

УДК 531.311

ДИНАМИКА ПРЕЦЕССИИ ВОЛЧКА ТОМПСОНА

© 2025 г. А. И. Андреев^а, *, А. Е. Семенов^а,
Б. М. Славин^а, В. А. Чанчиков^а

^аФедеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования, Астраханский государственный технический университет,
Астрахань, Россия

*E-mail: aresut79@mail.ru

Поступила в редакцию 28.10.2024 г.

После доработки 28.12.2024 г.

Принята к публикации 28.12.2024 г.

В данной работе исследовались вопросы динамики прецессии волчка Томпсона. Разработаны стенды для исследования и проведены эксперименты. На основании полученных данных показаны зависимости угловой скорости прецессии при высоких начальных значениях до 340 рад/с. Проведены аналитические исследования, и получены зависимости изменения энергии в ходе прецессии. Получена связь между коэффициентом шероховатости и возникающим моментом трения. Получены зависимости между работой трения и коэффициентом шероховатости, что дает понимание о динамике энергетических показателей в ходе всего процесса. Открытым остается вопрос о применении вязкой модели трения и более детального исследования коэффициента пропорциональности для установления уточненных зависимостей для прецессии. Полученные экспериментальные данные показывают влияние коэффициента шероховатости на прецессию и на возникновение силы трения, приводящей к опрокидыванию волчка. Дальнейшие исследования в этом вопросе должны показать возможность применимости вязкой модели и изучения критических точек, а именно подъема на ножку и прохождения наибольшего значения момента инерции.

Ключевые слова: угловая скорость, осевой момент инерции, волчок Томпсона, прецессия волчка Томпсона, кинетический момент, потери на трение, коэффициент шероховатости, полная энергия прецессии, потенциальная энергия, кинетическая энергия

DOI: 10.31857/S1026351925030129, **EDN:** BBIBHW

1. Введение. Современные работы в области движения и динамики волчка Томпсона при его прецессии показывают, что на волчок, помимо силы тяжести и реакции опорной плоскости, действуют силы сухого трения (включая силы трения скольжения, верчения, качения) и наложена односторонняя голономная связь: скорость низшей точки шара

имеет неотрицательную проекцию на вектор восходящей вертикали (возможны подскоки волчка над опорной плоскостью) [1, 2].

Значимым моментом при рассмотрении динамики такого волчка является вопрос его взаимодействия с плоскостью движения в точке контакта. Сравнение моделей трения, частично представленное в работе [3], показывает, что учет размеров пятна контакта приводит к выводу о невозможности движения шара без проскальзывания. Тем не менее если в модели точечного контакта коэффициент трения достаточен для того, чтобы предотвратить скольжение, то скорости скольжения в распределенной модели крайне малы при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом различие между траекториями систем двух типов также стремится к нулю. Данный результат можно обобщить для волчков, не обладающих сферической симметрией. Однако при этом следует иметь в виду, что односторонний характер связи между телом и плоскостью может приводить к парадоксам несуществования или неединственности решений [4]. То же получается при аппроксимации реакции связей силами трения как сухого, так и вязкого [5, 6].

Детальное рассмотрение процесса показывает, что полная механическая энергия убывает при движении без проскальзывания значительно медленнее, чем при движении с проскальзыванием [7, 8].

Известная зависимость момента и силы трения от окружной скорости, скорости скольжения v , полученная В.Ф. Журавлёвым в аппроксимации Паде,

$$M = -M_0 \frac{u}{|u| + \alpha|v|}, \quad F = -F_0 \frac{v}{|v| + \beta|u|}, \quad u^2 + v^2 \neq 0 \quad (1.1)$$

с учетом закономерностей изменения угловой скорости, показывает, что в общем виде свойственна голономная постановка задачи.

В работе [9] поясняется, что в основу теории Контенсу–Журавлева положена гипотеза о локальной сферичности контактирующих тел, при этом распределение нормальных напряжений в площадке контакта описано соотношением из теории Герца [10]:

$$\sigma = \frac{3N}{2\pi R^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \quad (1.2)$$

где N – реакция опорной поверхности, R – радиус круговой области контакта, ρ – расстояние от центра до произвольной точки круга контакта.

В общем случае данный вопрос был детально изучен в работах и описан на основе аналитических решений Н.И. Мухелишвили [11, 12], Л.А. Галиным [13, 14], Дж. Гладуэллом [15].

Проведенные исследования в работе А.В. Карапетяна, М.А. Муницына [16] показывают динамику волчка Томпсона при вязком трении, в которой предполагается что со стороны плоскости на шар действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта с плоскостью.

Для гладкой поверхности и поверхности со значительным трением приводятся уравнения критической точки эффективного потенциала вида $W(\theta)$. Для последнего случая уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -k \frac{v}{m} - k \frac{r}{ma} \Phi(\omega_3) \frac{\cos \omega t}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \dot{\omega} &= -k \frac{r}{C} v \sqrt{1-x^2} \cos \omega t - k \frac{r^2}{A} \Phi(\omega_3).\end{aligned}\quad (1.3)$$

При граничных условиях при малом трении v является малой величиной. Где A и C его экваториальный и осевой моменты инерции, величина ω определяется первым равенством:

$$\omega = \begin{cases} \frac{-\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)+k^2-k}}{2a(bx-1)}, & \text{при } \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_-, \sigma_+), \\ \frac{\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)+k^2-k}}{2a(bx-1)}, & \text{при } \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_+, +\infty). \end{cases} \quad (1.4)$$

Дальнейший анализ качения твердых тел показал, что при движении волчка наблюдается эффект разворота. Он наблюдался в работах А. Орома при численном моделировании динамики волчка Томпсона [17] и в недавней экспериментальной работе Р. Кросса [18]. Практика модификации идеализированных моделей хорошо зарекомендовала себя при качественном объяснении эффектов в задачах о волчке Томпсона [18] и в задаче о кельтском камне [19]. Несмотря на большой разброс экспериментальных и теоретических данных, модифицированные модели являются простым инструментом для качественного объяснения эффектов, возникающих при движении тел.

