

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЛИСТА ГРАФЕНА НА ОСНОВЕ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН

© 2025 г. А. А. Саркисян^{а, *}, С. О. Саркисян^{а, **}

^аШиракский государственный университет им. М. Налбандяна, Гюмри, Армения

*E-mail: armenuhis@gmail.com, **e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 29.07.2024 г.

После доработки 29.09.2024 г.

Принята к публикации 01.11.2024 г.

Двумерные наноматериалы (графен, углеродная нанотрубка) являются высокопрочными и сверхлегкими материалами, которые имеют ряд перспективных областей применения. С теоретической и прикладной точек зрения актуально на основе соответствующей континуальной теории деформационного поведения двумерных наноматериалов изучение различных задач их статики, устойчивости, колебаний и расчетов требуемых механических характеристик.

В данной работе на основе моментно-мембранной теории упругих пластин, которая трактуется как континуальная теория деформационного поведения графена, изучаются задачи устойчивости свободно опертого листа графена (прямоугольной пластинки), равномерно сжатом в одном направлении, сжатом по двум направлениям, под действием касательных напряжений в его плоскости. Рассматривается также задача устойчивости равномерно сжатого листа графена, свободно опертых по двум противоположным сторонам и имеющих другие граничные условия по двум другим сторонам.

При решении задач на устойчивость листа графена (прямоугольной пластинки) применяется метод Эйлера, при этом рассматривается слегка отклоненная от начального (безмоментного) положения форма равновесия (выпучившаяся пластинка), для которой составляются дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия. Из решения указанных граничных задач определяется критическое значение нагрузки, т.е. такого его значения, при котором первоначальная плоская форма пластинки становится неустойчивой. Все решения сопровождаются численными результатами: таблицами или диаграммами, дающими значения критической нагрузки для каждого частного случая.

Ключевые слова: лист графена, моментно-мембранная теория пластин, устойчивость первоначально-сжатого состояния, критические нагрузки

DOI: 10.31857/S1026351925030108, EDN: BAOZOV

1. Введение. Исследования устойчивости равновесия упругих тонких пластин и оболочек — одна из актуальных проблем механики твердых деформируемых тел. Для двумерных наноматериалов (графен, углеродная нанотрубка) эта проблема актуальная и современная.

При исследовании процессов деформирования однослойного листа графена или углеродной нанотрубки можно непосредственно рассматривать атомную природу строения этих наноструктур.

Для моделирования двумерных наноматериалов широкое распространение получил классический вариант метода молекулярной динамики [1–3], когда считается, что между атомами материала взаимодействие только силовое и центральное.

В связи с этим в работах [4, 5] отмечается, что если в атомной модели однослойной нанотрубки учесть только силовое взаимодействие центрального характера, тогда нанотрубка не имела бы изгибной жесткости и была бы неустойчивой структурой. Это высказывание полностью относится и к графену, тогда как наличие изгибной жесткости — это принципиальное свойство как нанотрубки, так и графена. А это, в свою очередь, означает [4, 5], что только существование однослойной нанотрубки или листа графена уже свидетельствует о необходимости учета моментного взаимодействия между атомами этих двумерных наноматериалов. Отметим, что в работах [6–9] существенно развивается направление изучения механических свойств графена и углеродной нанотрубки с использованием частиц с вращательными степенями свободы и с учетом моментного взаимодействия между их атомами. На этой основе в работах [6, 10] как континуальная модель деформационного поведения однослойной углеродной нанотрубки или листа графена устанавливается трехмерная моментная теория упругости с независимыми полями перемещений у вращений. Принимая это, следует обращать внимание на следующую актуальную задачу: так как графен и углеродная нанотрубка состоят из одного атомного слоя, на основе трехмерной моментной теории упругости актуально построение моделей пластин и цилиндрических оболочек как адекватных континуальных моделей листа графена и углеродной нанотрубки.

Продолжая тему о применении метода молекулярной динамики, следует констатировать, что в качестве более точного метода расчета применяется этот метод с учетом дискретного строения двумерных наноматериалов с использованием различных межатомных потенциалов, учитывающих энергии как валентных связей, так и валентных углов [11–16].

Обосновывая использование гармонического потенциала для межатомного взаимодействия графитовой плоскости и углеродной нанотрубки (конкретный вид этого потенциала приведен в работе [17]), а также имея в виду, что гармонический потенциал соответствует потенциальной энергии деформации упругого стержня, соединяющего пару взаимодействующих атомов, в работе [18] построена стержневая система по классической теории, эквивалентной атомной модели указанных двумерных наноматериалов. Такая стержневая система является дискретно-континуальной моделью для графитовой плоскости или нанотрубки. Работы [19–26] посвящены дальнейшему и существенному развитию этого направления. Так, например, в работе [19]

построена дискретно-континуальная модель деформационного поведения графитовой плоскости и углеродной нанотрубки, а решение задачи многостержневой системы (как задача прикладной теории упругости) осуществлено методом конечных элементов по специально разработанной программе. В результате исследована деформация графитовой плоскости и углеродной нанотрубки, определены модели Юнга и сдвига, коэффициент Пуассона и другие параметры деформации рассматриваемых двумерных наноматериалов.

