ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 3, с. 207–228

УДК 539.3: 517.958

О ТЕНЗОРЕ ДЕФОРМАЦИЙ КОШИ, УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОСТИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Н. И. Остросаблин[a, *]

[a] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

**E-mail: o.n.ii@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.09.2024 г.
После доработки 07.11.2024 г.
Принята к публикации 10.11.2024 г.

На примере четырехмерных уравнений равновесия для кинетических напряжений в эйлеровых прямоугольных координатах показано, что оператор четырехмерного тензора деформаций Коши является сопряженным (транспонированным) к оператору уравнений равновесия. Такая же связь между операторами уравнений равновесия и тензора деформаций Коши имеет место и в трехмерном случае. Приведены три варианта вывода условий совместности деформаций Коши. В четырехмерном случае имеется 21 условие совместности, а трехмерном – шесть условий совместности Сен-Венана. Показано, что тензор деформаций Коши как в эйлеровых, так и в лагранжевых переменных полностью определяет деформированное состояние сплошной среды. При этом никаких ограничений на величину смещений, деформаций или поворотов не требуется. Тензоры Лагранжа–Грина и Эйлера–Альманси, так называемых больших или конечных деформаций, и смещения с помощью формул Чезаро выражаются через тензор деформаций Коши. Определяющие соотношения упругой сплошной среды связывают взаимно однозначно тензор истинных напряжений Коши и тензор деформаций Коши. С использованием собственных базисов в пространствах симметричных тензоров напряжений и деформаций определяющие соотношения могут быть записаны в виде шести отдельных независимых уравнений, содержащих функции только от одного аргумента. Для сплошных сред, имеющих кристаллографические симметрии, можно использовать базисы, полученные на основе обобщенного закона Гука.

Ключевые слова: кинетические напряжения, тензоры деформаций и напряжений Коши, четырехмерная сплошная среда, лагранжевы и эйлеровы переменные, условия совместности, тензоры Лагранжа–Грина и Эйлера–Альманси, формулы Чезаро, определяющие соотношения, собственные состояния

DOI: 10.31857/S1026351925030116, **EDN:** BAWEML

1. Введение. Вопросы, связанные с построением определяющих соотношений и различных тензоров деформаций и напряжений в нелинейной механике сплошной среды, являются актуальными и рассматриваются во многих работах, например [1–11]. Существуют многочисленные работы, в которых обсуждаются число независимых условий Сен-Венана, общность и полнота функций напряжений, постановки задачи теории упругости в напряжениях [12–16]. Ссылки на другие работы приведены в [12–15]. Кинетические напряжения, четырехмерные деформации и уравнения равновесия рассматривались в работах [2, 17–23]. Собственные базисы (состояния) применялись, например, в работах [9, 24–26]. В данной статье развиваются подходы, предложенные в работах [12–14, 22, 25–28], но к которым необязательно обращаться, чтобы понять излагаемые ниже результаты.

Для описания деформирования и движения сплошной среды будем использовать прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 и время t. Обозначим $x_4 = ct$, где c – некоторая постоянная, имеющая размерность скорости. При этом все четыре переменные x_i, $i = \overline{1,4}$, имеют одинаковую размерность длины. Пусть a_i, $i = \overline{1,4}$, означают начальные лагранжевы координаты точки сплошной среды, а x_i, $i = \overline{1,4}$, – эйлеровы координаты той же точки в конечном положении среды. Производные по координатам x_i или a_i, $i = \overline{1,4}$, будем обозначать через ∂_i, при этом $\partial_t = c\partial_4$. Совокупность точек x_i образует в четырехмерном пространстве область V, а точки с координатами a_i составляют начальную область V_0. Деформирование (движение) сплошной среды задается как взаимно однозначное отображение областей V_0 и V друг на друга [2, 22, 29, 30]:

$$x_i = x_i\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right), \;\; a_i \in V_0, \tag{1.1}$$

$$a_i = a_i\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \;\; x_i \in V, \;\; i = \overline{1,4}.$$

Функции в (1.1) вещественные, непрерывные и имеют все необходимые производные. Формулы (1.1) можно записать с использованием вектора u_i, $i = \overline{1,4}$, смещения [2, 22]:

$$x_i = a_i + u_i\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right), \;\; a_i \in V_0, \tag{1.2}$$

$$a_i = x_i - u_i\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \;\; x_i \in V, \;\; i = \overline{1,4}.$$

Формулу для скорости $v_i = \partial_t u_i = c\partial_4 u_i = c\partial_4\left(x_i - a_i\right)$ можно распространить на индекс $i = 4$: $v_4 = c\partial_4 u_4 = c\partial_4\left(x_4 - a_4\right) = c$, т.е. c – постоянная компонента скорости по четвертой координате x_4 [22]. При вычислении компонент скорости v_i, $i = \overline{1,4}$, переменные a_i считаются фиксированными постоянными [29].

2. Четырехмерные уравнения равновесия и деформации. В эйлеровых прямоугольных координатах x_i, $i = \overline{1,4}$, закон сохранения импульса и уравнение неразрывности могут быть записаны в виде четырехмерных уравнений равновесия [2, 17–23] (по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\partial_j \tau_{ij} + F_i = 0, \;\; i, j = \overline{1,4}. \tag{2.1}$$

В (2.1) F_i – компоненты вектора объемных сил, а $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ – кинетические напряжения [18, 19, 22], которые занумеруем одним индексом:

$$\tau_1 = \tau_{11} = \sigma_{11} - \rho v_1^2, \;\; \tau_2 = \tau_{22} = \sigma_{22} - \rho v_2^2, \;\; \tau_3 = \tau_{33} = \sigma_{33} - \rho v_3^2, \tag{2.2}$$

$$\tau_4 = \sqrt{2}\tau_{32} = \sqrt{2}\left(\sigma_{23} - \rho v_2 v_3\right), \tau_5 = \sqrt{2}\tau_{31} = \sqrt{2}\left(\sigma_{13} - \rho v_1 v_3\right),$$

$$\tau_6 = \sqrt{2}\tau_{21} = \sqrt{2}\left(\sigma_{12} - \rho v_1 v_2\right),$$

$$\tau_7 = \sqrt{2}\tau_{41} = \sqrt{2}\left(-\rho c v_1\right), \;\; \tau_8 = \sqrt{2}\tau_{42} = \sqrt{2}\left(-\rho c v_2\right),$$

$$\tau_9 = \sqrt{2}\tau_{43} = \sqrt{2}\left(-\rho c v_3\right), \;\; \tau_{10} = \tau_{44} = -\rho c^2.$$

Здесь $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – трехмерный тензор напряжений Коши; ρ – плотность сплошной среды.

С учетом обозначений (2.2) уравнения (2.1) записываются в виде:

$$\mathbf{C\tau} + \mathbf{F} = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & \partial_4 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

– матрица оператора уравнений равновесия (2.1), (2.3). По аналогии с уравнениями трехмерной теории упругости [12–14, 31], транспонируя матрицу (2.4), получим четырехмерные деформации Коши [22] (штрих означает транспонирование матрицы):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right)/2, \;\; i, j = \overline{1,4}, \;\; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}'\boldsymbol{u}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_4 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_4 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

а деформации (2.5) занумерованы в порядке (2.2):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} = \partial_3 u_3, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3),\ \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3),$$

$$\varepsilon_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2),$$

$$\varepsilon_7 = \sqrt{2}\varepsilon_{41} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_4 u_1 + \partial_1 u_4),\ \varepsilon_8 = \sqrt{2}\varepsilon_{42} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_4 u_2 + \partial_2 u_4),$$

$$\varepsilon_9 = \sqrt{2}\varepsilon_{43} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_4 u_3 + \partial_3 u_4),\ \varepsilon_{10} = \varepsilon_{44} = \partial_4 u_4.$$

Из соотношений (2.1), (2.3)–(2.7) видно, что операторы (2.4), (2.6) уравнений равновесия и тензора деформаций Коши являются сопряженными (транспонированными) [12–14, 31].