В работе [18] четыре различных волчка были исследованы путем съемки их поведения с помощью высокоскоростной видеокамеры: два — с остроконечным колышком, один — со сферическим колышком диаметром 15 мм и волчком-типпе. Было обнаружено, что все они прецессируют со скоростью, соответствующей ожидаемой для устойчивой прецессии. Для волчков с заостренными концами наблюдалась также высокочастотная прецессия, совпадающая с частотой вращения на высоких спиновых частотах и, скорее всего, обусловленная небольшой асимметрией в каждом волчке.

Исследование динамики волчка Томпсона в работе [20] показало, что неголономная постановка задачи несостоятельна ввиду того, что условие отсутствия проскальзывания при качении тела по шероховатой поверхности, в частности прецессии волчка Томпсона, приводит к интегрируемости кинематического условия и, как следствие, к голономности задачи. Работа также указывает на ошибочность при рассмотрении прецессии неуравновешенного волчка применения закона для силы сухого трения:

$$\mathbf{F} = -F_0 \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} \quad (1.5)$$

вместо

$$\mathbf{F} = -F_0 \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}| + \beta|u|}, \quad (1.6)$$

которые совпадают при отсутствии проскальзывания $u=0$. Это также подтверждается фактом снижения силы трения скольжения при появлении верчения. Кроме того, использование уравнений для вращательного движения твердого тела

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{M}(\mathbf{e}_i, \omega), \dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{K} \times \frac{\mathbf{e}_i}{A}, \\ \dot{H} &= (\mathbf{M} * \mathbf{e}_i), A\mathbf{e}_i \times \ddot{\mathbf{e}}_i + H\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{M}_\perp\end{aligned}\quad (1.7)$$

(\mathbf{e}_i здесь — вектор, обозначающий направление оси динамической симметрии) для данного случая имеет ряд преимуществ по сравнению с наиболее употребляемыми уравнениями (уравнение в переменных Андурайе, уравнение Эйлера и т.д.), прежде всего существенно упрощает динамическую часть (первое уравнение 1.7). Помимо этого, уравнения не вырождаются ни при каких значениях переменных. Первое и второе уравнения в (1.7) записаны в наблюдаемых переменных, что позволяет получить простое представление о движении волчка.

Вопросы трения и постановки голономности задачи также раскрыты в работах [21–23].

Полная энергия последовательного движения переворота между двумя устойчивыми положениями, являющимися критическими точками в динамике волчка Томпсона, моделируется численно, с использованием сферической модели волчка с тензором инерции, основанном на вязком трении либо на экспериментальных данных. Следует также отметить, что трение на основе кулоновского трения также может приводить к возникновению прецессии [24], что дает начальный момент, который скорее является полиномиальным, чем экспоненциальным. Анализ линейной устойчивости, основанный на вязком трении, показывает, что величина коэффициента трения важна для скорости роста и анализа предела устойчивости.

В данной работе рассматривается динамика изменения моментов, вызывающих опрокидывание волчка и зависимости взаимодействия волчка с поверхностью для получения зависимости между коэффициентом шероховатости и моментом трения. Полученные данные полезны для прикладных исследований в области триботехники, а также для получения и изучения новых методов измерения шероховатости.

2. Материалы и методы. В ходе работы проводились опыты и исследовалась механическая прецессия с изменением угла прецессии. Для этого были разработаны стенды для изучения возникающих сил и моментов. Сначала прецессия исследовалась с точки зрения возникающих сил и моментов. Для этого в подвесе закреплялось тело с нерегулярной прецессией, в качестве которого были выбраны два волчка Томпсона, изготовленные из стали и пластмассы, массой 30 г. Тело приводилось во вращение и опускалось на подложку с известной шероховатостью (по поверочному образцу), возникающие силы и моменты измерялись тензодатчиками, оснащенными аналого-цифровым преобразователем — НХ711 (рис. 1). В качестве измерительного прибора использовался контроллер Arduino Uno. Для сверки данных использовались

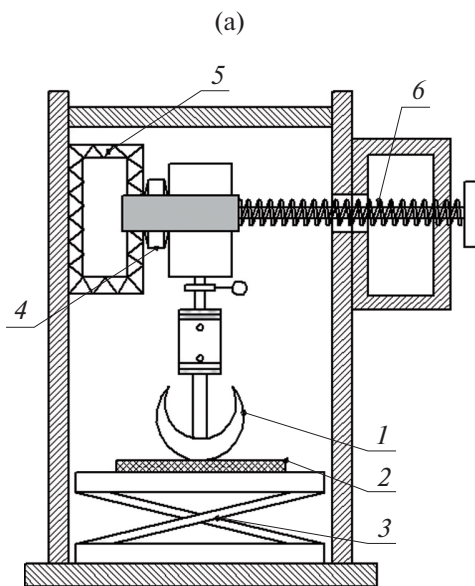


Рис. 1. Стенд для исследования прецессии твердого тела в подвесе:
(а) – схема, (б) – вид рабочей части: 1 – волчок, соединенный с электродвигателем, 2 – подложка, 3 – подъемный столик, 4 – тензодатчик, 5 – демпфер, 6 – задаточная пружина.

