесса ползучести с использованием дробно-линейного соотношения, предложенного С.А. Шестериковым и М.А. Юмашевой [31].

Для описания ползучести металлов и сплавов в одномерном случае наибольшее распространение получила степенная зависимость скорости установившейся ползучести \dot{p} от напряжения σ , которая имеет вид:

$$\dot{p} = \alpha \sigma^n \quad \alpha = \text{const}, \quad n = \text{const}.$$

Она достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные в выбранном узком диапазоне напряжений для широкого класса металлических материалов и сплавов, но, как отмечал Ю.Н. Работнов [1], если брать достаточно широкий диапазон напряжений, то показатель степени n становится зависящим от напряжения σ .

Одним из возможных вариантов соотношений для описания процессов ползучести является дробно-линейная зависимость [31], которая в ряде случаев позволяет достаточно хорошо выразить скорость ползучести как функцию от напряжения в широком диапазоне напряжений. С.А. Шестериков и М.А. Юмашева предложили использовать такую зависимость в следующем виде:

$$\dot{p} = k \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_b - \sigma} \quad \sigma > 0 \quad k = \text{const},$$

где σ_0 — предел ползучести (при $\sigma < \sigma_0$ деформация ползучести практически отсутствует), во многих случаях можно принять $\sigma_0 = 0$, σ_b — предел кратковременной прочности при соответствующей температуре испытания.

При напряжениях, близких к σ_b , скорость деформации ползучести \dot{p} существенно возрастает, и в рассматриваемые времена наступает разрушение. Таким образом, в дробно-линейном соотношении напряжение σ_b выполняет роль предельного напряжения. В отличие от стандартной степенной зависимости, где напряжение может выбираться сколь угодно большим, в данной сингулярной зависимости напряжение ограничено величиной σ_b , что является более обоснованным с физической и механической точек зрения.

Качественный график дробно-линейной зависимости при $\sigma_0 = 0$ представлен на рис. 1.

Учет влияния активной среды осуществим путем введения в дробно-линейное [6, 31] определяющее соотношение функции от интегрально средней концентрации активной среды $f(c_m(\bar{t}))$ в материале оболочки:

$$\dot{p}_u = A(\sigma_u / (\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (3.2)$$

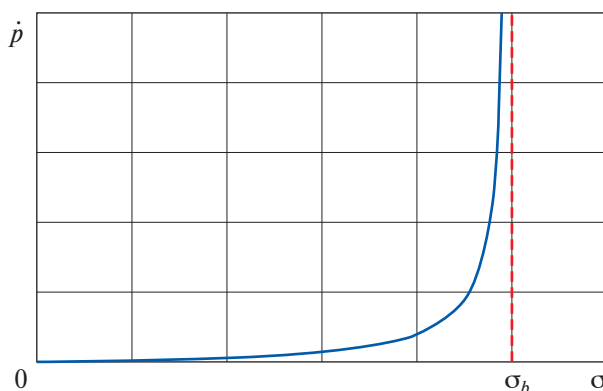


Рис. 1. Дробно-линейная зависимость скорости деформации ползучести от напряжения при $\sigma_0=0$.

где \dot{p}_u — интенсивность скоростей деформаций ползучести, здесь и далее точка над соответствующим символом означает производную по времени \bar{t} , σ_u — интенсивность напряжений, σ_b — предел кратковременной прочности при заданной температуре испытания (здесь принято, что значения σ_b при растяжении и сжатии совпадают), $\bar{c}_m(\bar{t})$ — интегрально средний уровень концентрации элементов окружающей среды в оболочке, A — материальная константа.

Следует отметить, что в соотношении (3.2) используется интенсивность напряжений σ_u , которая всегда является положительной величиной независимо от знака напряжений.

В дальнейших расчетах будем использовать линейный вид функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$, удовлетворяющей условию $f(0)=1$:

$$f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t}), \quad (3.3)$$

где $a = \text{const}$ — константа, определяемая из экспериментов по длительной прочности с учетом влияния окружающей активной среды [4, 32].

Дополнительно в настоящем исследовании примем следующие допущения:

- 1) деформации малы;
- 2) для определения компонент напряженно-деформированного состояния используется теория оболочек [30];
- 3) несжимаемость материала оболочки;
- 4) упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести.

Зависимость компонентов тензора деформаций ползучести от компонентов тензора напряжений в предположении установившегося характера ползучести материала оболочки с учетом несжимаемости материала определяется на основе гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести для несжимаемого тела в виде [1, 2]:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_u)}{\sigma_u} s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad \dot{p}_u = f(\sigma_u), \quad (3.4)$$

где $\dot{p}_{ii} = 0$ – условие несжимаемости материала, s_{ij} – девиатор напряжений, δ_{ij} – единичный тензор Кронекера.

С учетом принятого соотношения (3.2) для \dot{p}_u

$$\dot{p}_{zz} = \frac{3}{2} \frac{A(\sigma_u/(\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_u} s_{zz}, \quad s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma \delta_{zz},$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta}), \quad s_{zz} = \frac{2}{3} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)$$

получим выражение для \dot{p}_{zz} :

$$\dot{p}_{zz} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta} \right) \quad (3.5)$$

Аналогично можно получить выражение для $\dot{p}_{\theta\theta}$:

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \frac{A(\sigma_u/(\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_u} s_{\theta\theta}, \quad s_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma \delta_{\theta\theta}, \quad s_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{zz} \right),$$

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \sigma_{zz} \right). \quad (3.6)$$

В результате соотношения (3.1), (3.5) и (3.6) определяют напряженно-деформированное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки с учетом использования дробно-линейной модели ползучести.

4. Длительное разрушение оболочки с учетом влияния активной среды. Скалярный и векторный параметры поврежденности. В настоящее время существует недостаточное количество систематических экспериментальных данных о деформациях ползучести и длительной прочности при произвольных нестационарных сложных напряженных состояниях. Следует также отметить случайный характер накапливаемых повреждений при изменении вида сложного напряженного состояния.

Возникает вопрос: каким способом произвести учет накопления повреждений в процессе ползучести? По мнению автора статьи, для моделирования процессов разрушения оптимальным является использования векторного параметра накопления повреждений.

Использование скалярного параметра не всегда позволяет в полной мере учесть чувствительность скорости ползучести и накопления повреждений к анизотропным свойствам материала. Отметим, что анизотропность свойств может быть результатом предварительной механической обработки материалов и изделий.