Если считать деформации ε_i заданными функциями, то соотношения (2.5), (2.7) будут десятью уравнениями для четырех смещений u_i, $i=\overline{1,4}$. Для того чтобы из переопределенной системы (2.7) можно было найти смешения u_i, $i=\overline{1,4}$, деформации $\varepsilon_i(\varepsilon_{ij})$ должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям совместности деформаций. Условия совместности можно получать несколькими способами, например, используя тензор Римана–Кристоффеля [23, 29]. Другой способ состоит в выделении из системы (2.7) линейно независимых подсистем из четырех уравнений и вычислении затем окаймляющих миноров расширенных матриц. Из получившихся условий совместности выбирается полная система (базис) условий совместности. Для трехмерных деформаций ε_{ij} этот способ был применен в работах [12–14].

3. Применение общего решения уравнений равновесия. Условия совместности деформаций можно получить, используя общие решения уравнений равновесия (2.1), (2.3) или, что то же самое, представление напряжений (2.2) через функции (кинетических) напряжений. Решение однородных уравнений (2.1), (2.3) имеет вид [22]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}, \tag{3.1}$$

где φ_i, $i=\overline{1,6}$ – произвольные функции, имеющие все необходимые производные, а $\mathbf{B}$ – матричные дифференциальные операторы, такие, что

$$\mathbf{CB}\boldsymbol{\varphi} = 0,\ \mathbf{CB} = 0. \tag{3.2}$$

Тогда из (2.5), (3.2) получаем $\mathbf{B}'\mathbf{C}' = 0$, $\mathbf{B}'\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}'\mathbf{C}'\boldsymbol{u} = 0$, при этом, очевидно, равенство $B'\varepsilon = 0$ будет условием совместности деформаций. В работе [22] приведен 141 вариант эквивалентных матриц $\mathbf{B}$ для четырехмерных уравнений равновесия (2.1), (2.3), а в [12] приведены 17 вариантов эквивалентных матриц $\mathbf{B}$ для случая трехмерных уравнений равновесия. Приведем матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ для некоторых вариантов, номера матриц соответствуют номерам вариантов из работы [22]. Например, для варианта 1) матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ следующие:

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} & -\partial_{224} & -\partial_{334} & \partial_{44} \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} & \partial_{114} & 0 & 0 \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 & 0 & \partial_{114} & 0 \\ -\sqrt{2}\partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\partial_{122} & \sqrt{2}\partial_{133} & -\sqrt{2}\partial_{14} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{122} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{11} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^{(1)\prime} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} & -\sqrt{2}\partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} & 0 & -\sqrt{2}\partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_{224} & \partial_{114} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\partial_{122} & -\sqrt{2}\partial_{112} & 0 & 0 \\ -\partial_{334} & 0 & \partial_{114} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\partial_{133} & 0 & -\sqrt{2}\partial_{113} & 0 \\ \partial_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{14} & 0 & 0 & \partial_{11} \end{bmatrix};$$

для варианта 4):

$$\mathbf{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} & \partial_{44} & 0 & 0 \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} & 0 & \partial_{44} & 0 \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 & 0 & 0 & \partial_{44} \\ -\sqrt{2}\partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{11} & \partial_{22} & \partial_{33} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^{(4)\prime} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} & -\sqrt{2}\partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} & 0 & -\sqrt{2}\partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{14} & 0 & 0 & \partial_{11} \\ 0 & \partial_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{24} & 0 & \partial_{22} \\ 0 & 0 & \partial_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{34} & \partial_{33} \end{bmatrix};$$

для варианта 116):

$$\mathbf{B}^{(116)} = \begin{bmatrix} -2\partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\partial_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\partial_{11} & \sqrt{2}\partial_{12} & \sqrt{2}\partial_{13} & -\sqrt{2}\partial_{144} & \sqrt{2}\partial_{144} & \sqrt{2}\partial_{144} \\ \sqrt{2}\partial_{12} & -\sqrt{2}\partial_{22} & \sqrt{2}\partial_{23} & \sqrt{2}\partial_{244} & -\sqrt{2}\partial_{244} & \sqrt{2}\partial_{244} \\ \sqrt{2}\partial_{13} & \sqrt{2}\partial_{23} & -\sqrt{2}\partial_{33} & \sqrt{2}\partial_{344} & \sqrt{2}\partial_{344} & -\sqrt{2}\partial_{344} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}\partial_{234} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2}\partial_{134} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2}\partial_{124} \\ 0 & 0 & 0 & 2\partial_{123} & 2\partial_{123} & 2\partial_{123} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(116)\prime} =$$

$$= \sqrt{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\partial_{23} & 0 & 0 & -\partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\partial_{13} & 0 & \partial_{12} & -\partial_{22} & \partial_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{12} & \partial_{13} & \partial_{23} & -\partial_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{144} & \partial_{244} & \partial_{344} & -2\partial_{234} & 0 & 0 & \sqrt{2}\partial_{123} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{144} & -\partial_{244} & \partial_{344} & 0 & -2\partial_{134} & 0 & \sqrt{2}\partial_{123} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{144} & \partial_{244} & -\partial_{344} & 0 & 0 & -2\partial_{124} & \sqrt{2}\partial_{123} \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(4)}$ соответствуют четырехмерным аналогам решения Максвелла [12, 14, 30], а $\mathbf{B}^{(116)}$ является четырехмерным аналогом решения Мореры [12, 14, 30]. Другие аналоги этих решений приведены в работе [22]. Нетрудно проверить, что для приведенных выше матриц $\mathbf{B}$ уравнения (3.2) выполняются тождественно, а для деформаций (2.7) выполняются условия совместности $\mathbf{B}'\boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

Матрицы $\mathbf{B}^{(i)}$, $\mathbf{B}^{(j)}$ связаны соотношениями эквивалентности [22]:

$$\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{S} = \mathbf{B}^{(j)}\mathbf{L}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}$ – невырожденные матрицы шестого порядка. Из (3.3) следует, что матрицы $\mathbf{B}^{(i)\prime}$, $\mathbf{B}^{(j)\prime}$ связаны соотношениями эквивалентности вида:

$$\mathbf{S}'\mathbf{B}^{(i)\prime} = \mathbf{L}'\mathbf{B}^{(j)\prime}. \tag{3.4}$$

В работе [22] приведены примеры соотношений (3.3), из которых получаются и соотношения эквивалентности (3.4). Чтобы получить все условия совместности, нужно выписать все 141 вариант матриц $\mathbf{B}'$ и вычислить еще по столбцам этих матриц коммутаторы. Из получившегося множества условий совместности выбрать минимальный базис (полную систему) условий совместности. Для трехмерных деформаций (2.5), (2.7) этот способ реализован в работе [14].

4. Получение условий совместности исключением смещений. Но наиболее простой способ получения условий совместности, исходя из определения деформаций (2.5), состоит в исключении смещений. Из (2.5) находим:

$$\partial_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\partial_{kij}u_l + \partial_{lij}u_k\right),\ \partial_{kl}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_{ikl}u_j + \partial_{jkl}u_i\right),$$

складываем эти выражения:

$$\partial_{ij}\varepsilon_{kl} + \partial_{kl}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_{kij}u_l + \partial_{ikl}u_j\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_{lij}u_k + \partial_{jkl}u_i\right) = \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_{kij}u_l + \partial_{jkl}u_i\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_{lij}u_k + \partial_{ikl}u_j\right) = \partial_{ik}\varepsilon_{jl} + \partial_{jl}\varepsilon_{ik} = \partial_{jk}\varepsilon_{il} + \partial_{il}\varepsilon_{jk}.$$

Так как в правой части (4.1) слагаемые можно объединить двумя способами, то из (4.1) имеем два равносильных варианта записи условий совместности деформаций:

$$P_{ijkl} = \partial_{ij}\varepsilon_{kl} + \partial_{kl}\varepsilon_{ij} - \partial_{ik}\varepsilon_{jl} - \partial_{jl}\varepsilon_{ik} = 0, \tag{4.2}$$

$$S_{ijkl} = \partial_{ij}\varepsilon_{kl} + \partial_{kl}\varepsilon_{ij} - \partial_{jk}\varepsilon_{il} - \partial_{il}\varepsilon_{jk} = 0,\ i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Второй вариант (4.2) для трехмерного случая приведен в работе [30]. Еще один вариант записи условий совместности деформаций (2.5) получим, вычитая выражения (4.2):

$$A_{ijkl} = \partial_{jk}\varepsilon_{il} + \partial_{il}\varepsilon_{jk} - \partial_{ik}\varepsilon_{jl} - \partial_{jl}\varepsilon_{ik} = 0. \tag{4.3}$$

Таким образом, условия совместности (4.2), (4.3) следуют из определения деформаций (2.5) путем исключения смещений (функций) u_i, при этом не нужен никакой тензор кривизны [23, 29] и антисимметричный тензор $\omega_{ij} = (\partial_j u_i - \partial_i u_j)/2$, хотя далее при определении смещений тензор ω_{ij} будет нужен.