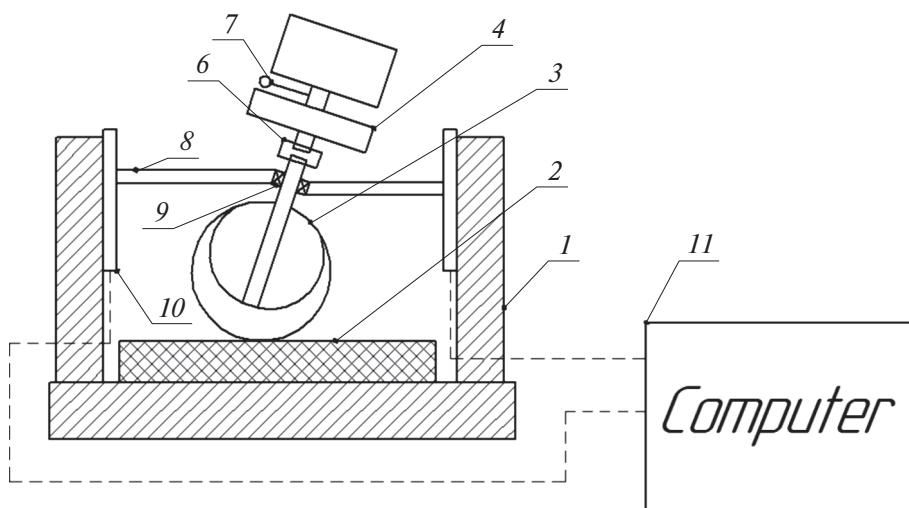


Рис. 2. Стенд для исследования прецессии твердого тела в свободном состоянии: 1 – корпус, 2 – подложка, 3 – пластины, 4 – муфта, 5 – электродвигатель, 6 – расцепление, 7 – тахометр, 8 – направляющие, 9 – подшипник, 10 – тензодатчики, 11 – компьютер (HX711 + Arduino Uno + ПК).

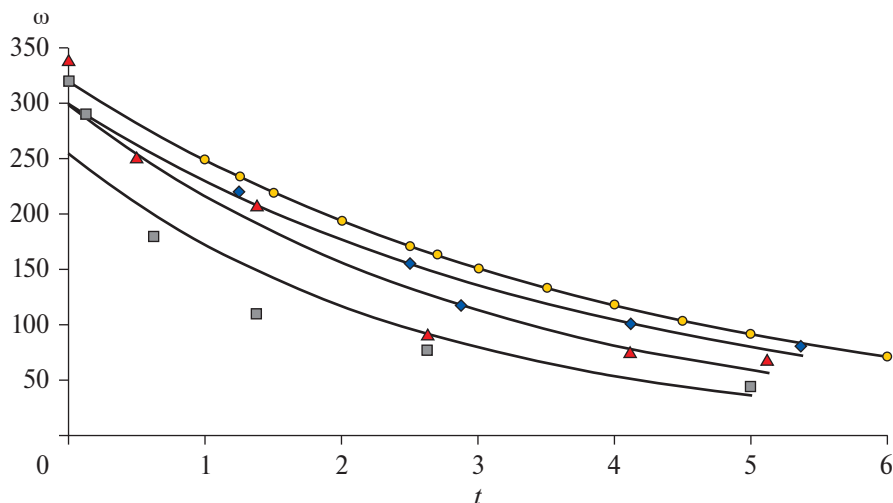


Рис. 3. Изменение угловой скорости ω (рад/с) от времени t (с) в ходе свободной прецессии на поверхностях с разной шероховатостью при начальной угловой скорости от 250 до 340 рад/с: теоретическое решение (○), коэффициент трения $\xi = 0.22$ (◇), коэффициент трения $\xi = 0.31$ (Δ), коэффициент трения $\xi = 0.51$ (□).

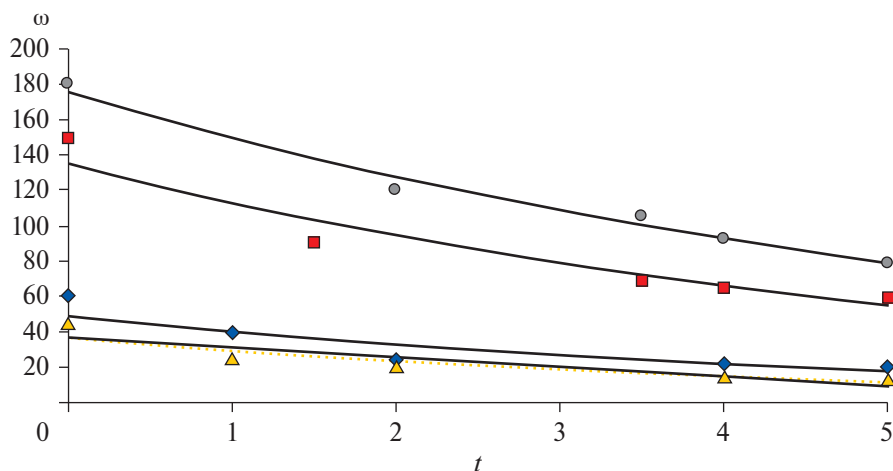


Рис. 4. Изменение угловой скорости ω (рад/с) от времени t (с) в ходе свободной прецессии на поверхностях с разной шероховатостью при начальной угловой скорости от 35 до 180 рад/с: стальной волчок по стали (○), стальной волчок по бетону (□), пластиковый волчок по стали (◇), пластиковый волчок по бетону (Δ).