Применение тензорного параметра поврежденности, как правило, приводит к необходимости определения значительного числа материальных констант и материальных функций, что может являться трудоемкой задачей в связи с необходимостью проведения широкой серии установочных экспериментов.

Векторный подход в этих смыслах является оптимальным.

Необходимо также отметить, что векторный подход позволяет моделировать длительную прочность и определять времена до разрушения как при неизменном положении главных осей, так и при изменении ориентации главных осей напряженно-деформированного состояния, даже когда такое изменение ориентации главных осей многократно повторяется. Так, например, в работе [33] рассмотрены результаты известных испытаний трубчатых образцов при постоянном осевом напряжении и постоянном или знакопеременном касательном напряжении. Эксперименты показывают, что циклическое изменение знака касательных напряжений приводит к значительному увеличению времени до разрушения. Для описания этого эффекта использован кинетический подход Л.М. Качанова [34, 35] с векторным параметром поврежденности. Применение этого подхода приводит к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

Кроме этого, в статье [36] при помощи векторного подхода моделируется известный эффект, заключающийся в том, что время до разрушения при равноосном плоском напряженном состоянии в несколько раз меньше времени до разрушения при одноосном растяжении при том же значении напряжения. С этой целью предложен вариант кинетической теории ползучести и длительной прочности академика Ю.Н. Работнова [1] при дополнительном учете анизотропии материала. Также в указанной статье моделирование длительной прочности при скачкообразном изменении интенсивности напряжений проведено двумя способами: как при учете накопления поврежденности только в процессе ползучести, так и при дополнительном учете накопления поврежденности при мгновенном нагружении.

Все варианты предложенных кинетических уравнений приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

Аналитический обзор известных экспериментальных и теоретических исследований ползучести и длительной прочности металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях, опубликованных за последние 60 лет, приведен в статье [37].

Используем кинетическую теорию ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1] и введем в кинетические уравнения функцию от интегрально среднего уровня концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$.

Кинетическое уравнение при учете скалярного параметра поврежденности рассмотрим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} = d\omega/d\bar{t} &= C(\sigma_u/(\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \\ \omega(\bar{t} = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Критерием разрушения является достижение параметром поврежденности $\omega^*(\bar{t} = \bar{t}_\omega^*) = 1$ значения, равного единице в момент времени $\bar{t} = \bar{t}_\omega^*$.

Как вариант развития моделирования накопления повреждений в условии длительного высокотемпературного нагружения можно в качестве параметра поврежденности взять вектор $\Omega(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ [35, 38], компоненты которого связаны с пространством главных напряжений σ_i ($i = 1, 2, 3$) и определяются в общем виде следующими зависимостями:

$$\frac{d\Omega_i}{dt} = \begin{cases} f_i(\Omega_i, \sigma_i, t) & \sigma_i > 0, \\ 0, & \text{где } \sigma_i \leq 0. \end{cases}$$

В настоящей работе с учетом рассматриваемой далее отдельной программы нагружения оболочки внутренним давлением и осевой растягивающей силой оси введенной цилиндрической системы координат (z, θ, r) являются главными осями напряженно-деформированного состояния. Кинетические уравнения при учете векторного параметра поврежденности [38] Ω примем в следующем виде:

$$\dot{\Omega}_i = d\Omega_i/d\bar{t} = \begin{cases} C \cdot (\sigma_i/(\sigma_b - \sigma_i)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_i \leq 0, \end{cases} \quad i = z, \theta, \quad (4.3)$$

где Ω_i — проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат.

Критерием разрушения является достижение длиной Ω вектора Ω значения, равного единице:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_z)^2 + (\Omega_\theta)^2} \quad \Omega(\bar{t} = 0) = 0 \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1.$$

Здесь необходимо дать некоторые комментарии по поводу определении параметров уравнений моделей ползучести и длительного разрушения.

В описания процесса ползучести для широкого класса металлических материалов используются степенная и дробно-линейная модели ползучести, указанные в п. 3 данной статьи. Материальные параметры α , n , β определяются на основе обработки эксперимента. Эксперимент представляет собой испытание на ползучесть при растяжении стандартного образца из материала, свойства которого необходимо изучить. В результате эксперимента получают семейство кривых ползучести, каждая из которых получена при определенном механическом напряжении σ . Для определения α , n , β используют вторые участки семейства кривых ползучести — участки установившейся ползучести на каждой кривой семейства. Предел кратковременной прочности σ_b при соответствующей температуре определяется известным стандартным способом. Значения материальных констант в общем случае будут зависеть от выбранного конкретного материала и температуры испытания.

Параметр A в уравнении (3.2) определяется аналогичным способом, при этом эксперимент проводится в нейтральной среде. Учет влияния активной среды в уравнении (3.2) осуществляется с помощью введения в указанном соотношении функции $f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t})$, определение константы a подробно описано в работе [4]. Так, например, при определении длительной прочности образцов из низкоуглеродистой стали с учетом диффузии в образцы кислорода из активной среды получено значение $a = 9.5$.

Характеристика материала C (в уравнении (4.1)) определяется на основе приравнивания значений теоретического и экспериментального времен до разрушения при испытании на ползучесть стандартного образца в нейтральной среде. Теоретическое время до разрушения \bar{t}_ω^* определяется интегрированием уравнения (4.1) до значения поврежденности ω до значения $\omega^* = \omega(\bar{t} = \bar{t}_\omega^*) = 1$,

при таком расчете принимается значение $f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1$. Аналогичным образом интегрирование (4.3) проводится до значения $\Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1$, при таком расчете также используется значение $f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1$.

Отметим, что для получения качественных особенностей характеристик ползучести и различий накопления поврежденности при учете скалярного и векторного параметров можно принять некоторые модельные значения указанных материальных констант.

Далее в настоящей статье рассмотрена программа нестационарного нагружения оболочки. Времена до разрушения определяются с использованием скалярного и векторного параметров поврежденности.