Выражения (4.2), (4.3) равносильны и отличаются только расположением индексов: $A_{ijkl} = P_{jkli} = S_{jkil}$. Выражение A_{ijkl} (4.3) имеет симметрию индексов как в работах [16, 29]:

$$A_{klij} = A_{ijkl},\ \ A_{jikl} = -A_{ijkl},\ \ A_{ijlk} = -A_{ijkl}, \tag{4.4}$$

и это выражение несколько удобнее, чем выражения (4.2). Кроме равенств (4.4), выполняется еще равенство [32]:

$$A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0,$$

которое не является ограничением на условия совместности (4.3) (ср. с [16]). В работах [32, 33] обсуждаются условия совместности и дано некоторое обобщение деформаций Коши (2.5) на многомерную среду. Условия (4.3), полученные исключением смещений u_i из уравнений (2.5), очевидно, являются необходимыми, но их достаточность или полнота будут понятны при определении смещений в односвязной области [14, 32].

5. Преобразование системы координат и явный вид условий совместности. Рассмотрим тензор A_{ijkl} с симметрией (4.4). При ортогональном преобразовании системы координат (δ_{pq} – единичная матрица, символ Кронекера)

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j,\ \ \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i,\ \ \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq},\ \ i,j,p,q = 1,\,2,\,3,\,4, \tag{5.1}$$

тензор A_{ijkl} преобразуется по формулам:

$$A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls},\ \ \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}A_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls}. \tag{5.2}$$

Вместо (5.1) в четырехмерном пространстве x_i, $i=\overline{1,4}$, могут быть применены преобразования Лоренца [34].

Перепишем (5.2) с учетом антисимметрии (4.4):

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp}\right)\hat{A}_{pqrs}\frac{1}{2}\left(\alpha_{kr}\alpha_{ls} - \alpha_{ks}\alpha_{lr}\right) = \alpha_{ijpq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{klrs},$$

$$\hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ijpq}A_{ijkl}\alpha_{klrs},$$

где обозначили $\alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2$, причем

$$\alpha_{jipq} = -\alpha_{ijpq},\ \ \alpha_{ijqp} = -\alpha_{ijpq},\ \ \alpha_{ijpq}\alpha_{ijrs} = \frac{1}{2}\left(\delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}\right) = \tilde{\delta}_{pqrs}.$$

Тензор $\tilde{\delta}_{pqrs}$ имеет симметрию (4.4) и является единичным в пространстве тензоров вида (4.4). Если $t_{ji}=-t_{ij}$, то $\tilde{\delta}_{pqrs}t_{rs} = t_{pq}$.

Для постоянного тензора вида (4.4) можно поставить задачу на собственные значения и тензоры [16]:

$$A_{ijkl}t_{kl} = 2\lambda t_{ij},\ \ \left(A_{ijkl} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ijkl}\right)t_{kl} = 0. \tag{5.3}$$

Запишем антисимметричный тензор $t_{ij}=-t_{ji}$:

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -t_{21} & -t_{31} & -t_{41} \\ t_{21} & 0 & -t_{32} & -t_{42} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & -t_{43} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

который имеет шесть независимых компонент. С учетом (4.4), (5.4) распишем уравнение (5.3):

$$2[(A_{ij21} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij21})t_{21} + (A_{ij31} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij31})t_{31} + (A_{ij32} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij32})t_{32} + \tag{5.5}$$

$$+\left(A_{ij41} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij41}\right)t_{41} + \left(A_{ij42} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij42}\right)t_{42} + \left(A_{ij43} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij43}\right)t_{43}] = 0.$$

Все ненулевые компоненты тензора $\tilde{\delta}_{ijkl}$ в (5.5) имеют значения 1/2. Далее в (5.5) нужно придавать все значения индексам i, j. Если $i=j$, то уравнения нулевые, если $i \neq j$, то уравнения с индексами ij и ji отличаются знаком. Таким образом, из (5.5) получаем однородную систему уравнений:

$$\left(A_{2121} - \lambda\right)t_{21} + A_{2131}t_{31} + A_{2132}t_{32} + A_{2141}t_{41} + A_{2142}t_{42} + A_{2143}t_{43} = 0,$$

$$A_{3121}t_{21} + \left(A_{3131} - \lambda\right)t_{31} + A_{3132}t_{32} + A_{3141}t_{41} + A_{3142}t_{42} + A_{3143}t_{43} = 0,$$

$$A_{3221}t_{21} + A_{3231}t_{31} + \left(A_{3232} - \lambda\right)t_{32} + A_{3241}t_{41} + A_{3242}t_{42} + A_{3243}t_{43} = 0, \tag{5.6}$$

$$A_{4121}t_{21} + A_{4131}t_{31} + A_{4132}t_{32} + \left(A_{4141} - \lambda\right)t_{41} + A_{4142}t_{42} + A_{4143}t_{43} = 0,$$

$$A_{4221}t_{21} + A_{4231}t_{31} + A_{4232}t_{32} + A_{4241}t_{41} + \left(A_{4242} - \lambda\right)t_{42} + A_{4243}t_{43} = 0,$$

$$A_{4321}t_{21} + A_{4331}t_{31} + A_{4332}t_{32} + A_{4341}t_{41} + A_{4342}t_{42} + \left(A_{4343} - \lambda\right)t_{43} = 0,$$

для определения собственных значений λ и тензоров t_{ij} (5.4). Матрица системы симметрическая, и ее характеристическое уравнение имеет шесть действительных корней λ_i, $i = \overline{1,6}$. В работе [16] по аналогии с классификацией тензоров четвертого ранга модулей упругости [26] проведена классификация тензоров вида (4.4) в зависимости от числа различных собственных значений λ_i и их кратностей. В трехмерном случае уравнения (5.6) принимают вид:

$$\begin{gathered}\left(A_{2121} - \lambda\right)t_{21} + A_{2131}t_{31} + A_{2132}t_{32} = 0,\\ A_{3121}t_{21} + \left(A_{3131} - \lambda\right)t_{31} + A_{3132}t_{32} = 0,\\ A_{3221}t_{21} + A_{3231}t_{31} + \left(A_{3232} - \lambda\right)t_{32} = 0.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Перепишем выражение (4.3):

$$A_{ijkl} = \left(\partial_{jk}\delta_{ip}\delta_{lq} + \partial_{il}\delta_{jp}\delta_{kq} - \partial_{ik}\delta_{jp}\delta_{lq} - \partial_{jl}\delta_{ip}\delta_{kq}\right)\varepsilon_{pq} = \tag{5.8}$$

$$= \left(\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{ip}\delta_{lq} + \delta_{im}\delta_{\ln}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{jp}\delta_{lq} - \delta_{jm}\delta_{\ln}\delta_{ip}\delta_{kq}\right)\partial_{mn}\varepsilon_{pq} = 0.$$

Запись (5.8) аналогична трехмерной записи [12, 30, 32]:

$$\varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnq}\partial_{mn}\varepsilon_{pq} = 0, \tag{5.9}$$

где ε_{imp} – антисимметричный по любой паре индексов символ Леви–Чевиты. Но в (5.8) и (5.9) вообще-то для строгой записи еще нужно проводить симметризацию коэффициентов по индексам (mn) и (pq). Поэтому удобнее выписывать условия совместности деформаций непосредственно по (4.3) в соответствии с симметричной матрицей в уравнениях (5.6) или (5.7).