также дополнительные механические динамометры, установленные в полости демфера 5 на рис. 1.

Далее исследовалась прецессия с точки зрения движения центра тяжести и положения “ножки” волчка. Для этого был разработан стенд, в котором

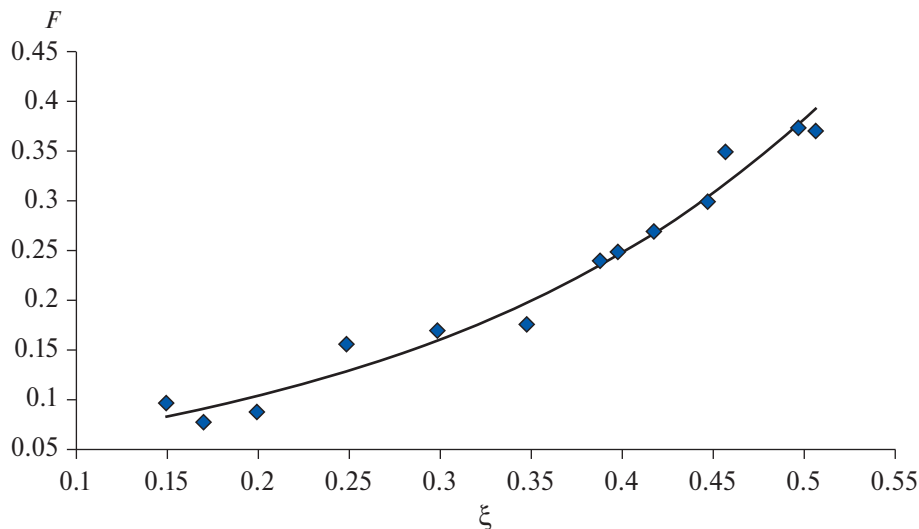


Рис. 5. Зависимость возникающих усилий (от момента трения) F (Н) от коэффициента ξ шероховатости (угловая скорость в данном эксперименте 340 рад/с).

волчок Томпсона приводился во вращение и опускался на поверхность с заданной шероховатостью (рис. 2).

При достижении нужной частоты вращения волчок отсоединяли от электродвигателей с помощью разъединительной электромукфы, и он опускался на подложку и вращался в свободном состоянии с учетом сопротивления направляющей. Затем полученные данные обрабатывались и анализировались.

3. Экспериментальные данные. Для построения механической модели и нахождения параметров измерялись усилия в зависимости от изменения коэффициента шероховатости. Изменение энергетических показателей в ходе прецессии исследовались на свободной прецессии и опирались на изменение угловой скорости. На рис. 3 и 4 показаны зависимости изменения угловой скорости от времени при свободной прецессии при различных начальных скоростях и коэффициентах трения между поверхностью и волчком.

На рис. 5 показаны данные по изменению возникающих усилий при различных коэффициентах шероховатости поверхности.

Полученные результаты показывают, что изменение усилий от момента трения носит нелинейный характер и близко к экспоненциальной зависимости. Коэффициент корреляции для экспоненциальной зависимости — 0.985, а для квадратичной — 0.974.

Зависимость возникающих усилий от момента трения показывает, что коэффициент шероховатости в зависимости от возникающего момента имеет вид:

$$\xi = C \ln |M|. \quad (3.1)$$

При этом входящие как в уравнения усилия от момента трения, так и в уравнения угловой скорости формируют динамику прецессии [25–28].

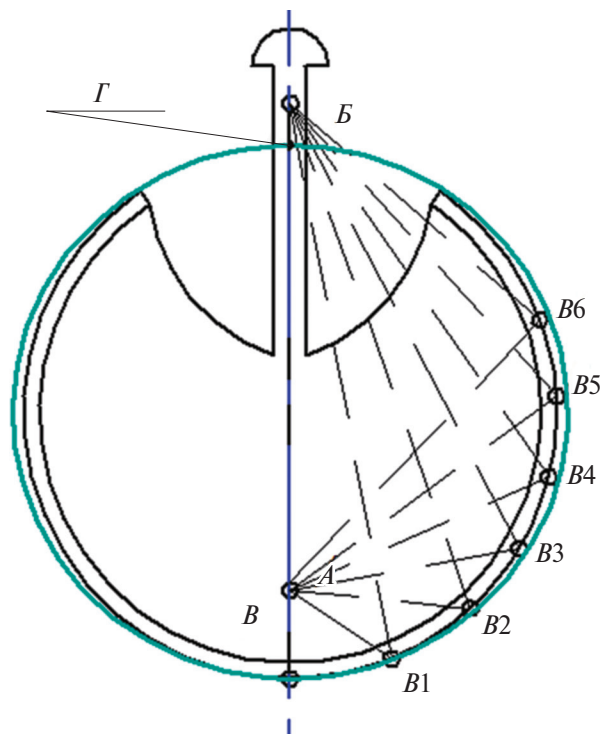


Рис. 6. Движение точки касания волчка с поверхностью относительно центра тяжести: A — центр тяжести, B — ножка волчка, $B1-B6$ — совокупность точек касания, Γ — зона невозможности контакта с поверхностью.

Движение центра тяжести при возникновении прецессии имеет вид, показанный на рис. 6 и 7.

Полученные на основе визуальных наблюдений данные показывают, что сумма расстояний между точкой контакта, центром масс, центром контакта и ножкой остается постоянной, что свидетельствует о движении первой фазы прецессии в боковом сечении по эллипсу, близкому к окружности.