Примем следующую программу нестационарного нагружения. Сначала к рассматриваемой длинной тонкостенной цилиндрической оболочке прикладывается внутреннее давление $Q > 0$ в течение времени $0 < \bar{t} \leq \bar{t}_1$, примем $\bar{t}_1 = 0.5\bar{t}_1^*$ (где \bar{t}_1^* — время до разрушения рассматриваемой оболочки при действии только этого внутреннего давления Q), при этом осевая растягивающая сила $P = 0$. Затем в течение времени $\bar{t}_1 < \bar{t} < \bar{t}^*$ (где \bar{t}^* — время до разрушения оболочки в конце программы нагружения) к рассматриваемой оболочке прикладывается осевая растягивающая сила $P > 0$, при этом внутреннее давление равно нулю (т.е. выполняются условия $Q = 0$, $P > 0$). Схема нагружения оболочки представлена на рис. 2. Будем называть такую программу раздельной программой нагружения.

Поскольку в соответствии с принятой схемой нагружения на каждой стадии нагружения действует только один из видов нагрузки (второй вид нагрузки равен нулю), то время до разрушения можно определить, используя с учетом (3.1) следующие выражения для интенсивности напряжений:

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(Q) & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*, \\ \sigma_{zz}(P) & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^*, \end{cases}$$

где \bar{t}_ω^* — время до разрушения оболочки при использовании скалярного параметра поврежденности.

Введем безразмерные напряжения:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\sigma_b, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}/\sigma_b.$$

Получим выражение для интенсивности напряжений в безразмерном виде:

$$\bar{\sigma}_u \equiv \frac{\sigma_u}{\sigma_b} = \sqrt{(\bar{\sigma}_{zz})^2 + (\bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 - \bar{\sigma}_{zz}\bar{\sigma}_{\theta\theta}}. \quad (4.2)$$

С учетом выражений (3.1.) для σ_{zz} и $\sigma_{\theta\theta}$ выразим

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{SQ} \sigma_{\theta\theta}, \quad \text{где } S = 2\pi R^2.$$

В безразмерном виде:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \beta \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \quad \text{где } \beta = \frac{P}{SQ} = \frac{P}{2\pi R^2 Q}.$$

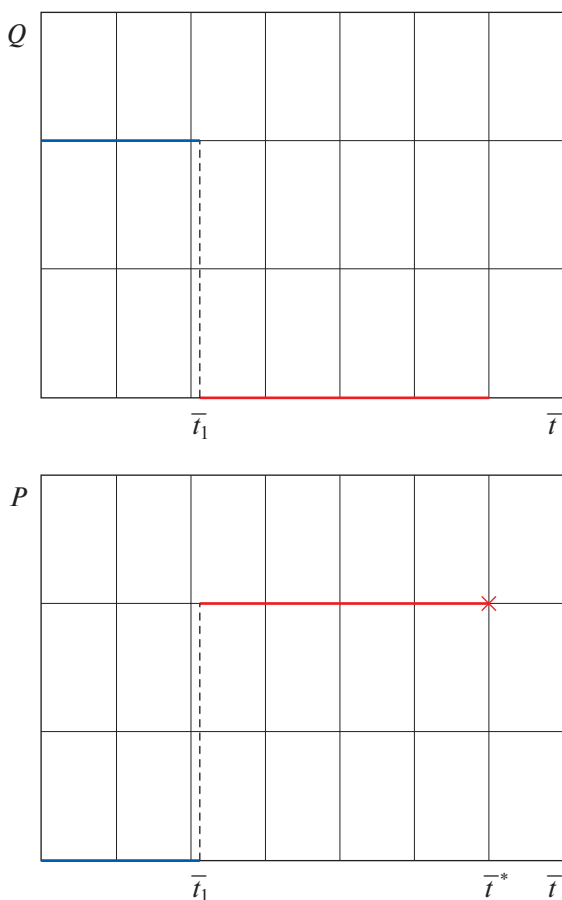


Рис. 2. Схема нагружения оболочки при раздельной программе нагружения.

Подставим полученное соотношение $\bar{\sigma}_{zz} = \beta \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ в (4.2):

$$\bar{\sigma}_u = \sqrt{(\beta \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 + (\bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 - \beta \bar{\sigma}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_{\theta\theta}} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} \sqrt{(\beta)^2 + (1)^2 - \beta} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} \sqrt{\beta^2 - \beta + 1}. \quad (4.3)$$

Здесь следует отметить, что при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ (т.е. при $P = 2\pi R^2 Q$) значение $\bar{\sigma}_u = \bar{\sigma}_{\theta\theta}$.

Определим интенсивность безразмерных напряжений на первой и второй стадиях нагружения.

Рассмотрим первую стадию нагружения ($0 < \bar{t} \leq \bar{t}_1$).

Поскольку на первой стадии нагружения на цилиндрическую тонкостенную оболочку действует только внутреннее давление Q (при этом осевая сила $P = 0$ равна нулю), то согласно выражению (4.3):

$$P = 0 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \bar{\sigma}_u^{(1)} = \frac{RQ}{\sigma_b H} \sqrt{0^2 - 0 + 1} = \frac{RQ}{\sigma_b H} = \bar{\sigma}_{\theta\theta},$$

интенсивность безразмерных напряжений на первой стадии нагружения равна

$$\bar{\sigma}_u^{(1)} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{RQ}{\sigma_b H}.$$

На второй стадии нагружения $\bar{t}_1 < \bar{t} < \bar{t}^*$ к рассматриваемой оболочке прикладывается осевая растягивающая сила $P > 0$, при этом внутреннее давление равно нулю (т.е. выполняются условия $Q = 0$, $P > 0$), то согласно выражению (4.3):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u^{(2)} &= \frac{RQ}{\sigma_b H} \sqrt{\beta^2 - \beta + 1} = \frac{RQ}{\sigma_b H} \sqrt{\left(\frac{P}{2\pi R^2 Q}\right)^2 - \frac{P}{2\pi R^2 Q} + 1} = \\ &= \frac{R}{\sigma_b H} \sqrt{\left(\frac{P}{2\pi R^2}\right)^2 - \frac{QP}{2\pi R^2} + Q^2}, \\ Q = 0 &\rightarrow \bar{\sigma}_u^{(2)} = \frac{P}{2\pi R H \sigma_b} = \bar{\sigma}_{zz}\end{aligned}$$

интенсивность безразмерных напряжений на второй стадии нагружения будет равна

$$\bar{\sigma}_u^{(2)} = \bar{\sigma}_{zz} = \frac{P}{2\pi R H \sigma_b}.$$

4.1. Определение времени до разрушения цилиндрической оболочки с использованием скалярного параметра поврежденности. Кинетическое уравнение (4.1) при использовании скалярного параметра поврежденности с учетом безразмерной интенсивности напряжений (4.3) принимает следующий вид:

$$\dot{\omega} = d\omega/d\bar{t} = C \left(\frac{\bar{\sigma}_u}{(1 - \bar{\sigma}_u)} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(0) = 0. \quad (4.4)$$