Итак, из (4.3), (5.7) получаем:

$$\begin{gathered}A_{2121} = -A_{1221} = \partial_{12}\varepsilon_{21} + \partial_{21}\varepsilon_{12} - \partial_{22}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{22} = 0,\\ A_{3121} = -A_{1321} = \partial_{12}\varepsilon_{31} + \partial_{31}\varepsilon_{12} - \partial_{32}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{32} = 0,\\ A_{3221} = -A_{2321} = \partial_{22}\varepsilon_{31} + \partial_{31}\varepsilon_{22} - \partial_{32}\varepsilon_{21} - \partial_{21}\varepsilon_{32} = 0,\\ A_{3131} = -A_{1331} = \partial_{13}\varepsilon_{31} + \partial_{31}\varepsilon_{13} - \partial_{33}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{33} = 0,\\ A_{3231} = -A_{2331} = \partial_{23}\varepsilon_{31} + \partial_{31}\varepsilon_{23} - \partial_{33}\varepsilon_{21} - \partial_{21}\varepsilon_{33} = 0,\\ A_{3232} = -A_{2332} = \partial_{23}\varepsilon_{32} + \partial_{32}\varepsilon_{23} - \partial_{33}\varepsilon_{22} - \partial_{22}\varepsilon_{33} = 0.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Формулы (5.10) являются условиями Сен-Венана для трехмерных деформаций [30]. В четырехмерном случае к шести уравнениям (5.10) добавляются еще 15 условий в соответствии с (4.3), (5.6):

$$
\begin{aligned}
&A_{4121} = -A_{1421} = \partial_{12}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{12} - \partial_{42}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{42} = 0,\\
&A_{4221} = -A_{2421} = \partial_{22}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{22} - \partial_{42}\varepsilon_{21} - \partial_{21}\varepsilon_{42} = 0,\\
&A_{4321} = -A_{3421} = \partial_{32}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{32} - \partial_{42}\varepsilon_{31} - \partial_{31}\varepsilon_{42} = 0,\\
&A_{4131} = -A_{1431} = \partial_{13}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{13} - \partial_{43}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4231} = -A_{2431} = \partial_{23}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{23} - \partial_{43}\varepsilon_{21} - \partial_{21}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4331} = -A_{3431} = \partial_{33}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{33} - \partial_{43}\varepsilon_{31} - \partial_{31}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4132} = -A_{1432} = \partial_{13}\varepsilon_{42} + \partial_{42}\varepsilon_{13} - \partial_{43}\varepsilon_{12} - \partial_{12}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4232} = -A_{2432} = \partial_{23}\varepsilon_{42} + \partial_{42}\varepsilon_{23} - \partial_{43}\varepsilon_{22} - \partial_{22}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4332} = -A_{3432} = \partial_{33}\varepsilon_{42} + \partial_{42}\varepsilon_{33} - \partial_{43}\varepsilon_{32} - \partial_{32}\varepsilon_{43} = 0,\\
&A_{4141} = -A_{1441} = \partial_{14}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{14} - \partial_{44}\varepsilon_{11} - \partial_{11}\varepsilon_{44} = 0,\\
&A_{4241} = -A_{2441} = \partial_{24}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{24} - \partial_{44}\varepsilon_{21} - \partial_{21}\varepsilon_{44} = 0,\\
&A_{4341} = -A_{3441} = \partial_{34}\varepsilon_{41} + \partial_{41}\varepsilon_{34} - \partial_{44}\varepsilon_{31} - \partial_{31}\varepsilon_{44} = 0,\\
&A_{4242} = -A_{2442} = \partial_{24}\varepsilon_{42} + \partial_{42}\varepsilon_{24} - \partial_{44}\varepsilon_{22} - \partial_{22}\varepsilon_{44} = 0,\\
&A_{4342} = -A_{3442} = \partial_{34}\varepsilon_{42} + \partial_{42}\varepsilon_{34} - \partial_{44}\varepsilon_{32} - \partial_{32}\varepsilon_{44} = 0,\\
&A_{4343} = -A_{3443} = \partial_{34}\varepsilon_{43} + \partial_{43}\varepsilon_{34} - \partial_{44}\varepsilon_{33} - \partial_{33}\varepsilon_{44} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Уравнения (5.10), (5.11) с учетом обозначений (2.7) можно записать в виде $\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, где дифференциальная матрица $\mathbf{Q}$ размера 21×10, а в трехмерном случае (5.10) – размера 6×6. В трехмерном случае матрица $\mathbf{Q}$ имеет ранг 3, и деформации ε_i (решение системы (5.10)) выражаются через три произвольные функции (смещения) u_i [13]. В четырехмерном случае матрица $\mathbf{Q}$ будет ранга 4, и решение системы (5.10), (5.11) выражается через четыре функции (смещения) u_i по формулам Коши (2.5). Уравнения (5.10), (5.11) образуют полную систему (минимальный базис) условий совместности, т.е. $\mathbf{QC}' = 0$, и если для некоторого $\mathbf{Q}_1$ выполняется $\mathbf{QC}' = 0$, то найдется матрица $\mathbf{S}$ такая, что $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{SQ}$ [14]. Число уравнений (5.10) или (5.10), (5.11) нельзя уменьшить, все они должны быть выполнены, все они являются существенными [14], в отличие от утверждения в работе [16]. Но в четырёхмерном случае в силу тождества Риччи [32] $A_{4321} + A_{4213} + A_{4132} = 0$ одно из условий выполняется автоматически, т.е. необходимо выполнить только 20 условий (5.10), (5.11).

Отметим, что формулы Коши (2.5) служат определением деформаций ε_{ij}, которые тождественно удовлетворяют уравнениям (5.10), (5.11) при произвольных функциях u_i, а уравнения (5.10), (5.11) являются необходимыми и достаточными условиями, обеспечивающими существование таких функций u_i. В свою очередь, формулы (3.1) служат определением напряжений τ_{ij} (в трехмерном случае – σ_{ij} [12]), которые тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (2.1), (2.3) при произвольных функциях φ_i, а уравнения равновесия являются необходимыми и достаточными условиями, обеспечивающими существование таких функций φ_i [22]. Поэтому в механике сплошной среды нет необходимости решать уравнения равновесия (2.1), (2.3) и условия совместности (5.10), (5.11), а следует исходить из определения напряжений τ_{ij} и деформаций ε_{ij} в виде (3.1) и (2.5). Функции φ_i и u_i, входящие в выражения для напряжений (3.1) и деформаций (2.5), связаны между собой только через определяющие соотношения (уравнения состояния) [12–14, 22, 35].

6. Выражение больших деформаций и смещений через деформации Коши. Перейдем к рассмотрению так называемых больших или конечных деформаций. С учетом (1.2) находим дифференциал функции $u_i(x_j)$:

$$du_i = \partial_j u_i dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})dx_j, \tag{6.1}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right), \ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i - \partial_i u_j\right)$$

– симметричная и кососимметричная части градиента смещений $\partial_j u_i$. Далее получаем:

$$da_i da_i = \left(dx_i - du_i\right)\left(dx_i - du_i\right) = dx_i dx_i - 2du_i dx_i + du_i du_i =$$

$$= dx_i dx_i - 2\partial_j u_i dx_i dx_j + \partial_i u_k \partial_j u_k dx_i dx_j = dx_i dx_i + \left(-2\varepsilon_{ij} + \partial_i u_k \partial_j u_k\right) dx_i dx_j;$$

$$dx_i dx_i - da_i da_i = \left(2\varepsilon_{ij} - \partial_i u_k \partial_j u_k\right) dx_i dx_j. \tag{6.2}$$

Так как $\partial_i u_k = \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}$, $\partial_j u_k = \varepsilon_{kj} + \omega_{kj}$, то перепишем (6.2):

$$dx_i dx_i - da_i da_i = \left[2\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj})\right] dx_i dx_j = 2e_{ij} dx_i dx_j,$$

где обозначили

$$2e_{ij} = 2\varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\right)\left(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\right) = 2\varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\omega_{kj}\right). \tag{6.3}$$

Выражение (6.3) есть тензор деформации Эйлера–Альманси [30, 32], через него выражается изменение длины малого элемента (6.2) при деформировании сплошной среды.