При переходе на ножку точка выходит за траекторию эллипса (окружности), но после падения скорости вращения возвращается на траекторию эллипса. Очевидно, что центр тяжести двигается по спирали, поднимаясь относительно плоскости.

На основании полученных экспериментальных результатов выведены энергетические и механические зависимости.

4. Расчетные данные. Изменение положения ножки волчка и центра масс приводит к изменению осевого момента инерции, который достигает максимума при угле между ножкой и контактной поверхностью около 90° . При этом прецессия волчка Томпсона начинается только при начальной угловой скорости, выше критической и зависящей от моментов инерции J_x , J_z , расстояний ρ , h и веса тела P [5]:

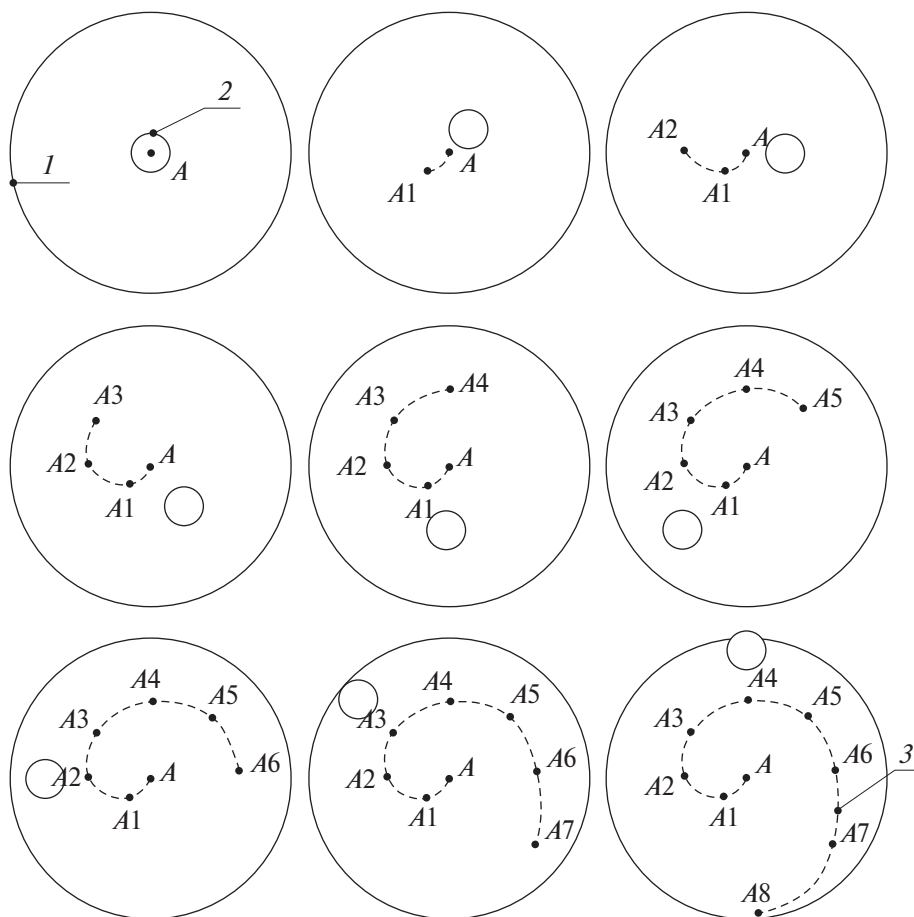


Рис. 7. Движение центра тяжести относительно начального положения центра тяжести: 1 – тело волчка, 2 – ножка, 3 – траектория движения центра тяжести, A1–A8 – начальное положение центра тяжести и его движение с течением времени.

$$\omega^2 = \frac{(h - \rho) \cdot P}{J_x \left(\frac{\rho}{h} \right) \cdot \left(\frac{J_z}{J_x} - \frac{\rho}{h} \right)}. \quad (4.1)$$

При этом возникающий момент импульса зависит от начальных условий и не изменяется вплоть до подъема волчка на ножку и его остановки:

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} \int_0^t m R^2 dt, \quad (4.2)$$

где R – радиус волчка, связанный с его формой.

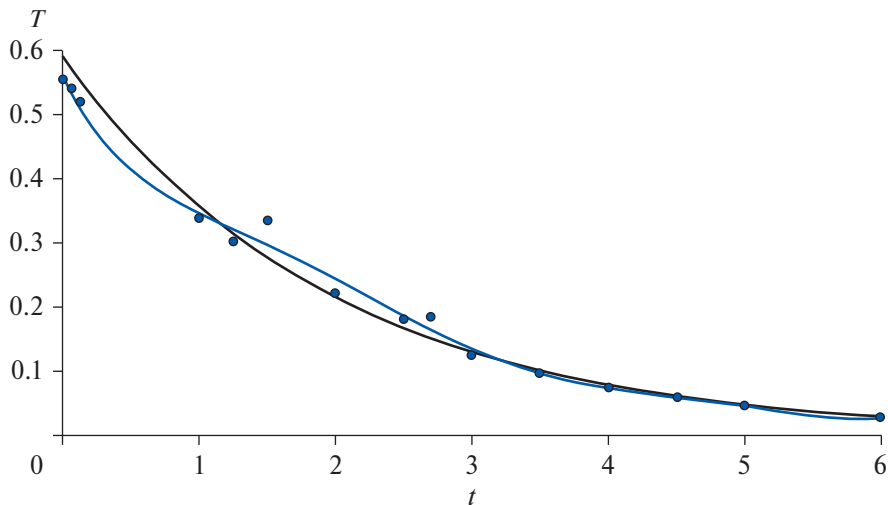


Рис. 8. Изменение кинетической энергии T (Дж) от времени t (с) при начальной скорости угловой скорости 340 рад/с (черной линией показана экспоненциальная зависимость, синей линией — аппроксимация с учетом подъема точек в момент максимального момента инерции).