Для моделирования деформаций, колебаний и выпучивания углеродной нанотрубки и листа графена широко используется также метод молекулярной механики. Метод молекулярной механики можно разделить на стандартный метод молекулярной механики [27, 28], основанный на прямом использовании силовых полей атомных взаимодействий, и метод молекулярной структурной механики [29–31], в котором потенциальные энергии атомных взаимодействий аппроксимируются потенциальными энергиями упругих балочных элементов Бернулли–Эйлера с круглым поперечным сечением. В указанных работах применением метода молекулярной структурной механики изучены задачи о собственных колебаниях, выпучивания и послекритического поведения листа графена и углеродной нанотрубки. Здесь следует отметить, что по поводу применения классических моделей упругих балок или пластин так или иначе используется понятие толщины графена, которая является неоднозначным понятием [32].

Как отметили выше, специальный интерес представляет не сама трехмерная моментная теория упругости, а построение на основе трехмерной моментной теории упругости адекватных деформационных моделей однослойного листа графена (соответствующая теория тонких пластин), а также однослойной углеродной нанотрубки (соответствующая теория тонких цилиндрических оболочек). С этой точки зрения отметим, что в работе [33] сначала изучается линейная атомная цепочка, когда между атомами силовое взаимодействие не центрально, имеется также моментное взаимодействие (для силового поля атомных взаимодействий выбран гармонический потенциал), в результате построена специальная одномерно-стержневая континуальная ее модель. Придерживаясь метода молекулярной структурной механики при рассмотрении ячейки периодичности кристаллической решетки графена, взаимодействие между атомами заменяется указанными стержнями. Таким образом, построена дискретно-континуальная (стержневая) модель графена и предельным переходом — также его континуальная линейная модель. В этой же работе устанавливается, что построенная континуальная модель графена полностью идентична моментно-мембранной линейной теории упругих пластин [34, 35] и при помощи сравнения этих двух моделей были определены упругие жесткостные характеристики указанной теории пластин через физические параметры гармонического потенциала для углерода (известные в литературе).

Таким образом, моментно-мембранная линейная теория упругих пластин: а) плоское напряженное состояние, б) поперечный изгиб, с определенными (указанным выше образом) жесткостными характеристиками, трактуется как континуальная теория деформационного поведения графена, которая

естественным образом открывает большие возможности для изучения различных прикладных задач статики, динамики и устойчивости листа графена. Весьма существенно отметить, что в этой континуальной теории деформационного поведения листа графена не используется понятие толщины графена.

Возможно рассмотрение деформационных задач листа графена в своей плоскости: для этого необходимо использовать модель плоского напряженного состояния моментно-мембранной теории упругих пластин [33–35], аналогично при его поперечном изгибе необходимо использовать модель поперечного изгиба указанной теории пластин [33–35].

В работе [36] аналогичным образом моментно-мембранная теория упругих тонких цилиндрических оболочек трактуется как континуальная модель деформационного поведения однослойной углеродной нанотрубки.

В данной работе на основе моментно-мембранной теории упругих пластин изучаются задачи устойчивости начально-деформированного состояния листа графена, представляющие практический интерес: 1) когда графен шарнирно опирается по всему контуру и в своей плоскости сжимается в одном направлении; 2) сжимается в двух направлениях; 3) свободно опирается по двум противоположным сторонам, перпендикулярным к направлению сжатия, и имеет другие граничные условия по двум другим сторонам; 4) находится под действием сдвигающих усилий в своей плоскости.

2. Постановка задачи. Как уже отметили, из уравнений и граничных условий моментно-мембранной линейной теории упругих оболочек [34, 35] при переходе к пластинке получим две отдельные системы уравнений и граничные условия: 1) систему уравнений и граничные условия плоского напряженного состояния упругих пластин, 2) систему уравнений и граничные условия поперечной изгибной деформации упругих пластин. Ниже приведем обе системы уравнений и граничные условия в декартовой системе координат x, y .