Если точки x_i, x_{i0} принадлежат области V (1.2), то при известных ε_{ij}, $u_i(x_0)$ по (6.1) можно определить смещения $u_i(x)$:

$$\int_{x_{i0}}^{x_i} du_i = u_i(x) - u_i\left(x_0\right) = \int_{x_0}^{x} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, dx_j. \tag{6.4}$$

Необходимым и достаточным условием независимости интеграла (6.4) от пути интегрирования является условие:

$$\partial_k\left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) = \partial_j\left(\varepsilon_{ik} + \omega_{ik}\right), \tag{6.5}$$

которое выполняется тождественно в силу соотношения [30, 32]:

$$\partial_k \omega_{ij} = \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}. \tag{6.6}$$

Для ω_{ij} имеем формулу [30]:

$$\omega_{ij}(x) = \omega_{ij}(x_0) + \int_{x_0}^{x} d\omega_{ij} = \omega_{ij}\left(x_0\right) + \int_{x_0}^{x} \partial_k \omega_{ij} dx_k$$

или с учетом (6.6):

$$\omega_{ij}\left(x\right) = \omega_{ij}\left(x_0\right) + \int_{x_0}^{x} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk})\, dx_k. \tag{6.7}$$

Интеграл (6.7) не зависит от пути интегрирования, если выполняется необходимое и достаточное условие (условия совместности (4.3) или (5.10), (5.11)) [32]:

$$\partial_{lj} \varepsilon_{ik} - \partial_{li} \varepsilon_{jk} = \partial_{kj} \varepsilon_{il} - \partial_{ki} \varepsilon_{jl}. \tag{6.8}$$

Далее с учетом (6.4), (6.7) получаем:

$$u_i\left(x\right) = u_i\left(x_0\right) + \int_{x_0}^{x} \left[\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}(x_0) + \int_{x_0}^{x} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}) dx_k \right] dx_j =$$

$$= u_i\left(x_0\right) + \omega_{ij}\left(x_0\right)\left(x_j - x_{j0}\right) + \int_{x_0}^{x} \left[\varepsilon_{ij} + \int_{x_0}^{x} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}) dx_k \right] dx_j. \tag{6.9}$$

Формула Чезаро [30, 32] (6.9) дает выражение смещений $u_i(x_s)$ через деформации Коши ε_{ij} (2.5), при выполнении условий совместности (6.8), причем никакой малости $u_i(x_s)$, $\varepsilon_{ij}(x_s)$, $\omega_{ij}(x_s)$ не предполагается.

Из формул (6.3), (6.7) очевидно, что тензор Эйлера–Альманси $2e_{ij}$ вполне определяется деформациями Коши ε_{ij} (2.5). Зная смещения $u_i(x_s)$ (6.9), по формуле (1.2)

$$a_i = x_i - u_i\left(x_s\right), \;\; x_s \in V$$

получим координаты $a_i \in V_0$ точек тела до деформации. Если в (6.7), (6.9) деформации Коши равны нулю $\varepsilon_{ij} = 0$, то остаются только смещения и инфинитезимальные повороты тела как жесткого целого [12, 30, 32] в окрестности точки x_0:

$$\omega_{ij}\left(x\right) = \omega_{ij}\left(x_0\right), \;\; u_i\left(x\right) = u_i\left(x_0\right) + \omega_{ij}\left(x_0\right)\left(x_j - x_{j0}\right),$$

при этом деформации (6.3) вообще-то не нулевые:

$$2e_{ij} = -\omega_{ki}\omega_{kj} = -\omega_{ki}\left(x_0\right)\omega_{kj}\left(x_0\right).$$

Но если среда в точке x_{j0} закреплена, то $\omega_{ij}(x_0) = 0$ и $e_{ij} = 0$.

Аналогичные формулы можно получить в случае лагранжевых переменных a_i. Из первой формулы (1.2) находим $dx_i = da_i + du_i$, где

$$du_i = \partial_j u_i da_j = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) da_j, \tag{6.10}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right), \ \ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i - \partial_i u_j\right),$$

здесь уже производные по лагранжевым переменным a_j. Далее получаем:

$$dx_i dx_i = \left(da_i + du_i\right)\left(da_i + du_i\right) = da_i da_i + 2du_i da_i + du_k du_k =$$

$$= da_i da_i + 2\partial_j u_i da_i da_j + \partial_i u_k \partial_j u_k da_i da_j = da_i da_i + \left(2\varepsilon_{ij} + \partial_i u_k \partial_j u_k\right) da_i da_j;$$

$$dx_i dx_i - da_i da_i = \left(2\varepsilon_{ij} + \partial_i u_k \partial_j u_k\right) da_i da_j = 2\hat{e}_{ij} da_i da_j, \tag{6.11}$$

где обозначили

$$2\hat{e}_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \partial_i u_k \partial_j u_k$$

– тензор деформации Лагранжа–Грина [2, 30], который можно записать аналогично (6.3):

$$2\hat{e}_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \left(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\right)\left(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\right) = 2\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{ki}\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\omega_{kj}. \tag{6.12}$$

Через тензор (6.12) выражается изменение длины малого элемента (6.11) в лагранжевых переменных a_i. Геометрическая интерпретация компонент $\hat{e}_{ij}$ или e_{ij} приведена, например, в работах [2, 30].

Формулы (6.4)–(6.9) полностью повторяются для случая лагранжевых переменных a_i. Итак, имеем с учетом (6.10) (точки a_i, a_{i0} принадлежат области V_0 (1.2)):

$$u_i\left(a\right) = u_i\left(a_0\right) + \int_{a_0}^{a} du_i = u_i\left(a_0\right) + \int_{a_0}^{a} \partial_j u_i da_j = u_i\left(a_0\right) + \int_{a_0}^{a} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) da_j. \tag{6.13}$$

Интеграл (6.13) не зависит от пути интегрирования, если выполняется необходимое и достаточное условие (6.5), которое будет тождеством в силу соотношения (6.6). Для ω_{ij} имеем формулу:

$$\omega_{ij}(a) = \omega_{ij}(a_0) + \int_{a_0}^{a} d\omega_{ij} = \omega_{ij}(a_0) + \int_{a_0}^{a} \partial_k \omega_{ij} da_k$$

или с учетом (6.6):

$$\omega_{ij}(a) = \omega_{ij}(a_0) + \int_{a_0}^{a} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}) da_k. \tag{6.14}$$

Интеграл (6.14) не зависит от пути интегрирования, если выполняются необходимые и достаточные условия совместности (6.8).

Далее с учетом (6.14) из (6.13) находим:

$$u_i(a) = u_i(a_0) + \int_{a_0}^{a} \left[\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}(a_0) + \int_{a_0}^{a} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}) da_k \right] da_j = \tag{6.15}$$

$$= u_i(a_0) + \omega_{ij}(a_0)(a_j - a_{j0}) + \int_{a_0}^{a} \left[\varepsilon_{ij} + \int_{a_0}^{a} (\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{jk}) da_k \right] da_j.$$

Формула (6.15) дает выражение смещений $u_i(a_s)$ через деформации Коши ε_{ij}, при выполнении условий совместности (6.8), причем никакой малости $u_i(a_s)$, $\varepsilon_{ij}(a_s)$, $\omega_{ij}(a_s)$ не предполагается. Из формул (6.12), (6.14) очевидно, что тензор Лагранжа–Грина $2\hat{e}_{ij}$ вполне определяется деформациями Коши ε_{ij} (2.5). Зная смещения $u_i(a_s)$ (6.15), по формуле (1.2)

$$x_i = a_i + u_i(a_s), \ \ a_s \in V_0$$

получим координаты $x_i \in V$ точек тела после деформации. Если в (6.14), (6.15) деформации ε_{ij} нулевые, то остаются только смещения и инфинитезимальные повороты тела как жесткого целого в окрестности точки a_0, при этом деформации (6.12) не нулевые:

$$2\hat{e}_{ij} = \omega_{ki}\omega_{kj} = \omega_{ki}(a_0)\omega_{kj}(a_0).$$

Но если среда в точке a_{j0} закреплена, то $\omega_{ij}(a_0) = 0$ и $\hat{e}_{ij} = 0$.