Проинтегрируем соотношение (4.4):

$$\omega(\bar{t}) = C \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\bar{\sigma}_u}{(1 - \bar{\sigma}_u)} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}. \quad (4.5)$$

Определим \bar{t}_1^* — время до разрушения рассматриваемой оболочки при действии только внутреннего давления Q . В этом случае при действии только Q осевая сила $P = 0$ равна нулю, согласно выражению (4.3) интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_u$ будет равна

$$\bar{\sigma}_u = \frac{RQ}{\sigma_b H} = \bar{\sigma}_{\theta\theta}.$$

Тогда с учетом (4.5) и $\bar{\sigma}_u = \frac{RQ}{\sigma_b H} = \bar{\sigma}_{\theta\theta}$,

$$\omega(\bar{t}) = C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) \int_0^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

Условием нахождения \bar{t}_1^* будет достижение параметром поврежденности значения

$$\omega(\bar{t}_1^*) = 1,$$

$$\omega(\bar{t}_1^*) = C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) \int_0^{\bar{t}_1^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 1.$$

С учетом линейного вида (3.3) функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ (константу примем $a = 9.5$, это значение a получено при описании известных экспериментальных данных [4, 32]) определим время \bar{t}_1^* .

Как отмечалось ранее в данной статье, материальные константы модели в общем случае определяются на основе обработки экспериментальных данных. В рассматриваемом в статье случае для дальнейшего описания различий между скалярным и векторным подходом моделирования процессов разрушения можно принять некоторые модельные значения материальных параметров.

Примем значение $C = \text{const}$ таким, чтобы $C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) = 1$.

Используем только первый этап диффузионного процесса. С учетом (2.5) получим:

$$\omega^* = \omega(\bar{t}_1^*) = \int_0^{\bar{t}_1^*} \left[1 + 9.5 \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = 1.$$

Отсюда $\bar{t}_1^* = 0.422$. Так как $\bar{t}_1^* = 0.422 < 1$, то использование только первого этапа диффузионного процесса (2.5) верно.

Таким образом, согласно принятой программе нагружения время разделения первой и второй стадий нагружения \bar{t}_1 определяется так: $\bar{t}_1 = (1/2)\bar{t}_1^* = 0.211$.

Теперь определим время до разрушения оболочки при принятой раздельной программе нагружения с учетом использования скалярного параметра поврежденности. Используем соотношение (4.5).

Рассмотрим первую стадию нагружения.

Накопление поврежденности на первой стадии нагружения $\omega^{(1)}(\bar{t})$ будет определяться соотношением:

$$\omega^{(1)}(\bar{t}) = C \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\bar{\sigma}_u^{(1)}}{(1 - \bar{\sigma}_u^{(1)})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

В конце первой стадии нагружения:

$$\omega(\bar{t}_1) = C \int_0^{\bar{t}_1} \left(\frac{\bar{\sigma}_u^{(1)}}{(1 - \bar{\sigma}_u^{(1)})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) \int_0^{0.211} \left[1 + 9.5 \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t}.$$

Используем значение $C = (\sigma_b H - RQ)/RQ$, полученное из условия $C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) = 1$. Тогда $\omega(\bar{t}_1) = \int_0^{0.211} \left[1 + 9.5 \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = 0.416$.

На второй стадии нагружения поврежденность $\omega^{(2)}(\bar{t})$ при использовании скалярного характера ее накопления будет определяться следующим выражением:

$$\omega^{(2)}(\bar{t}) = \omega(\bar{t}_1) + C \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} \left(\frac{\bar{\sigma}_u^{(2)}}{(1 - \bar{\sigma}_u^{(2)})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

Здесь использован тот факт, что поврежденность $\omega(\bar{t}_1)$, накопленная к моменту времени \bar{t}_1 на первой стадии нагружения, учитывается и на второй стадии нагружения.

Время до разрушения определяется из условия $\omega^* = \omega^{(2)}(\bar{t}^*) = 1$:

$$\omega^* = \omega^{(2)}(\bar{t}^*) = \omega(\bar{t}_1) + C \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}^*} \left(\frac{\bar{\sigma}_u^{(2)}}{(1 - \bar{\sigma}_u^{(2)})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 1.$$

С учетом

$$\frac{\bar{\sigma}_u^{(2)}}{1 - \bar{\sigma}_u^{(2)}} = \frac{P}{2\pi RH \sigma_b - P}, \quad C = \frac{\sigma_b H - RQ}{RQ}, \quad \bar{t}_1 = 0.211, \quad \omega(\bar{t}_1) = 0.416$$

получим:

$$0.416 + \left(\frac{\sigma_b H - RQ}{RQ} \right) \left(\frac{P}{2\pi RH \sigma_b - P} \right) \int_{0.211}^{\bar{t}^*} \left[1 + 9.5 \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = 1,$$

$$0.416 + \left(\frac{\sigma_b H - RQ}{RQ} \right) \left(\frac{P}{2\pi RH \sigma_b - P} \right) \left[\left(\bar{t}^* + \frac{19}{9} (\bar{t}^*)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} (0.211)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 1.$$

В полученное соотношение входят безразмерные константы, обозначим их:

$$\bar{C} \equiv C = \frac{\sigma_b H - RQ}{RQ}, \quad \bar{P} = \frac{P}{2\pi RH \sigma_b - P}.$$

Тогда уравнение для нахождения времени до разрушения при учете скалярного характера накопления поврежденности с учетом \bar{C} и \bar{P} будет иметь следующий вид:

$$\omega^* = 0.416 + \bar{C} \bar{P} \left[\left(\bar{t}^* + \frac{19}{9} (\bar{t}^*)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} (0.211)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 1. \quad (4.6)$$

Проанализируем полученное соотношение.

Безразмерные параметры \bar{C} и \bar{P} задаются независимо друг от друга, поскольку внешние нагрузки Q и P задаются независимо друг от друга. Указанные безразмерные параметры учитывают геометрические размеры тонкостенной цилиндрической оболочки и предельные характеристики материала – предела прочности при соответствующей температуре.