2.1. Основные уравнения и граничные условия плоского напряженного состояния моментно-мембранной теории упругих пластин. Основные уравнения и граничные условия плоского напряженного состояния моментно-мембранной теории упругих пластин выражаются так [33–35]:

— уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial S_{L23}}{\partial y} + (S_{12} - S_{21}) = 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

— геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3, \\ \Gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3, \quad \kappa_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad \kappa_{23} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

— физические соотношения упругости

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \tilde{E}_* (\Gamma_{11} + \nu \Gamma_{22}), \quad T_{22} = \tilde{E}_* (\Gamma_{22} + \nu \Gamma_{11}), \\
S_{12} &= C_* (\Gamma_{12} + \eta_1 \Gamma_{21}), \quad S_{21} = C_* (\Gamma_{21} + \eta_1 \Gamma_{12}), \\
L_{13} &= B_* \kappa_{13}, \quad L_{23} = B_* \kappa_{23}, \quad \eta_1 = \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha};
\end{aligned} \tag{2.3}$$

– граничные условия

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \bar{T}_{11}, \quad S_{12} = \bar{S}_{12}, \quad L_{13} = \bar{L}_{13} \quad \text{при } x = \text{const}, \\
S_{21} &= \bar{S}_{21}, \quad T_{22} = \bar{T}_{22}, \quad L_{23} = \bar{L}_{23} \quad \text{при } y = \text{const}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

или

$$u_1 = \bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad \Omega_3 = \bar{\Omega}_3 \quad \text{при } x = \text{const} \text{ или } y = \text{const}. \tag{2.5}$$

Могут иметь место также смешанные граничные условия.

Здесь u_1, u_2 – тангенциальные перемещения, Ω_3 – свободный поворот точек пластинки вокруг оси z ; $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}$ – тангенциальные деформации; κ_{13}, κ_{23} – изменения кривизны в плоскости xu ; $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ – тангенциальные усилия; L_{13}, L_{23} – моменты.

В физических соотношениях упругости (2.3) величины $\tilde{E}_* = E_* / (1 - \nu^2)$, C_* , B_* представляют собой жесткостные характеристики графена в плоскости xu ; ν – коэффициент Пуассона графена в плоскости xu . В работе [33] численно определены именно указанные жесткостные характеристики для графена ($E_* = 287$ Н/м, $C_* = 158$ Н/м, $B_* = 5.05 \cdot 10^{-10}$ Н·м/рад²).

2.2. Основные уравнения и граничные условия поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин. Основные уравнения и граничные условия поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин выражаются так [33–35]:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} = 0, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - N_{13} = 0; \tag{2.6}$$

– геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \quad \kappa_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}; \tag{2.7}$$

– физические соотношения упругости

$$\begin{aligned}
N_{13} &= D_* \Gamma_{13}, \quad N_{23} = D_* \Gamma_{23}, \\
L_{11} &= D' [(1 + 2\eta_2) \kappa_{11} + \eta_2 \kappa_{22}], \quad L_{22} = D' [(1 + 2\eta_2) \kappa_{22} + \eta_2 \kappa_{11}], \\
L_{12} &= D' [\kappa_{12} + \eta_2 \kappa_{21}], \quad L_{21} = D' [\kappa_{21} + \eta_2 \kappa_{12}], \quad \eta_2 = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon};
\end{aligned} \tag{2.8}$$

– граничные условия:

$$N_{13} = \bar{N}_{13}, \quad L_{11} = \bar{L}_{11}, \quad L_{12} = \bar{L}_{12} \quad \text{при } x = \text{const},$$

$$N_{23} = \bar{N}_{23}, \quad L_{21} = \bar{L}_{21}, \quad L_{22} = \bar{L}_{22} \quad \text{при } y = \text{const} \quad (2.9)$$

или

$$w = \bar{w}, \quad \Omega_1 = \bar{\Omega}_1, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}_2 \quad \text{при } x = \text{const}, \quad \text{при } y = \text{const}.$$

Могут иметь место также граничные условия смешанного типа. Здесь w – прогиб пластинки; Ω_1, Ω_2 – свободные повороты точек пластинки вокруг осей x и y соответственно; Γ_{13}, Γ_{23} – поперечные сдвиговые деформации в плоскостях xz и yz ; $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{21}$ – компоненты тензора изгиба-кручений; N_{13}, N_{23} – перерезывающие усилия; $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ – моменты от моментных напряжений; D_*, D' – жесткостные характеристики графена при поперечном изгибе. Указанные характеристики для графена численно определены в работе [33] ($D' = 4.15 \cdot 10^{-10}$ Н·нм/рад², $D_* = 123.34$ Н/м, $\eta_2 = -0.22$).

Если геометрические соотношения (2.7) подставить в физические соотношения (2.8) и полученные в уравнения равновесия (2.6), получим систему разрешающих уравнений поперечного изгиба пластин относительно функций $w(x, y), \Omega_1(x, y), \Omega_2(x, y)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 w + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} &= -q, \\ (1 + \nu_m) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2} + \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x \partial y} + (1 + \nu_m) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y^2} - \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2 \right) &= 0, \quad \nu_m = 2\eta_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При изучении задач об устойчивости начально-деформированного состояния графена необходимо рассматривать граничную задачу (2.10), (2.9), для этого в первом уравнении из (2.10) следует поперечную нагрузку q заменить на [37, 38]:

$$q = -T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (S_{12} + S_{21}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

где $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ – решение начальной (безмоментной) граничной задачи плоского напряженного состояния упругих пластин (2.1)–(2.3) с соответствующими граничными условиями.