Таким образом, учитывая выше изложенное, можно заключить, что как в эйлеровых переменных x_i, так и в лагранжевых переменных a_i деформированное состояние сплошной среды полностью определяется деформациями Коши ε_{ij} (2.5). При этом никакой малости деформаций ε_{ij}, а также u_i, ω_{ij} не предполагается. Такой подход к описанию деформирования сплошной среды в случае эйлеровых переменных предложен в работах [27, 28]. Отметим, что аналогичный подход несколько лет назад предлагал научный сотрудник лаборатории статической прочности Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН И.В. Сухоруков, к сожалению, рано умерший.

7. Определяющие соотношения упругой среды. Так как деформации Коши ε_{ij} (2.5) вполне задают кинематику сплошной среды, то определяющие соотношения для упругих материалов должны взаимно однозначно связывать истинные напряжения [1, 3, 11] $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (или $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ в трехмерном случае) с деформациями $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (2.5). При этом нет необходимости в построении усложненных теорий так называемых больших или конечных деформаций. В работе [22] предложена линейная связь кинетических напряжений (2.2) с четырехмерными деформациями (2.7): $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ – симметричная невырожденная матрица.

В пространстве симметричных тензоров второго ранга в трехмерном случае может быть выбран ортонормированный базис из шести тензоров [24–26]. С учетом одноиндексных обозначений вида (2.2), (2.7) этот базис записывается в виде ортогональной матрицы шестого порядка: $\mathbf{T} = [t_{ip}]$, $i, p = \overline{1, 6}$, $t_{ip}t_{iq} = \delta_{pq}$ [25]. Каждый столбец этой матрицы соответствует симметричному тензору второго ранга. Ортогональная матрица t_{ip} зависит от 15 свободных параметров и может быть получена процессом ортонормирования произвольной треугольной матрицы c_{ip}, $i > p$, $c_{11} = \ldots = c_{66} = 1$ [25, 34].

Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} раскладываются по ортогональному базису t_{ip} [24–26]:

$$\sigma_i = t_{ip}\tilde{\sigma}_p, \ \ \tilde{\sigma}_p = \sigma_i t_{ip}, \ \ \varepsilon_i = t_{iq}\tilde{\varepsilon}_q, \ \ \tilde{\varepsilon}_q = \varepsilon_i t_{iq}. \tag{7.1}$$

Из (7.1) видно, что величины $\tilde{\sigma}_p, \tilde{\varepsilon}_q$ являются проекциями тензоров σ_i, ε_i на тензоры ортогонального базиса t_{ip}, $p=\overline{1,6}$, т.е. оказываются свертками двух симметричных тензоров второго ранга. Это означает, что величины $\tilde{\sigma}_p, \tilde{\varepsilon}_q$ остаются инвариантными при ортогональном преобразовании вида (5.1) системы координат x_i. Если в (7.1) базис является единичной матрицей, т.е. $t_{ip}=\delta_{ip}$, то, очевидно, традиционные напряжения $\tilde{\sigma}_p = \sigma_i \delta_{ip} = \sigma_p$ и деформации $\tilde{\varepsilon}_q = \varepsilon_i \delta_{iq} = \varepsilon_q$ также являются инвариантами [25].

Определяющие соотношения должны функционально связывать инварианты $\tilde{\sigma}_p$ и $\tilde{\varepsilon}_q$, т.е.

$$\tilde{\sigma}_p = f_p(\tilde{\varepsilon}_q), \quad p, q = \overline{1,6}, \tag{7.2}$$

где функции f_p в общем случае определяются экспериментально. Выбор базиса t_{ip} произволен, как и системы координат x_i, которые выбираются из соображений простоты уравнений. Для случая упругих анизотропных материалов матрица t_{ip} состоит из шести собственных состояний, а закон Гука принимает вид шести отдельных независимых инвариантных равенств [24–26]:

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1,\ \tilde{\sigma}_2 = \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2,\ \tilde{\sigma}_3 = \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3,\ \tilde{\sigma}_4 = \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4,\ \tilde{\sigma}_5 = \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5,\ \tilde{\sigma}_6 = \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6, \tag{7.3}$$

где $\lambda_i > 0$, $i=\overline{1,6}$ – собственные модули.

Произвольный базис t_{ip} можно получить из какого-то конкретного по формулам [25]:

$$t_{ip} = t^*_{iq} \alpha_{pq},\ t^*_{iq} = t_{ip} \alpha_{pq}, \tag{7.4}$$

где α_{pq} – произвольная ортогональная матрица шестого порядка: $\alpha_{pq}\alpha_{pr}=\delta_{qr}$, также определяется 15 независимыми параметрами. Выбираем базис t_{ip} таким образом, чтобы определяющие соотношения (7.2) приняли наиболее простой вид (например, были вида (7.3)):

$$\tilde{\sigma}_1 = f_1(\tilde{\varepsilon}_1), \tilde{\sigma}_2 = f_2(\tilde{\varepsilon}_2), \tilde{\sigma}_3 = f_3(\tilde{\varepsilon}_3), \tilde{\sigma}_4 = f_4(\tilde{\varepsilon}_4), \tilde{\sigma}_5 = f_5(\tilde{\varepsilon}_5), \tilde{\sigma}_6 = f_6(\tilde{\varepsilon}_6), \tag{7.5}$$

т.е. каждая функция зависела бы от одной переменной. Такой базис можно назвать собственными состояниями [24–26], которые характеризуют каждый конкретный материал (среду), а традиционный базис $t_{ip}=\delta_{ip}$, никак не связанный с конкретным материалом, определяется только внешней координатной системой x_i. Отметим, что в определяющих соотношениях (7.3), (7.5) не предполагается малость деформаций Коши (2.5). Но экспериментально следует проверять – для конкретных материалов, при каких деформациях ε_{ij} линейные соотношения (7.3) переходят в нелинейные соотношения вида (7.5). В работе [28] на основе экспериментальных данных для случая изотропии обосновывается справедливость закона Гука при любых стадиях деформирования и говорится о фундаментальности закона Гука аналогично второму закону Ньютона о пропорциональности силы ускорению. Запись закона Гука в виде (7.3) показывает пропорциональность напряжений (сил) $\tilde{\sigma}_p$ деформациям $\tilde{\varepsilon}_p$ с коэффициентами пропорциональности λ_p, $p=\overline{1,6}$. Можно предположить, что соотношения (7.3) (или (7.5)) выполняются при любых стадиях деформирования. Для проверки этой гипотезы необходимо для конкретных материалов известные экспериментальные данные с учетом собственных состояний и модулей представить в виде (7.3) или (7.5) либо проводить дополнительные эксперименты. Но все это может быть предметом дальнейшей работы.

Для изотропного материала собственные состояния t_{ip} и модули λ_p оказываются следующими [24, 26, 36]:

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

$$\lambda_1 = 3\lambda + 2\mu, \ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu,$$

где λ, μ – постоянные Ламе [3, 30]. В (7.6) собственные состояния, соответствующие пятикратному собственному модулю λ_2, взяты не в общем виде. В общем случае эти состояния являются любыми девиаторами, ортогональными к t_{i1}:

$$t_{i1}t_{ip} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(t_{1p} + t_{2p} + t_{3p}\right) = 0, \ \ p = \overline{2,6}.$$

Для других материалов, имеющих кристаллографические симметрии, собственные модули и состояния приведены в работе [36]. Так как при ортогональных преобразованиях вида (5.1) системы координат шаровой тензор и девиаторы сохраняют свой вид, то с учетом (7.6) закон Гука (7.3) для изотропного материала может быть записан в виде:

$$\sigma_{kk} = \left(3\lambda + 2\mu\right)\varepsilon_{kk}, \ \ \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right).$$

Отметим, что если матрица модулей упругости в законе Гука не является симметричной или положительно определенной, то собственные состояния (базисы) в пространствах напряжений и деформаций оказываются различными [37].