Согласно принятой гипотезе о накоплении повреждений для увеличения поврежденности на последующих стадиях нагружения произведение $\bar{C}\bar{P}$ должно быть положительным.

При достижении величиной силы P предельного значения, равного $P_{\text{lim}} = 2\pi RH\sigma_b$, при этом $P \rightarrow \infty$, происходит мгновенное нарастание поврежденности ω в соответствии с соотношением:

$$\omega^{(2)}(\bar{t}) = 0.416 + \bar{C}\bar{P} \left[\left(\bar{t} + \frac{19}{9}(\bar{t})^2 \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9}(0.211)^2 \right) \right], \quad (4.7)$$

и, как следствие, происходит мгновенное разрушение.

Данный вывод является физически и механически обоснованным и адекватно отображается в проведенном моделировании с помощью применения в модели дробно-линейного кинетического соотношения накопления поврежденности, в которое входит предельное напряжение σ_b .

Структура соотношения

$$\bar{P} = \frac{P}{2\pi RH\sigma_b - P} = \frac{P}{P_{\text{lim}} - P}$$

аналогична структуре, принятой дробно-линейной модели ползучести и длительной прочности: $\sigma_u/(\sigma_b - \sigma_u)$.

Также необходимо отметить, что если при значении $\bar{t} = 1$ (время разделения этапов диффузионного процесса) в соотношении (4.7) величина поврежденности $\omega^{(2)}(\bar{t} = 1) < 1$ и разрушение еще не наступило, то при выводе соотношения (4.6) следует учитывать также второй этап диффузионного процесса (2.5) при $\bar{t} > 1$.

В п. 4.3. статьи будет показан результат вычисления времени до разрушения при использовании скалярного параметра поврежденности.

4.2. Определение времени до разрушения цилиндрической оболочки при использовании векторного параметра поврежденности. Кинетические уравнения при учете векторного параметра поврежденности [35, 38] Ω примем в виде (4.3):

$$\dot{\Omega}_i = d\Omega_i/d\bar{t} = \begin{cases} C \cdot (\sigma_i/(\sigma_b - \sigma_i)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_i \leq 0, \end{cases} \quad i = z, \theta,$$

где Ω_i – проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат.

Критерием разрушения является достижение длиной Ω вектора Ω значения, равного единице:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_z)^2 + (\Omega_\theta)^2}, \quad \Omega(\bar{t} = 0) = 0, \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1.$$

В безразмерном виде кинетическое уравнение (4.3) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\Omega}_i = d\Omega_i/d\bar{t} = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{\bar{\sigma}_i}{(1 - \bar{\sigma}_i)} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma}_i > 0, \\ 0 & \text{при } \bar{\sigma}_i \leq 0, \end{cases} \quad i = z, \theta, \quad (4.8)$$

где $\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_b}$.

Очевидно, что принятая программа нагружения обеспечивает положительность компонентов тензора напряжений, поэтому далее для анализа кинетики накопления повреждений будет использоваться только первое уравнение системы (4.8) для $\bar{\sigma}_i > 0$.

Проинтегрируем уравнение (4.8):

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}} d\Omega_i &= \int_0^{\bar{t}} C \left(\frac{\bar{\sigma}_i}{(1 - \bar{\sigma}_i)} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot d\bar{t}, \quad \Omega_i(0) = 0, \\ \Omega_i(\bar{t}) &= C \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\bar{\sigma}_i}{(1 - \bar{\sigma}_i)} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Время длительности первой стадии программы нагружения $\bar{t}_1 = (1/2)\bar{t}_1^* = 0.211$ (где $\bar{t}_1^* = 0.422$) определяется аналогично п. 4.1. настоящей статьи. При этом вместо скалярного параметра поврежденности используется окружная компонента Ω_θ векторного параметра поврежденности (при $\Omega_z = 0$), т.к. на первой стадии программы нагружения на рассматриваемую длинную оболочку без днищ действует только внутреннее давление.

Определим время до разрушения оболочки при принятой программе нагружения с учетом использования векторного параметра поврежденности.

Используем соотношение (4.9).

Рассмотрим первую стадию нагружения. На первой стадии на цилиндрическую оболочку действует только внутреннее давление Q (при этом осевая сила $P = 0$ равна нулю). В этом случае $\bar{\sigma}_i \equiv \bar{\sigma}_{\theta\theta}$, $\Omega_z = 0$ и $\Omega^{(1)} = \sqrt{0 + (\Omega_\theta)^2} = \Omega_\theta$. Накопление поврежденности на первой стадии нагружения $\Omega^{(1)}(\bar{t})$ определяется соотношением:

$$\Omega^{(1)}(\bar{t}) = \Omega_\theta(\bar{t}) = C \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{(1 - \bar{\sigma}_{\theta\theta})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

С учетом $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = RQ/(\sigma_b H)$,

$$\Omega_\theta(\bar{t}) = C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) \int_0^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

Аналогично примем значение $C = \text{const}$ таким, чтобы $C \left(\frac{RQ}{\sigma_b H - RQ} \right) = 1$.

Тогда накопление поврежденности на первой стадии нагружения определяется следующей зависимостью:

$$\Omega_0(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

В конце первой стадии нагружения:

$$\Omega_0(\bar{t}_1) = \int_0^{\bar{t}_1} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = \int_0^{0.211} \left[1 + 9.5 \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \left[\bar{t} + \frac{19}{9} \bar{t}^{\frac{3}{2}} \right]_0^{0.211} = 0.416.$$

Здесь использовался только первый этап диффузионного процесса, поскольку длительность первой стадии нагружения, равная $\bar{t}_1 = 0.211$, не превышает время перехода между этапами диффузионного процесса, равного $\bar{t}_0 = 1$.

Таким образом, длина вектора поврежденности Ω в конце первой стадии нагружения определяется в следующем виде:

$$\Omega^{(1)}(\bar{t}_1) = \sqrt{(\Omega_z(\bar{t}_1))^2 + (\Omega_0(\bar{t}_1))^2} = \Omega_0(\bar{t}_1) = 0.416.$$

На второй стадии нагружения в материале цилиндрической оболочки уже есть накопленная на первой стадии поврежденность, которая характеризуется длиной вектора поврежденности на момент окончания первой стадии: $\Omega(\bar{t}_1) = \Omega_0(\bar{t}_1) = 0.416$.