3. Устойчивость свободно опертого листа графена (прямоугольной пластинки), равномерно сжатого в одном направлении. Пусть лист графена, т.е. прямоугольная пластинка (рис. 1), сжата в своей плоскости силами, равномерно распределенными по сторонам $x=0$ и $x=a$. Величина сжимающей силы на единицу длины края обозначим через P ($P = \text{const}$).

Постепенным увеличением P достигаем условий, при котором плоская форма равновесия сжатой пластинки становится неустойчивой и происходит изгиб пластинки. Соответствующее критическое значение сжимающей силы обозначим P_{cr} , которое и требуется определить. При $P = P_{cr}$ пластинка могла находиться в двух равновесных состояниях: 1) начальное плоское

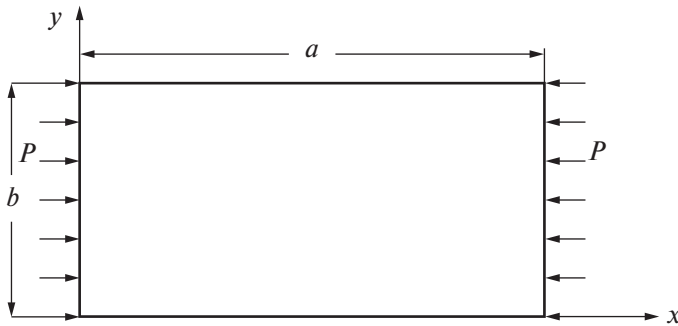


Рис. 1. Прямоугольная пластинка подвергнута действию равномерно распределенных сжимающих сил $T_{11} = -P$.

сжатое состояние, для определения этого напряженного состояния необходимо рассматривать систему уравнений (2.1)–(2.3) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad x = a: \quad T_{11} = -P, \quad S_{12} = 0, \quad L_{13} = 0, \\ \text{при } y = 0, \quad y = b: \quad S_{12} = 0, \quad T_{22} = 0, \quad L_{23} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

2) состояние поперечного изгиба, в этом случае необходимо рассматривать систему уравнений (2.6)–(2.8) с учетом (2.10), в данном случае с граничными условиями шарнирного опирания:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad L_{12} = 0, \\ \text{при } y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad L_{21} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Легко убедиться, что решение граничной задачи (2.1)–(2.3), (3.1) имеет вид:

$$T_{11} = -P, \quad S_{12} = S_{21} = 0, \quad L_{13} = L_{23} = 0. \quad (3.3)$$

Систему уравнений статической устойчивости пластинки получим в виде (2.10), в котором q следует заменить по формуле (2.11), принимая $T_{11} = -P$, $S_{12} = S_{21} = T_{22} = 0$.

К полученной системе уравнений статической устойчивости пластинки следует присоединить граничные условия (3.2).

Решение граничной задачи (2.10), (3.2) представим так:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \Omega_1 = B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \Omega_2 = C \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.4)$$

которое тождественно удовлетворяет граничным условиям (3.2).

Подставляя (3.4) в систему уравнений (2.10) для определения постоянных A, B, C приходим к следующей алгебраической линейной однородной системе уравнений:

$$-\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \frac{1}{D_*} P \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] A + \frac{n\pi}{b} B - \frac{m\pi}{a} C = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{D_*}{D'} \frac{n\pi}{b} A - \left[(1 + \nu_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{D_*}{D'} \right] B - \nu_m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) C = 0, \\ - \frac{D_*}{D'} \frac{m\pi}{a} A - \nu_m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) B - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + (1 + \nu_m) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{D_*}{D'} \right] C = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обращая определитель системы (3.5) в нуль, для P получим следующее выражение:

$$P = \frac{D' \pi^2}{b^2} \frac{(m^2 + s^2 n^2)^2}{m^2 \left[\frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2 n^2) + s^2 \right]}, \quad s = \frac{a}{b}. \quad (3.6)$$

Изучение этого выражения на минимум показывает, что минимум получится при $n = 1$. Действительно, формула (3.6) дает все значения P , соответствующие значениям $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$, при которых становится возможным искривление вида (3.4). Из всей совокупности значений P надо выбрать наименьшее; оно и будет критическим.