В краткой записи закон Гука (7.3) имеет вид $\mathbf{T}'\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}'\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\Lambda}$ – диагональная матрица. Подставляя в последнее равенство определение напряжений через функции напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}$ и деформаций (2.5) через смещения, получим шесть дифференциальных уравнений [12–14, 22, 35]

$$\mathbf{T}'\mathbf{B}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}'\mathbf{C}'\mathbf{u}$$

для шести функций φ_1, φ_2, φ_3, u_1, u_2, u_3. Аналогичные уравнения будут иметь место для кинетических напряжений (3.1) в четырехмерном случае [22].

Примеры решения задач равновесия при больших деформациях с использованием деформаций Коши ε_{ij} (2.5) в конечной области V и определения начальной области тела V_0 приведены в работах [27, 28]. В эйлеровых переменных задача растяжения изотропного стержня при конечных деформациях решена в работе [38] с использованием закона Гука, записанного в дифференциальной форме.

8. Заключение. Таким образом, в работе представлен новый подход к уравнениям теории упругости. Показано, что деформированное состояние сплошной среды при любых деформациях полностью определяется линейным тензором деформаций Коши. В четырехмерном и трехмерном случаях дифференциальные операторы тензора деформаций Коши и уравнений равновесия являются сопряженными (транспонированными по отношению друг к другу). Различными способами можно получать условия совместности деформаций. Напряжения, аналогично деформациям, выраженным через смещения, могут быть определены через функции напряжений, при этом уравнения равновесия выполняются тождественно, а также являются условиями совместности, обеспечивающими существование функций напряжений. Функции напряжений и смещения связаны между собой через определяющие соотношения. Определяющие соотношения путем нахождения (подбора) характерного для конкретного материала собственного базиса в пространствах симметричных тензоров напряжений и деформаций могут быть записаны в трехмерном случае в виде шести отдельных независимых уравнений, содержащих функции только от одного аргумента. Таким определяющим соотношениям необходима еще экспериментальная проверка.

После того как данная статья была подготовлена, опубликованы работы [39–42], в которых рассматриваются вопросы, близкие по тематике. Отметим, что вопрос о числе условий совместности и числе функций напряжений в трехмерном и четырехмерном случаях решен в работах [12–14, 22] и в данной работе. Связь уравнений теории упругости с теорией относительности, с уравнениями гравитации и электродинамики рассматривалась, например, в работах [20, 21, 39, 42] и некоторых других.

Отметим еще заметку [43], в которой показывается, что условия совместности деформаций Коши вида (4.3) или (5.9) являются условиями совместности и для нелинейного тензора деформаций Лагранжа–Грина (6.12), т.е. тензор Римана–Кристоффеля преобразуется виду к (4.3), при этом никаких ограничений на величину деформаций Коши не требуется. Результат из работы [43] подтверждает правомерность подхода, предлагаемого в данной статье.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта 2.3.1.3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
2. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Победря Б.Е.* О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1987. Т. 40. № 4. С. 15–26.

6. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.
7. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
8. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
9. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
10. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.
11. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей деформируемого твёрдого тела. Ч. 1. Основные соотношения механики сплошных сред. М., Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2021. 286 с.
12. *Остросаблин Н.И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // Прикл. механика и техн. физика. 1997. Т. 38. № 5. С. 136–146.
13. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях Бельтрами–Мичелла и операторе Сен-Венана // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 211–217.
14. *Остросаблин Н.И.* Об условиях совместности малых деформаций и функциях напряжений // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2001. Т. 1. Вып. 1. С. 67–77.
15. *Победря Б.Е.* О статической задаче в напряжениях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 3. С. 61–67.
16. *Никабадзе М.У.* О задаче на собственные значения некоторых применяемых в механике тензоров и о числе существенных условий совместности деформаций Сен-Венана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 3. С. 54–58.
17. *Truesdell C.* Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Rational. Mech. Anal. 1959. V. 4. № 1. P. 1–29.
https://doi.org/10.1007/BF00281376
18. *Кильчевский Н.А.* Механика континуальных систем: Избр. тр. Киев: Наук. думка, 1984. 430 с.
19. *Кильчевская Е.Н., Кильчевский Н.А.* Функции кинетических напряжений и геометрия пространства в деформированном континууме // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 243–250.
20. *Чернышев Г.Н.* Взаимное обобщение упругого и гравитационного полей на основе механики деформируемых тел // Изв. АН. МТТ. 2002. № 2. С. 86–100.
21. *Чернышев Г.Н.* Упругость, гравитация, электродинамика. М.: Наука, 2003. 144 с.
22. *Остросаблин Н.И.* Функции кинетических напряжений в механике сплошных сред // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2007. Вып. 125. С. 76–116.
23. *Федоров Л.В.* О решении динамической задачи линейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 13–20.
https://doi.org/10.31857/S057232990000795-4
24. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
25. *Остросаблин Н.И.* О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48. № 5. С. 134–137.

26. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49. № 6. С. 131–151.
27. *Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б., Чыныбаев М.К.* О мерах деформаций // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 19-й Всерос. конф. Бийск. 28–31 авг. 2005 г. Новосибирск: Изд-во "Параллель", 2005. С. 121–126.
28. *Дуйшеналиев Т.Б.* Неклассические решения механики деформируемого тела. М.: Изд-во МЭИ, 2017. 400 с.
29. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
30. *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
31. *Коновалов А.Н., Сорокин С.Б.* Структура уравнений теории упругости. Статическая задача. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. 26 с.
32. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018. 560 с.
33. *Георгиевский Д.В., Победря Б.Е.* О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твердого тела // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 1043–1048.
34. *Остросаблин Н.И.* Параметризация общей группы Лоренца // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 114–125. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.409
35. *Ивлев Д.Д.* К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Изв. Инж.-технол. Акад. Чуваш. респ. 1996. № 2 (3). С. 5–7.
36. *Остросаблин Н.И.* Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
37. *Остросаблин Н.И.* Классы симметрии тензоров анизотропии квазиупругих материалов и обобщение подхода Кельвина // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58. № 3. С. 108–129. https://doi.org/10.15372/PMTF20170312
38. *Ишлинский А.Ю.* Эйлерово описание деформирования одной изотропной среды // Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 333–336.
39. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Об одной аналогии между уравнениями теории упругости и общей теорией относительности // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 143–154. https://doi.org/10.31857/S0572329921030120
40. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Функции напряжений в теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 4. С. 103–113. https://doi.org/10.31857/S0572329922040122
41. *Лурье С.А., Белов П.А.* Уравнения совместности и функции напряжений в теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 4. С. 114–129. https://doi.org/10.31857/S0572329922040079
42. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Принципиальные проблемы релятивистской механики деформируемого твёрдого тела // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 125–135. https://doi.org/10.31857/S0572329923700083
43. *Stippes M.* A remark on compatibility of strain // ZAMP. 1970. V. 21. № 6. P. 1081–1083. https://doi.org/10.1007/BF01594865

ON THE CAUCHY STRAIN TENSOR, COMPATIBILITY CONDITIONS, AND DEFINING EQUATIONS OF AN ELASTIC MEDIUM

N. I. Ostrosablin[a, *]

[a]*Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics, Siberian branch, RAS, Novosibirsk, Russia*

**e-mail: o.n.ii@yandex.ru*

Abstract – Using the example of four-dimensional equilibrium equations for kinetic stresses in Eulerian rectangular coordinates, it is shown that the operator of the four-dimensional Cauchy strain tensor is conjugate (transposed) to the operator of the equilibrium equations. The same connection between the operators of the equilibrium equations and the Cauchy strain tensor also holds in the three-dimensional case. Three variants of the derivation of the conditions for the compatibility of Cauchy deformations are given. In the four-dimensional case, there are 21 compatibility conditions, and in the three-dimensional case, there are six Saint-Venant compatibility conditions. It is shown that the Cauchy strain tensor, both in Eulerian and Lagrangian variables, completely determines the deformed state of a continuous medium. At the same time, no restrictions on the amount of displacements, deformations or rotations are required. The Lagrange-Green and Euler-Almancy tensors, the so-called large or nite deformations, and the displacements are expressed using Cesaro formulas in terms of the Cauchy strain tensor. The de ning equations of an elastic continuous medium relate the Cauchy true stress tensor and the Cauchy strain tensor one to another. Using proper bases in the spaces of symmetric stress and strain tensors, the de ning relations can be written as six separate independent equations containing functions of only one argument. For continuous media with crystallographic symmetries, we can use the bases obtained on the basis of the generalized Hooke's law.