Т.к. при $\bar{t} < \bar{t}_1$ на цилиндрическую оболочку действует только осевая растягивающая сила $P > 0$, при этом внутреннее давление равно нулю (т.е. выполняются условия $Q = 0$, $P > 0$), то в этом случае $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{zz}$. Значение накопленной поврежденности от действия внутреннего давления на первой стадии нагружения $\Omega^{(1)}(\bar{t}_1) = \Omega_0(\bar{t}_1) = 0.416$ на момент времени \bar{t}_1 также сохраняется и на протяжении всей второй стадии. Таким образом, длина вектора поврежденности на второй стадии нагружения определяется как $\Omega^{(2)}(\bar{t}) = \sqrt{(\Omega_z(\bar{t}))^2 + 0.416^2}$, при $\bar{t} > \bar{t}_1$.

Критерием разрушения является достижение длины вектора поврежденности значения, равного единице: $\Omega^{(2)}(\bar{t}^*) = 1$. То есть,

$$(\Omega_z(\bar{t}^*))^2 + 0.416^2 = 1^2.$$

Отсюда

$$\Omega_z(\bar{t}^*) = 0.909 = C \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}^*} \left(\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{(1 - \bar{\sigma}_{zz})} \right) f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}.$$

С учетом

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{(1 - \bar{\sigma}_{zz})} = \frac{P}{2\pi R H \sigma_b - P}, \quad C = \frac{\sigma_b H - R Q}{R Q}, \quad \bar{t}_1 = 0.211,$$

получаем:

$$\left(\frac{\sigma_b H - RQ}{RQ}\right) \left(\frac{P}{2\pi RH\sigma_b - P}\right) \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 0.909,$$

$$\left(\frac{\sigma_b H - RQ}{RQ}\right) \left(\frac{P}{2\pi RH\sigma_b - P}\right) \left[\left(\bar{t}^* + \frac{19}{9} (\bar{t}^*)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} (0.211)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 0.909.$$

В полученное соотношение входят безразмерные параметры, используем ранее введенное обозначение:

$$\bar{C} \equiv C = \frac{\sigma_b H - RQ}{RQ}, \quad \bar{P} = \frac{P}{2\pi RH\sigma_b - P}.$$

Тогда уравнение для нахождения времени до разрушения при учете векторного характера накопления поврежденности будет иметь следующий вид:

$$\bar{C}\bar{P} \left[\left(\bar{t}^* + \frac{19}{9} (\bar{t}^*)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} (0.211)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 0.909. \quad (4.10)$$

В следующем п. 4.3. приведены результаты вычислений.

4.3. Результаты вычисления времен до разрушения оболочки с учетом скалярного и векторного параметров поврежденности. Анализ полученных результатов.

Результат вычисления времени до разрушения при использовании скалярного параметра накопления поврежденности.

Примем следующие значения безразмерных параметров \bar{C} и \bar{P} : $\bar{C} = \bar{P} = 1$. Тогда в соответствии с уравнением (4.6) время до разрушения с учетом скалярного параметра поврежденности будет равно:

$$\bar{t}^* \equiv \bar{t}_\omega^* = 0.614.$$

Результат вычисления времени до разрушения при использовании векторного параметра накопления поврежденности.

Примем аналогично значения параметров $\bar{C} = \bar{P} = 1$. Тогда в соответствии с уравнением (4.10) время до разрушения с учетом векторного параметра поврежденности будет равно:

$$\bar{t}^* \equiv \bar{t}_\Omega^* = 0.817.$$

Таким образом, время до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности. Отношение времен до разрушения равно $\xi = \bar{t}_\Omega^* / \bar{t}_\omega^* = 1.33$.

Проведенное исследование описывает различие в учете механизмов накопления повреждений при применении скалярного и векторного параметров поврежденности с использованием дробно-линейной модели ползучести и длительного разрушения при длительном высокотемпературном нагружении в активной среде. Полученный результат подтверждает аналогичные

результаты, полученные авторами в статье [6] при исследовании длительного нестационарного нагружения пластины во взаимно ортогональных плоскостях. В указанной работе [6] отношения времен до разрушения $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^*$ в зависимости от соотношения величин изгибающих моментов находятся в диапазоне $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1.15 - 1.39$.

В завершение статьи отметим, что предлагаемый подход может вполне использоваться и при комбинированных программах нагружения, когда в течение одной стадии одновременно действуют нагрузки различного вида. Скалярный подход позволяет аддитивно учитывать накопления поврежденности от каждого вида нагрузки как в пределах одной стадии, так и при переходе к последующей стадии. При векторном подходе накопленная поврежденность на предыдущей стадии от определенного вида нагрузки учитывается в соответствующей компоненте вектора поврежденности на следующей стадии нагружения.

Заключение. Проведено исследование длительного разрушения длинной тонкостенной цилиндрической оболочки без днищ при ползучести в условиях нестационарного сложного напряженного состояния с учетом влияния активной окружающей среды. Влияние окружающей среды на ползучесть и длительную прочность оболочки определяется диффузионным проникновением элементов окружающей среды в материал оболочки. С помощью кинетической теории Ю.Н. Работнова определены времена до разрушения оболочки, которые определяются при использовании дробно-линейной модели ползучести и длительного разрушения. В рассматриваемую модель входит предел прочности материала при соответствующей температуре, имеющий роль предельного напряжения. Для учета накопления повреждений в процессе ползучести и определения критерия до разрушения используются скалярный и векторный параметры поврежденности. Определены особенности использования дробно-линейной модели для описания процессов длительного разрушения.

В результате предлагаемого метода получены безразмерные времена до разрушения цилиндрической оболочки при длительном нестационарном нагружении в активной среде. Реальное размерное время до разрушения связано с безразмерным посредством коэффициента диффузии активной среды и толщины цилиндрической оболочки. Проведено сравнение времен до разрушения при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Время до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности.

Настоящее исследование имеет фундаментальный характер для развития определяющих и кинетических соотношений в теории ползучести и длительной прочности материалов и элементов конструкций с учетом влияния активных сред. Также проведенное исследование имеет прикладной аспект. Предлагаемые подходы и результаты исследования могут быть применены в энергетической, химической и авиационно-космической отраслях промышленности.