Рассматривая производную P от n , получим формулу:

$$\frac{dP}{dn} = \frac{D' \pi^2}{b^2 m^2} \frac{2ns^2 (m^2 + s^2 n^2) \left[\frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2 n^2) + 2s^2 \right]}{\left[\frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2 n^2) + s^2 \right]^2}. \quad (3.7)$$

Как видно из формулы (3.7), $dP/dn > 0$, следовательно зависимость P от n представляет строго возрастающую функцию, следовательно, наименьшее значение P получается при $n = 1$, чему соответствует искривление в направлении стороны b по одной полуволе синусоиды.

Далее нужно определить, при каком значении m выражение для P , соответствующее данному отношению сторон s , будет наименьшим, и найти это наименьшее значение.

При $n = 1$ формула для P принимает вид:

$$\begin{aligned} P = \frac{D' \pi^2}{b^2} \frac{(m^2 + s^2)^2}{m^2 \left[\frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2) + s^2 \right]}, \\ \frac{dP}{dm} = - \frac{2D' \pi^2 s^2 (m^2 + s^2) \left((-m^2 + s^2) + \frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2) \right)}{m^3 b^2 \left(s^2 + \frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2) \right)^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

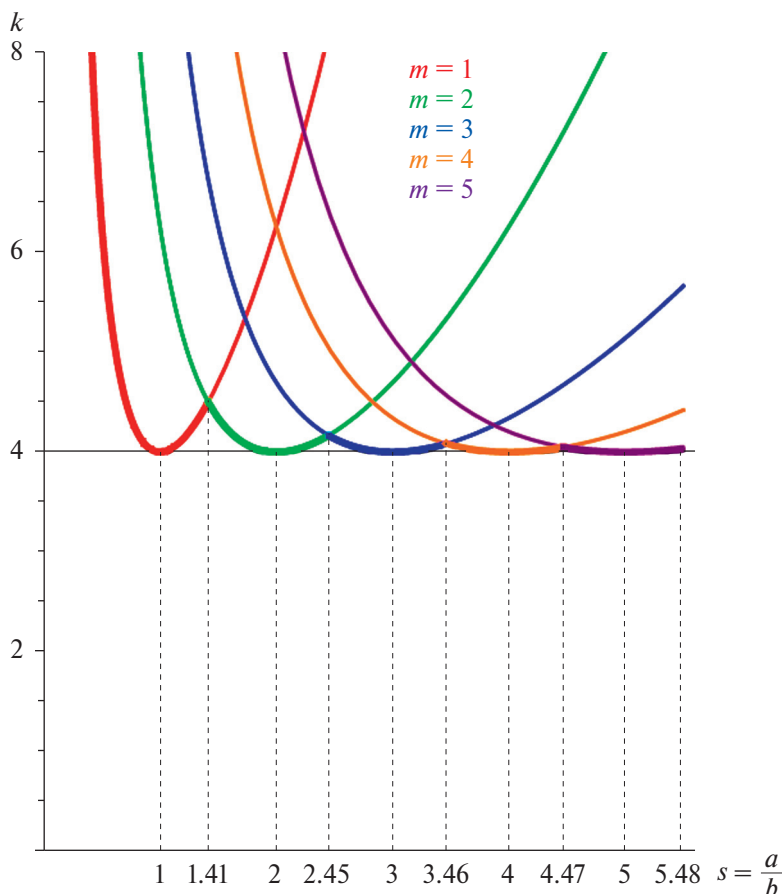


Рис. 2. Зависимость коэффициента k от отношения $s = a/b$ при разных значениях m .

В результате для m получим выражение:

$$m = \frac{\sqrt{b^2 D_* + D' \pi^2}}{\sqrt{b^2 D_* - D' \pi^2}} s = \frac{\sqrt{1 + \frac{D'}{D_* b^2} \pi^2}}{\sqrt{1 - \frac{D'}{D_* b^2} \pi^2}} s. \quad (3.9)$$

Так как m принимает значения 1, 2, 3, ..., а правая часть (3.9) может быть в общем случае положительным действительным числом, для определения P_{cr} поступим следующим образом. Формулу (3.8) перепишем так:

$$P = k \frac{D' \pi^2}{b^2}, \quad k = \frac{(m^2 + s^2)^2}{m^2 \left[\frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 (m^2 + s^2) + s^2 \right]}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

Здесь k — числовой коэффициент, величина которого зависит от отношения $s = a/b$ и m .

На рис. 2 построены графики зависимости коэффициента k от отношения сторон пластинки s для разных значений m .

Жирной линией проведена огибающая эти кривые, которая определяет минимальные значения коэффициента k в зависимости от отношения сторон s .