Волчок является по своей форме усеченным шаром, что также вносит влияние в динамику прецессии.

В общем плане изменение энергии волчка при прецессии показывает, что влияние начальной скорости и осевого момента инерции существенно [1, 28]:

$$K_0 = \dot{\omega} \frac{dJ}{dt} + K_0^{rel}, \quad (4.3)$$

$$T = \frac{d(\omega^T) J d\omega}{2dt} + \frac{d(\omega^T)}{dt} \cdot K_0^{rel} + T^{rel} + m g i_e^T \frac{dC}{dt}, \quad (4.4)$$

$$E = T + U = \frac{d(\omega^T) J d\omega}{2dt} + \frac{d(\omega^T)}{dt} \cdot K_0^{rel} + T^{rel} + m g i_e^T \frac{dC}{dt}, \quad (4.5)$$

где J — момент инерции, K_0^{rel} — кинетический момент, t — изменение времени, T^{rel} — кинетическая энергия, e — единичный вектор, направленный по вектору центра, C — коэффициент пропорциональности.

Для осесимметричного волчка из теоремы об изменении кинетического момента необходимо учитывать первый интеграл для описания кинетического момента на вертикальную ось:

$$i^T K_0 = i^T \left(\frac{d\omega}{dt} \frac{dJ}{dt} + K_0^{rel} \right) = \frac{dK}{dt}. \quad (4.6)$$

Полное изменение энергии, зависящее от взаимодействия волчка с поверхностью, потери энергии на диссипацию и изменения момента

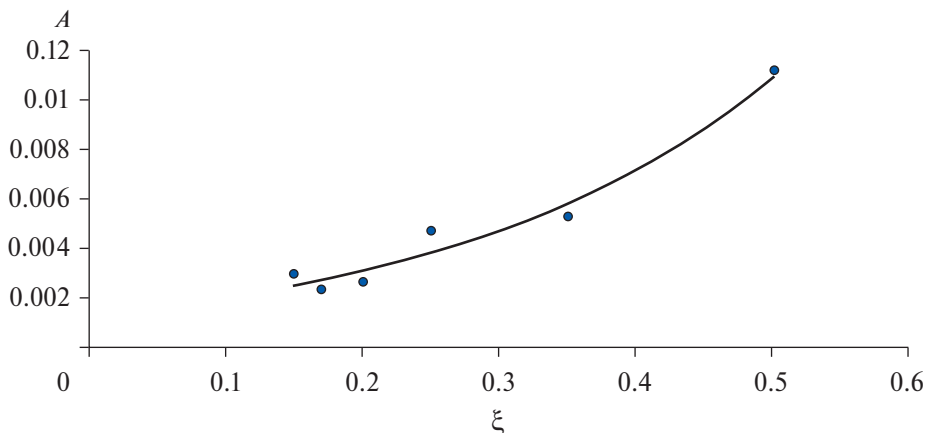


Рис. 9. Зависимость работы силы трения A (Дж) от коэффициента ξ .

инерции и потенциальной энергии, имеет нелинейный характер, схожий с экспоненциальным:

$$dE = \frac{1}{2} J \omega_0^2 e^{-2C\xi t} + mg \frac{dh}{dt} + P_{\text{тр}}, \quad (4.7)$$

где $P_{\text{тр}}$ — потери на трение, h — положение центра тяжести, ω_0 — начальная угловая скорость, t — время прецессии, ξ — коэффициент трения, C — коэффициент пропорциональности.

Взаимосвязь изменения полной энергии и возникающего момента трения также имеет экспоненциальный характер:

$$dE = \frac{1}{2} J \omega_0^2 e^{-2C \ln M} + mg \frac{dh}{dt} + P_{\text{тр}}. \quad (4.8)$$

Особый интерес при этом представляет изменение в ходе прецессии кинетической энергии (рис. 8) и работы силы трения (рис. 9). В изменении кинетической энергии точки, возникающие в момент прохождения максимального момента инерции и подъема на ножку, отклонение энергии прослеживались во всех экспериментах, однако однозначного объяснения не нашли.

Полученные зависимости согласуются с экспериментом, проведенным для высоких начальных угловых скоростей волчка Томпсона и его прецессии для поверхностей с относительно высокой шероховатостью. Полученные данные позволяют сделать выводы о возникновении прецессии волчка и возможности его практического применения.

5. Результаты и обсуждение. Данные показывают, что при высоких угловых скоростях изменение энергии носит экспоненциальный характер с поправкой на прохождение точки максимального момента инерции. При малых угловых скоростях это изменение лучше описывается полиномиальной и линейной зависимостями. Полученная взаимосвязь между коэффициентом шероховатости и возникающим моментом трения (3.1) позволяет рекомендовать волчок

Томпсона в качестве тела для трибометров с целью триботехнических экспресс-исследований материалов и образцов.

Ранее проведенные исследования показывают, что с увеличением скорости проскальзывания и с уменьшением коэффициента шероховатости поверхностей трения скорость изменения угловой скорости существенно меняется. Так, при движении по гладкой поверхности существенно возрастает скорость проскальзывания, с одновременным уменьшением угловой скорости, это заставляет поднять вопрос о влиянии ряда других факторов, например влияния моментов инерции и возможности перехода к более сложной постановке задачи.