Автор посвящает статью памяти своего учителя — профессора, д.ф.-м.н. Александра Михайловича Локошенко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
3. *Локощенко А.М., Фомин Л.В.* Моделирование поведения материалов и элементов конструкций, находящихся под воздействием агрессивных сред (обзор) // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 2. С. 145–179.
4. *Фомин Л.В.* Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. 2013. Т. 3. № 32. С. 87–97. <http://doi.org/10.14498/vsgtu1228>
5. *Fomin L.V.* Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // Mech. Compos. Mater. 2017. V. 52. № 6. P. 741–750. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9624-5>
6. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.* Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Appl. Math. Model. 2018. V. 60. P. 478–489. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>
7. *Фомин Л.В., Басалов Ю.Г., Локощенко А.М.* Об учете влияния коррозионных процессов на длительное разрушение стержня, находящегося в условиях ползучести // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25. № 3. С. 327–335. https://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2019.25.03.327_335.03
8. *Фомин Л.В., Басалов Ю.Г.* О длительном разрушении составного растягиваемого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 1. С. 102–114. <https://doi.org/10.31857/S0572329922100087>
9. *Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М.* Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Саратов: Изд-во СГУ, 1987. 228 с.
10. *Овчинников И.Г., Петров В.В.* Математическое моделирование процесса взаимодействия элементов конструкций с агрессивными средами // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. Межвуз. научн. сб. Саратов: СПИ, 1983. С. 3–11.
11. *Овчинников И.Г., Почтман М.Ю.* Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. Днепрпетровск: Изд-во ДГУ, 1995. 192 с.
12. *Овчинников И.Г., Хвалько Т.А.* Работоспособность конструкций в условиях высокотемпературной водородной коррозии. Саратов: Изд-во СГТУ, 2003. 176 с.
13. *Овчинников И.Г., Матора А.В., Наумова Г.А.* Напряженно-деформированное состояние армированных элементов конструкций при воздействии радиационных полей. Саратов: Изд-во СГТУ, 2004. 204 с.
14. *Наумова Г.А., Овчинников И.Г.* Расчеты на прочность сложных стержневых систем и трубопроводных конструкций с учетом коррозионных повреждений. Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. 222 с.
15. *Киселевский В.Н.* Прочность конструкционных материалов ядерных реакторов. Киев: Наук. Думка, 1990. 168 с.
16. *Павлов П.А., Кадырбеков Б.А., Колесников В.А.* Прочность сталей в коррозионных средах. Алма-Ата: Наука, 1987. 272 с.

17. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. 178 с.
18. *Lokoshchenko A.M.* The application of an approximate analysis of the diffusion process for a description of creep and creep rupture // *Int. J. Mech. Sci.* 2005. V. 47. № 3. P. 359–373.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.01.011>
19. *Lokoshchenko A., Fomin L.* Kinetic theory of creep and long-term strength of metals // *Kinetic Theory*. IntechOpen. 2017.
<https://www.intechopen.com/chapters/57137>
20. *Crank J.* The mathematics of diffusion. Second Edition. Oxford: Clarendon Press, 1975. 414 p.
21. *Лейбензон Л.С.* Собрание трудов в 4-х томах. Т. 2. Подземная гидрогазодинамика. М.: Издательство Академии наук СССР, 1955.
22. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of heat in solids. Oxford: Clarendon Press, 1959. 520 p.
23. *Boley B., Weiner J.* The theory of thermal stress. New York: Wiley, 1960. 517 p.
24. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1952. 392 с.
25. *Лембке К.Э.* Движение грунтовых вод и теория водосборных сооружений // Журнал Министерства путей сообщения. 1886. № 2. С. 507–539.
26. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
27. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Гос. н.-техн. изд-во нефт. и горно-топл. лит., 1963. 396 с.
28. *Баренблатт Г.И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР, ОТН. 1954. № 9. С. 35–49.
29. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №1. С. 128–135.
30. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
31. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–92.
32. *Одинг И.А., Фридман З.Г.* Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Заводская лаборатория. 1959. Т. 25. № 3. С. 329–332.
33. *Локощенко А.М.* Применение векторного параметра поврежденности при моделировании длительной прочности металлов // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 93–99.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=26932364>
34. *Качанов Л.М.* Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 11–15.
35. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
36. *Локощенко А.М.* Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 84–97.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=32436997>
37. *Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вест. сам. гос. техн. уни-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020 Т. 24. № 2. С. 275–318.

<https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>

38. Наместникова И.В., Шестериков С.А. Векторное представление параметра поврежденности. // Деформирование и разрушение твердых тел. Сб. трудов Института механики МГУ. Издательство Московского университета, 1985. С. 43–52.

ON THE APPLICATION OF A LINEAR FRACTIONAL MODEL IN THE PROBLEM OF LONG-TERM DESTRUCTION OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER CREEP CONDITIONS IN AN ACTIVE MEDIUM

L. V. Fomin^{a, *}

^a*Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: fleonid1975@mail.ru*

Abstract – The long-term destruction of a long thin-walled cylindrical shell during creep under conditions of a non-stationary complex stress state is studied, taking into account the influence of the active medium. The influence of the active medium on the creep and long-term strength of the shell is determined by the diffusion penetration of medium elements into the shell material. Using the kinetic theory of Yu.N. Rabotnov determined the times to fracture of such a shell under unsteady loading. A singular linear fractional model of creep and long-term strength is used, in which the ultimate strength of the material at the appropriate temperature plays the role of the ultimate stress. To take into account the accumulation of damage during creep and determine the criterion before failure, scalar and vector damage parameters are used, while the components of the vector damage parameter are related to the space of principal stresses. To estimate the rate of the diffusion process, an approximate method for solving the diffusion equation is used, based on the introduction of a diffusion front. Taking into account the influence of the medium on the time to fracture is carried out by introducing a function of the integral average concentration into the constitutive and kinetic linear fractional relations. A comparison of times to fracture using scalar and vector damage parameters was carried out. The features of using a linear fractional model to describe processes of long-term destruction are determined.

Keywords: cylindrical shell, unsteady loading, creep, long-term destruction, linear fractional model, active medium, diffusion, diffusion front, scalar damage parameter, vector damage parameter

REFERENCES

1. *Rabotnov Yu.N.* Creep Problems in Structural Members. Amsterdam. Amsterdam: North-Holland, 1969.
2. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Long-Term Strength of Metals. London–New York. CISP. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca. Raton, 2018. 545 p.

3. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.* Modeling the behavior of materials and structural elements exposed to aggressive environments (review) // *Probl. Strength Plasticity*. 2018. V. 80. № 2. P. 145–179.
4. *Fomin L.V.* Description of creep rupture strength of tensile rod with rectangular and circular cross-section at high temperature air media // *J. Samara State Tech. University, Ser. Phys. & Math. Sciences*. 2013. V. 3. № 32. P. 87–97.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1228>
5. *Fomin L.V.* Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // *Mech. Comp. Mater.* 2017. V. 52. № 6. P. 741–750.
<https://doi.org/10.1007/s11029-017-9624-5>
6. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.* Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // *Appl. Math. Model.* 2018. V. 60. P. 478–489.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>
7. *Fomin L.V., Basalov Yu.G., Lokoshchenko A.M.* On taking into account the influence of corrosion processes on long-term destruction of a rod under creep conditions // *Mech. Comp. Mater. Struct.* 2019. V. 25. № 3. P. 327–335.
https://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2019.25.03.327_335.03
8. *Fomin L.V., Basalov Yu.G.* On the long-term fracture of a composite tensile rod under creep conditions // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. P. 84–94.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422100338>
9. *Petrov V.V., Ovchinnikov I.G., Shikhov Yu.M.* Calculation of structural elements interacting with an aggressive environment (monograph). Publishing house SSU, 1987. 228 p.
10. *Ovchinnikov I.G., Petrov V.V.* Mathematical modeling of the process of interaction of structural elements with aggressive environments // *Deformation of materials and structural elements in aggressive environments*. Interuniversity. Scientific Sat. Sarat. Polytech. Institute, Saratov. 1983. P. 3–11.
11. *Ovchinnikov I.G., Pochtman M.Yu.* Thin-walled structures under conditions of corrosive wear. Calculation and optimization (monograph). Dnepropetrovsk: DSU Publishing House, 1995. 192 p.
12. *Ovchinnikov I.G., Khvalko T.A.* Performance of structures under conditions of high-temperature hydrogen corrosion (monograph). Saratov: Publishing house of SSTU, 2003. 176 p.
13. *Ovchinnikov I.G., Matora A.V., Naumova G.A.* Stress-strain state of reinforced structural elements under the influence of radiation fields. Saratov: Publishing house of SSTU, 2004. 204 p.
14. *Naumova G.A., Ovchinnikov I.G.* Strength calculations of complex rod systems and pipeline structures taking into account corrosion damage. Saratov: Publishing house Sarat. State those. Univ., 2000. 222 p.
15. *Kiselevsky V.N.* Strength of structural materials of nuclear reactors / Rep. ed. A.A. Lebedev. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Strength Problems. Kyiv: Nauk. Dumka, 1990. 168 p.
16. *Pavlov P.A., Kadyrbekov B.A., Kolesnikov V.A.* Strength of steels in corrosive environments. Alma-Ata: Science, 1987. 272 p.
17. *Lokoshchenko A.M.* Creep and long-term strength of metals in aggressive environments”. Moscow: Publishing house Moscow University, 2000. 178 p.

18. *Lokoshchenko A.M.* The application of an approximate analysis of the diffusion process for a description of creep and creep rupture // *Int. J. Mech. Sci.* 2005. V. 47. P. 359–373. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.01.011>
19. *Lokoshchenko A., Fomin L.* Kinetic Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals. Kinetic Theory. G.Z. Kyzas, A.C. Mitropoulos. IntechOpen, 2017. <https://www.intechopen.com/chapters/57137>
20. *Crank J.* The Mathematics of Diffusion. Clarendon Press. Second Ed. Oxford, 1975. 414 p.
21. *Leibenzon L.S.* Collected works in 4 volumes (set). V. 2 Underground fluid dynamics'. M.: Publishing house of the USSR Academy of Sciences, 1955.
22. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press. Second Ed. Oxford, 1959. 520 p.
23. *Boli B., Wayner J.* The theory of thermal stress. M.: Mir, 1964. 517 p.
24. *Lykov A.V.* Theory of thermal conductivity. M.: State. publishing house of technical theory. lit., 1952. 392 p.
25. *Lembke K.E.* Movement of groundwater and the theory of drainage structures // *J. Ministry of Railways.* 1886. № 2. P. 507–539.
26. *Leibenzon L.S.* Movement of natural liquids and gases in porous media. M.–L.: Gostekhizdat, 1947.
27. *Charny I.A.* Underground fluid dynamics. M.: State. Sci. Tech. Oil Publ. House Mining Fuel Lit., 1963. 396 p.
28. *Barenblatt G.I.* On some approximate methods in the theory of one-dimensional unsteady filtration of liquid in elastic mode // *Izv. USSR Academy of Sciences, Department of Engineering. Sci.* 1954. № 9. P. 35–49.
29. *Shesterikov S.A., Yumasheva M.A.* On the problem of thermal destruction during rapid heating // *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mech. Solids.* 1983. № 1. P. 128–135.
30. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. Second ed. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
31. *Shesterikov S.A., Yumasheva M.A.* Concretization of the equation of state in the theory of creep // *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mech. Solids.* 1984. № 1. P. 86–92.
32. *Oding I.A., Friedman Z.G.* The role of surface layers during long-term destruction of metals under creep conditions // *Factory Laboratory.* 1959. V. 25. № 3. P. 329–332.
33. *Lokoshchenko A.M.* Use of a vector damage parameter in modeling of long-term strength of metals // *Mech. Solids.* 2016. V. 51. P. 315–320. <https://doi.org/10.3103/S0025654416030080>
34. *Kachanov L.M.* Fracture under creep conditions under complex loading // *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mech. Solids. Bodies.* 1972. № 5. P. 11–15.
35. *Kachanov L.M.* Fundamentals of fracture mechanics. M.: Nauka, 1974. 312 p.
36. *Lokoshchenko A.M.* Modeling the long-term strength of metals in an unsteady complex stress state // *Mech. Solids.* 2018. V. 53. P. 88–100. <https://doi.org/10.3103/S0025654418030081>
37. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud W.V., Basalov Yu.G., Agababyan V.S.* Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review) // *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. & Math. Sci.* 2020. V. 24. № 2. P. 275–318. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>
38. *Namestnikova I.V., Shesterikov S.A.* Vector representation of the damage parameter", Deformation and Destruction of Solids. Collection of works of the Institute of Mechanics of Moscow State University. M.: University Publishing House, 1985. P. 43–52.