На огибающей отмечены точки, в которых происходит смена числа полувольт синусоиды, образующихся вдоль оси x при выпучивании пластинки. Они определяются как точки пересечения двух кривых, соответствующих двум смежным значениям коэффициента m . Их можно определить в общем виде из сравнения коэффициентов k согласно формуле (3.10) при числах полувольт m и $m + 1$:

$$\frac{(m^2 + s^2)^2}{m^2((m^2 + s^2) + k s^2)} = \frac{((m + 1)^2 + s^2)^2}{(m + 1)^2(((m + 1)^2 + s^2) + k s^2)}. \quad (3.11)$$

Из этого уравнения получим:

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1 + 2m(1 + m))\pi^2 \frac{D'}{D_* b^2} + \sqrt{4m^2(1 + m)^2 + (1 + 2m)^2} \pi^4 \left(\frac{D'}{D_* b^2}\right)^2}{1 + \pi^2 \frac{D'}{D_* b^2}}}. \quad (3.12)$$

В формуле (3.12), подставляя $m = 1$, получим $s = 1.41$; при $m = 2$ получим $s = 2.45$; при $m = 3$ получим $s = 3.46$; при $m = 1$ получим $s = 4.47$; при $m = 5$ получим $s = 5.48$ и т.д.

Таким образом, пластинки (лист графена), имеющие отношение сторон $s < 1.41$, при потере устойчивости изгибаются вдоль оси x по одной полуволне синусоиды. Если отношение сторон пластинки $1.41 < s < 2.45$, то пластинка при выпучивании образует вдоль оси x две полуволны синусоиды, если $2.45 < s < 3.46$ — три полуволны и т.д.

В итоге для каждого $s = a/b$ имеем значение коэффициента k , а по формуле (3.10) определяется соответствующее значение для P_{cr} . Например, когда размеры листа графена имеют значения: $b = 10$ нм, $a = 20$ нм, получаем $P_{cr} = 24.58$ Н/м.

Таблица 1. Значения коэффициента k при разных $s = a/b$

s	0.5	1	1.41	2	2.5	3	3.46	4	4.47	5
k	6.25	4	4.49	4	4.13	4	4.08	4	4.05	4
m	1	1	1–2	2	3	3	3–4	4	4–5	5

В табл. 1 даны значения коэффициента k для некоторых отношений s и указано соответствующее число полувольт.

Здесь приведем значение $\min k$ для квадратной пластинки (в этом случае $m=1$):

$$P = k \frac{D' \pi^2}{b^2}, \quad k = \frac{4}{2 \frac{D'}{D_* b^2} \pi^2 + 1}. \quad (3.13)$$

Перепишем формулу (3.10) в виде:

$$P = \frac{D' m^2 \pi^2}{a^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{m^2} s^2\right)^2}{\frac{D' m^2 \pi^2}{D_* a^2} \left(1 + \frac{1}{m^2} s^2\right) + 1}. \quad (3.14)$$

Из себя представляет интерес также следующее предельное значение: $b/a \rightarrow \infty$ или $s \rightarrow 0$, при котором выпадают граничные условия при $y=0$, $y=b$. Для этого значения будем иметь:

$$P = \frac{D' m^2 \pi^2}{a^2} \frac{1}{\frac{D' m^2 \pi^2}{D_* a^2} + 1}. \quad (3.15)$$

4. Устойчивость листа графена (прямоугольной пластинки), сжатого по двум направлениям. Прямоугольная пластинка сжимается нагрузкой P_1 , распределенной равномерно по двум сторонам, и нагрузкой P_2 , распределенной равномерно по другим сторонам (рис. 3).

Если одно из усилий растягивающее, то его в нижеприведенных уравнениях нужно взять со знаком минус.

Задачу об устойчивости такой пластинки будем решать для случая всех четырех шарнирно-опертых сторон. Разрешающую систему уравнений

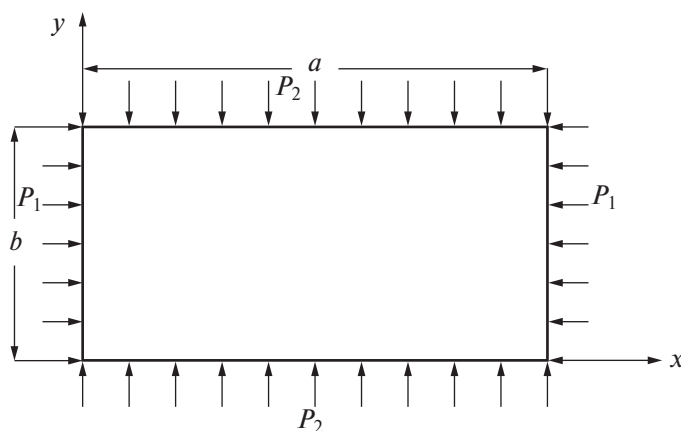


Рис. 3. Прямоугольная пластинка подвергнута действию равномерно распределенных сжимающих сил $T_{11}=P_1$ и $T_{22}=P_2$.