Зависимость возникающей работы от коэффициента трения показывает возможность существования вязкой модели трения при возникновении прецессии волчка Томпсона, однако это носит предварительный характер и требует более детальных триботехнических исследований.

Исследование изменения положения масс в ходе прецессии показывает, что момент трения в ходе всего процесса поддерживается на уровне, достаточном для порождения прецессии, и весь процесс зависит только от начального возникающего импульса, симметричность которого еще предстоит установить.

Полученные данные позволяют утверждать, что зависимость между силой трения и коэффициентом трения имеет прикладное значение и в ближайшее время найдет свое применение в машиностроении.

Заключение. Проведенные исследования позволяют связать коэффициент шероховатости и усилия от возникающего момента трения при высоких угловых скоростях при прецессии волчка Томпсона. Данный факт позволяет более детально исследовать модели трения и физику процесса возникновения прецессии у подобных волчков. Это носит как фундаментальное значение для исследования механики твердого тела, так и прикладное — для применения в триботехнике и машиностроении. Открытым остается вопрос о применении вязкой модели трения и более детального исследования коэффициента пропорциональности для установления уточненных зависимостей для прецессии.

Полученные экспериментальные данные показывают влияние коэффициента шероховатости на прецессию и возникновение силы трения, приводящей к опрокидыванию волчка.

Дальнейшие исследования в этом вопросе должны показать возможность применимости вязкой модели и исследования критических точек, а именно подъема на ножку и прохождения наибольшего значения момента инерции

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зобова А.А.* Нестационарные движения двусферического китайского волчка // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-2. С. 143–144.
2. *Коронатов В.А.* О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу–Журавлева // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1. С. 21–28.
<https://doi.org/10.18324/2077-5415-2019-1-21-28>

3. *Ivanov A.P.* Comparative analysis of friction models in dynamics of a ball on a plane // Russ. J. Nonlinear Dynamics. 2010. V. 6. № 4. P. 907–912.
<https://doi.org/10.20537/nd1004015>
4. *Иванов А.П.* Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 3. С. 303–312.
5. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
6. *Козлов В.В.* Замечание о сухом трении и неголономных связях // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 903–906.
7. *Журавлев В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. АН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–89.
8. *Журавлев В.Ф., Киреевков А.А.* О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 3–14.
9. *Загордан А.А.* Современное состояние теории шимми // Труды МАИ. 2011. № 47. С. 2.
10. *Hertz N.* Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte // Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes. 1882. P. 449–463.
11. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.–Л.: Гостех-издат, 1946. 448 с.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория. Кручение и изгиб. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 635 с.
13. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–414.
14. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 264 с.
15. *Gladwell G.M.L.* Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. 716 p.
16. *Каранетян А.В., Муницына М.А.* Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды Московского физико-технического института. 2021. Т. 13. № 1 (49). С. 114–121.
https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_1_114
17. *Or A.C.* The dynamics of a tippe-top // SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54. № 3. P. 597–609.
<https://doi.org/10.1137/S0036139992235123>
18. *Cross R.* The rise and fall of spinning tops // Am. J. Phys. 2013. V. 81. № 4. P. 280–289.
<https://doi.org/10.1119/1.4776195>
19. *Takano H.* Spin reversal of a rattleback with viscous friction // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19. № 1. P. 81–99.
<https://doi.org/10.1134/S1560354714010067>
20. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 157–168.
21. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. Т. 3. № 3. С. 58–76.
22. *Каранетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.

23. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 2. С. 194–206.
24. O'Brien S., Synge J.L. The instability of the tippe-top explained by sliding friction // Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A. 1953. V. 56. № 3. P. 23–35.
25. Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П., Семенов А.Е. Исследование динамики силы и момента трения при прецессии волчка Томпсона // ТГиСМ НиП. 2024. № 24. С. 17–22.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-24-17-22>
26. Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П. Исследование динамики кинетической энергии волчка Томпсона // ТГиСМ НиП. 2023. № 21. С. 30–34.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-21-30-34>
27. Андреев А.И., Чанчиков В.А., Славин Б.М., Перекрестов А.П., Козлова И.А. Исследование динамики потенциальной энергии волчка Томпсона и его применение в потенциометрах // ТГиСМ НиП. 2023. № 19. С. 30–34.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-19-30-34>
28. Andreev A.I., Perekrstov A.P. Analysis on non-stationary gyroscopes and their application in measurement technology // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2091. P. 012006.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2091/1/012006>

DYNAMICS OF PRECESSION OF THE THOMPSON TOP

A. I. Andreev^{a,*}, A. E. Semenov^a, B. M. Slavin^a, V. A. Chanchikov^a

^a*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Russia*

**e-mail: aresut79@mail.ru*

Abstract — In this work, the dynamics of precession of the Thompson top was studied. Test benches have been developed and experimental work has been carried out. Based on the data obtained, the dependences of the angular velocity of precession at high initial values of up to 340 rad/s are shown. Analytical studies were carried out and the dependences of energy changes during precession were obtained. The relationship between the roughness coefficient and the resulting friction moment is obtained. The relationships between the work of friction and the roughness coefficient were obtained, which gives an understanding of the dynamics of energy indicators during the entire process. The question remains open about the use of a viscous friction model and a more detailed study of the proportionality coefficient to establish refined dependencies for precession. The experimental data obtained show the influence of the roughness coefficient on precession and on the occurrence of the friction force, leading to the capsizing of the top. Further research in this matter should show the possibility of applicability of the viscous model and the study of critical points, namely the rise to the leg and the passage of the highest value of the moment of inertia.