Keywords: kinetic stresses, Cauchy strain and stress tensors, four-dimensional continuous medium, Lagrangian and Euler variables, compatibility conditions, Lagrange-Green and Euler-Almancy tensors, Cesaro formulas, de ning equations, eigenstates

REFERENCES

1. *Prager W.* Einfuhrung in die Kontinuumsmechanik. Birkhauser Verlag. Basel und Stutgart, 1961.
2. *Gol'denblat I.I.* Nonlinear problems in elasticity theory. M.: Nauka, 1969, 366 p. [In Russian].
3. *Lurie A.I.* Theory of elasticity. Springer Science; Business Media, 2010.
4. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. [In Russian].
5. *Pobedrya B.E.* On the relations of geometric and physical nonlinearity in the theory of elasticity and the meaning of the vector of movements // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 1987. V. 40. № 4. P. 15–26 [In Russian].
6. *Chernykh K.F., Litvinenkova Z.N.* Large elastic deformations theory. Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1988. 254 p. [In Russian].

7. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity. V. 1. Three Dimensional Elasticity. North Holland, 1988.
8. *Korobeynikov S.N.* Nonlinear deformation of solid bodies. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, 2000. 262 p. [In Russian].
9. *Markin A.A., Sokolova M.Yu.* Thermal mechanic of elastoplastic deformation. M.: Fizmatlit, 2013. 320 p. [In Russian].
10. *Brovko G.L.* Constitutive relations of continuum mechanics. M.: Nauka, 2017. 432 p. [In Russian].
11. *Rogovoy A.A.* [Formalized approach to construction of the deformed solid body. Part 1. Basic equations of continuous media mechanics. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Research, 2021. 286 p. [In Russian].
12. *Ostrosablin N.I.* Compatibility conditions of small deformations and stress functions // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1997. V. 38. № 5. P. 774–783. https://doi.org/10.1007/BF02467892
13. *Ostrosablin N.I.* On Beltrami–Michell equations and Saint-Venant operator // Dinamika sploshnoy sredy. 2000. V. 116. P. 211–217 [In Russian].
14. *Ostrosablin N.I.* On compatibility conditions of small deformations and stress functions // Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, mekhanika, informatika. 2001. V. 1. № 1. P. 67–77 [In Russian].
15. *Pobedrya B.E.* Static problem in stresses // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 2003. № 3. P. 61–67 [In Russian].
16. *Nikabadze M.U.* An eigenvalue problem for tensors used in mechanics and the number of independent Saint-Venant strain compatibility conditions // Moscow Univ. Mech. Bull. 2017. V. 72. № 3. P. 66–69. https://doi.org/10.3103/S0027133017030037
17. *Truesdell C.* Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Rational. Mech. Anal. 1959. V. 4. № 1. P. 1–29.
18. *Kilchevsky N.A.* Continual systems mechanics // Izbrannye trudy. Kiev: Naukova dumka, 1984. 430 p. [In Russian].
19. *Kilchevskaya E.N., Kilchevsky N.A.* Functions of kinetic stresses and the geometry of space in a deformed continuum // Mekhanika sploshnoy sredy i rodstvennye problemy analiza. M.: Nauka. 1972. P. 243–250 [In Russian].
20. *Chernyshev G.N.* Mutual generalization of elastic and gravitational eld equations on the basis of solid mechanics // Mech. Solids. 2002. V. 37. № 2. P. 70–81.
21. *Chernyshev G.N.* Elasticity, gravity, electrodynamics. M.: Nauka, 2003. 144 p. [In Russian].
22. *Ostrosablin N.I.* Functions of kinetic stresses in the mechanics of continuous media // Dinamika sploshnoy sredy. 2007. V. 125. P. 76–116 [In Russian].
23. *Fedorov L.V.* Solution of the Dynamic Problem of the Linear Theory of Elasticity // Mech. Solids. 2018. V. 53. P. 609–614. https://doi.org/10.3103/S002565441806002X
24. *Rychlewski J.* On Hooke's law // J. Appl. Math. Mech. 1984. V. 48. № 3. P. 303–314. https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90137-0
25. *Ostrosablin N.I.* Functional relation between two symmetric second-rank tensors // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2007. V. 48. P. 734–736. https://doi.org/10.1007/s10808-007-0094-8
26. *Annin B.D., Ostrosablin N.I.* Anisotropy of elastic properties of materials // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. V. 49. P. 998–1014. https://doi.org/10.1007/s10808-008-0124-1

27. *Duishenaliyev T.B., Zhakypbekov A.B., Chynybayev M.K.* On the measures of deformation // Chislennye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Trudy 19 Vserossiyskoy konferentsii, Biysk. Novosibirsk: Parallel'. 2005. P. 121–126 [In Russian].
28. *Duishenaliyev T.B.* Nonclassical decisions of the mechanics of the deformable body. M.: Izdatel'stvo MEI, 2017. 400 p. [In Russian].
29. *Sedov L.I.* Mechanics of continuous media. World Scientic, 1997. V. 1.
30. *Hahn H.G.* Elastizitatstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und raumliche Probleme. B.G. Teubner. Stuttgart, 1985.
31. *Konovalov A.N., Sorokin S.B.* The structure of equations of the elasticity theory. Static problem. Novosibirsk, 1986 (Preprint. № 665). 26 p. [In Russian].
32. *Georgievskii D.V.* Selected tasks of continuous mechanics. M.: Lenand, 2018. 560 p. [In Russian].
33. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* The number of independent compatibility equations in the mechanics of deformable solids // J. Appl. Math. Mech. 2004. V. 68. № 6. P. 941–946. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.015
34. *Ostrosablin N.I.* A Parametrization of the General Lorentz Group // J. Appl. Ind. Math. 2020. V. 14. P. 743–753. https://doi.org/10.1134/S1990478920040122
35. *Ivlev D.D.* To the theory of di erential correspondence in the mechanics of the continuous environment // Izvestiya Inzhenerno-tekhnologicheskoy Akademii Chuvashskoy respubliki, 1996. № 2. P. 5–7 [In Russian].
36. *Ostrosablin N.I.* Elasticity eigenvalues and eigenvectors for the materials of crystallographic singonium // Dinamika sploshnoy sredy. 1986. V. 75. P. 113–125 [In Russian].
37. *Ostrosablin N.I.* Symmetry classes of the anisotropy tensors of quasielastic materials and a generalized Kelvin approach // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58. P. 469488. https://doi.org/10.1134/S0021894417030129
38. *Ishlinkii A.Yu.* Euler description of deformation of one isotropic medium. Applied tasks of mechanics. Part. 1. Mechanics of viscoplastic and not quite elastic bodies. M.: Nauka, 1986. P. 333–336 [In Russian].
39. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Analogy between the equations of elasticity and the general theory of relativity // Mech. Solids. 2021. V. 56. P. 404–413. https://doi.org/10.3103/S0025654421030134
40. *Vasil'ev V.V., Fedorov L.V.* Stress functions in elasticity theory // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 770–778. https://doi.org/10.3103/S0025654422040197
41. *Lurie S., Belov P.* Compatibility equations and stress functions in elasticity theory // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 779–791. https://doi.org/10.3103/S0025654422040136
42. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Principal problems of relativistic mechanics of solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. P. 2034–2042. https://doi.org/10.3103/S0025654423700231
43. *Stippes M.* A remark on compatibility of strain // ZAMP. 1970. V. 21. № 6. P. 1081–1083.