статической устойчивости пластинки для рассматриваемого случая получим, если в систему (2.10) вместо q подставим (2.11) с учетом того, что $T_{11} = P_1$, $T_{22} = P_2$, $S_{12} = S_{21} = 0$. К полученной системе уравнений следует присоединить граничные условия (3.2).

Далее для определенности задачи необходимо задать дополнительное условие для усилий P_1 и P_2 , указав, как эти величины связаны между собой. Рассмотрим подробнее частный случай распределения усилий, когда усилия P_1 и P_2 меняются, но отношение их величин остается постоянным: $T_{11} = -P$, $T_{22} = -\alpha P_2$.

С учетом вышесказанного решение граничной задачи (2.10), (3.2) представим в виде (3.4) (в этом случае граничные условия (3.2) тождественно будут удовлетворены), тогда для определения постоянных коэффициентов A , B , C приходим к следующей однородной линейной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{1}{D_*} P \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right] A + \frac{n\pi}{b} B - \frac{m\pi}{a} C = 0, \\ & \frac{D_*}{D'} \frac{n\pi}{b} A - \left[(1 + \nu_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{D_*}{D'} \right] B - \nu_m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) C = 0, \\ & - \frac{D_*}{D'} \frac{m\pi}{a} A - \nu_m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) B - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + (1 + \nu_m) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{D_*}{D'} \right] C = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обращая определитель линейной однородной алгебраической системы (4.1) в нуль, находим величину силы P , удерживающую пластинку в изогнутом состоянии:

$$P = \frac{D'\pi^2}{b^2} \frac{1}{m^2 + \alpha n^2 s^2} \frac{(m^2 + n^2 s^2)^2}{\left[\frac{D'\pi^2}{D_* b^2} (m^2 + n^2 s^2) + s^2 \right]}. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) представим в виде:

$$P = \frac{D'\pi^2}{b^2} k, \quad (4.3)$$

где

$$k = \frac{1}{m^2 + \alpha n^2 s^2} \frac{(m^2 + n^2 s^2)^2}{\left[\frac{D'\pi^2}{D_* b^2} (m^2 + n^2 s^2) + s^2 \right]}. \quad (4.4)$$

Критическое значение силы P соответствует минимальному значению коэффициента k . Подсчитываем минимальные значения коэффициента k для одного частного значения $\alpha = 1$, т.е. тогда пластинка (лист графена) сжимается одинаковыми силами в двух направлениях.

В этом случае из формулы (4.4) получаем:

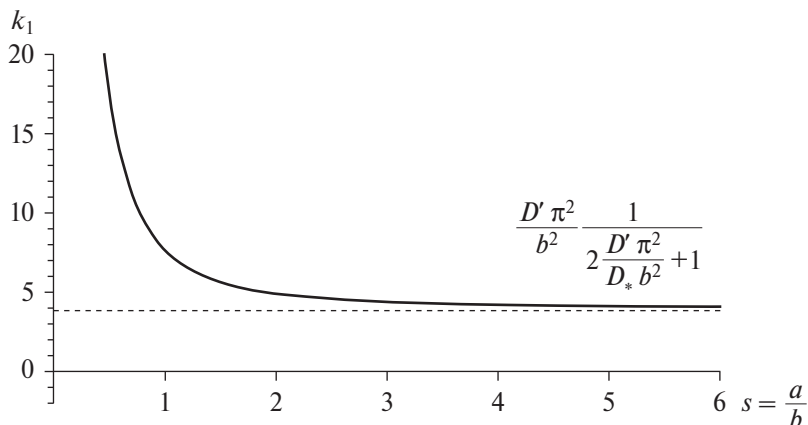


Рис. 4. Зависимость минимума коэффициента k от отношения сторон пластинки s .

$$k = \frac{m^2 + n^2 s^2}{\frac{D' \pi^2}{D_* b^2} (m^2 + n^2 s^2) + s^2}. \quad (4.5)$$

Можно показать, что наименьшее значение коэффициента k соответствует значениям $m = 1$, $n = 1$.

Таким образом, подставляя полученные значения m и n в формулу (4.5), в случае сжатия прямоугольной пластинки в двух направлениях одинаковыми силами, для критического значения силы P получим:

$$P_{cr} = \frac{D' \pi^2}{b^2} \min k, \quad \min k = \frac{1 + s^2}{\frac{D' \pi^2}{D_* b^2} (1 + s^2) + s^2}. \quad (4.6)$$

Можно построить график зависимости минимума коэффициента k от отношения сторон пластинки s (рис. 4).