Keywords: angular velocity, axial moment of inertia, Thompson top, precession of the Thompson top, kinetic momentum, friction losses, roughness coefficient, total precessional energy, potential energy, kinetic energy, practical application of the Thompson top

REFERENCES

1. *Zobova A.A.* Nestacionarnye dvizheniya dvusfericheskogo kitajskogo volchka // *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*. 2011. № 4-2. P. 143–144.
2. *Koronatov V.A.* O suhom trenii pri nepostupatel'nom skol'zhenii tela i kritika teorii Kontensu–Zhuravleva // *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. 2019. № 1. P. 21–28. <https://doi.org/10.18324/2077-5415-2019-1-21-28>
3. *Ivanov A.P.* Sravnenie modelej treniya v dinamike shara na ploskosti // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2010. V 6. № 4. P. 907–912. <https://doi.org/10.20537/nd1004015>
4. *Ivanov A.P.* Ob usloviyah otryva v zadache o dvizhenii tverdogo tela po sherohovatoj ploskosti // *Nelinejnaya dinamika*. 2008. V. 4. № 3. P. 303–312. <https://doi.org/10.20537/nd0803003>
5. *Kozlov V.V.* Realizaciya neintegriruemyh svyazej v klassicheskoj mekhanike // *Dokl. AN SSSR*. 1983. V. 272. № 3. P. 550–554.
6. *Kozlov V.V.* Zamechanie o suhom trenii i negolonomnyh svyazyah // *Nelinejnaya dinamika*. 2010. V. 6. № 4. P. 903–906. <https://doi.org/10.20537/nd1004014>
7. *ZHuravlev V.F.* Zakonomernosti treniya pri kombinacii skol'zheniya i vercheniya // *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2003. № 4. P. 81–89.
8. *ZHuravlev V.F., Kireenkov A.A.* O razlozheniyah Pade v zadache o dvumernom kulonovom trenii // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2005. № 2. P. 3–14.
9. *Zagordan A.A.* Sovremennoe sostoyanie teorii shimmi // *Trudy MAI*. 2011. № 47. P. 2.
10. *Hertz N.* Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte // *Verrhandlungen des Vereins zur Berforderung des Gewerbeleisses, Leipzig*, Nov. 1882.
11. *Muskhelishvili N.I.* Singulyarnye integral'nye uravneniya. Granichnye zadachi teorii funkcij i nekotorye ih prilozheniya k matematicheskoj fizike. – M.-L: Gostekh-izdat, 1946. – 448 pp.
12. *Muskhelishvili N.I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. Osnovnye uravneniya. Ploskaya teoriya. Kruchenie i izgib. M.–L.: Izd-vo AN SSSR, 1949. 635 p.
13. *Galin L.A.* Vdvavlivanie shtampa pri nalichii treniya i scepheniya // *PMM*. 1945. V № 5. P. 413–414.
14. *Galin L.A.* Kontaktnye zadachi teorii uprugosti. M.: Gostekhteorizdat, 1953. 264 p.
15. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity theory. Alphen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. <https://doi.org/10.1002/zamm.19810611228>
16. *Karapetyan A.V., Municyna M.A.* Dinamika volchka tip-top pri vyazkom trenii // *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta*. 2021. V. 13. № 1 (49). P. 114–121. https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_1_114
17. *Or A.C.* The dynamics of a tippe-top // *SIAM J. Appl. Math.* 1994. V. 54. P. 597–609.

- <https://doi.org/10.1137/S0036139992235123>
18. *Cross R.* The rise and fall of spinning tops / *Cross R.* // *Am. J. Phys.* 2013. V. 81. № 4. P. 280–289.
<https://doi.org/10.1119/1.4776195>
 19. *Takano. H.* Spin reversal of a rattleback with viscous friction // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. V. 19. № 1. P. 81–99.
<https://doi.org/10.1134/S1560354714010067>
 20. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* O dinamike volchka Tomsona (tip-top) na ploskosti s real'nym suhim treniem // *Izv. RAN. MTT.* 2005. № 6. P. 157–168.
 21. *Zhuravlev V.F.* O modeli suhogo treniya v zadachah dinamiki tverdyh tel // *Uspekhi mekhaniki.* 2005. V. 3. № 3. P. 58–76.
 22. *Karapetyan A.V.* Global'nyj kachestvennyj analiz dinamiki kitajskogo volchka (tip-top) // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.* 2008. № 3. P. 33–41.
<https://doi.org/10.3103/S0025654408030059>
 23. *Zobova A.A.* Obzor modelej raspredelennogo suhogo treniya // *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2016. V. 80. № 2. P. 194–206.
 24. *O'Brien S., Synge J.L.* The instability of the tippe-top explained by sliding friction // *Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A.* 1953. V. 56. № 3. P. 23–35.
 25. *Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P., Semenov A.E.* Issledovanie dinamiki sily i momenta treniya pri precessii volchka Tompsona // *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo.* 2024. № 24. P. 17–22.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2024-24-17-22>
 26. *Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P.* Issledovanie dinamiki kineticheskoy energii volchka Tompsona // *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo.* 2023. № 21. P. 30–34.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-21-30-34>
 27. *Andreev A.I., Chanchikov V.A., Slavin B.M., Perekrestov A.P., Kozlova I.A.* Issledovanie dinamiki potencial'noj energii volchka Tompsona i ego primenenie v potenciometrah // *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo.* 2023. № 19. P. 30–34.
<https://doi.org/10.26160/2658-3305-2023-19-30-34>
 28. *Andreev A.I., Perekrestov A.P.* Analysis on non-stationary gyroscopes and their application in measurement technology // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2091. P. 012006.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2091/1/012006>