Для квадратной пластинки $s = 1$ и

$$\min k = \frac{2}{2 \frac{D' \pi^2}{D_* b^2} + 1},$$

следовательно, для критического значения силы P получим:

$$P_{cr} = \frac{D' \pi^2}{b^2} \frac{2}{2 \frac{D' \pi^2}{D_* b^2} + 1}. \quad (4.7)$$

Сравнивая этот результат с критической силой, полученной в случае квадратной пластинки, сжатой в одном направлении (3.13), заключаем, что при сжатии квадратной пластинки в двух направлениях одинаковыми силами P

критическая сила оказывается в два раза меньше, чем при сжатии в одном направлении.

При увеличении отношения сторон s значение критической силы стремится к

$$P_{cr} = \frac{D'\pi^2}{b^2} \frac{1}{2 \frac{D'\pi^2}{D_*b^2} + 1}, \quad (4.8)$$

т.е. к величине в четыре раза меньше, чем при сжатии в одном направлении (формула (3.13)).

5. Устойчивость равномерно сжатого листа графена (прямоугольной пластинки), свободно опертого по двум противоположным сторонам, перпендикулярным к направлению сжатия, и имеющего другие граничные условия по двум другим сторонам. Пусть прямоугольная пластинка (лист графена) сжата в своей плоскости силами P , равномерно распределенными по сторонам $x=0$ и $x=a$ (рис. 1). Рассмотрим случай, когда нагруженные кромки пластинки закреплены шарнирно, а ненагруженные – жестко защемлены.

Разрешающая система уравнений для рассматриваемого случая ($T_{11}=P$, $T_{22}=0$, $S_{12}=S_{21}=0$) будет иметь вид (2.6), с учетом (2.11), к которой следует присоединить граничные условия:

$$\text{при } x=0, \ x=a: w=0, \ \Omega_1=0, \ L_{12}=0, \quad (5.1)$$

$$\text{при } y=0, \ y=b: w=0, \ \Omega_1=0, \ \Omega_2=0. \quad (5.2)$$

Допуская, что под действием сжимающих сил пластинка выпучивается в m синусоидальных полуволн по направлению x , принимаем решение в виде:

$$w = A(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \Omega_1 = B(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \Omega_2 = C(y) \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (5.3)$$

Решение (5.3) удовлетворяет граничным условиям (5.1) вдоль шарнирно опертых сторон $x=0, a$ пластинки.

Подставляя решение в систему уравнений (2.6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $A(y)$, $B(y)$ и $C(y)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{m\pi}{a} A(y) + \frac{d^2 A(y)}{dy^2} - \frac{m\pi}{a} C(y) - \frac{dB(y)}{dy} = -\frac{1}{D_*} P \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 A(y), \\ & (1 + \nu_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 B(y) + \nu_m \frac{m\pi}{a} \frac{dC(y)}{dy} - \frac{d^2 B(y)}{dy^2} - \frac{D_*}{D'} \left(\frac{dA(y)}{dy} - B(y) \right) = 0, \\ & \nu_m \frac{m\pi}{a} \frac{dB(y)}{dy} - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 C(y) + (1 + \nu_m) \frac{d^2 C(y)}{dy^2} - \frac{D_*}{D'} \left(\frac{m\pi}{a} A(y) + C(y) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

с граничными условиями, вытекающими из (5.1):

$$A=0, B=0, C=0 \text{ при } y=0, b \quad (5.5)$$

Представим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.4) в виде:

$$A(y) = A_1 e^{\lambda y}, \quad B(y) = B_1 e^{\lambda y}, \quad C(y) = C_1 e^{\lambda y}. \quad (5.6)$$

Приняв обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{D_*} P \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad a_{12} = -\lambda, \quad a_{13} = -\left(\frac{m\pi}{a}\right), \\ a_{21} &= \frac{D_*}{D'} \lambda, \quad a_{22} = \lambda^2 - (1 + v_m) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{D_*}{D'}, \quad a_{23} = -v_m \frac{m\pi}{a} \lambda, \\ a_{31} &= -\frac{D_*}{D'} \frac{m\pi}{a}, \quad a_{32} = v_m \frac{m\pi}{a} \lambda, \quad a_{33} = (1 + v_m) \lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{D_*}{D'}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

для определения λ получим уравнение:

$$\text{Det}[a_{ij}] = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (5.8)$$

которое представляет собой алгебраическое биквадратное уравнение 6-ой степени.

Для получения аналитического решения этого уравнения использованы стандартные функции пакета Mathematica 13 компании Wolfram Research, Inc. В результате получаются решения $\pm i\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ вещественные числа:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{m\pi}{2a}} \sqrt{-\alpha + \beta}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{m\pi}{2a}} \sqrt{\alpha + \beta}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{m\pi}{2a}} \sqrt{\alpha + \beta}, \\ \lambda_5 &= \frac{\sqrt{a^2 \frac{D_*}{D'} + m^2 \pi^2 (1 + v_m)}}{\sqrt{a^2 (1 + v_m)}}, \quad \lambda_6 = -\frac{\sqrt{a^2 \frac{D_*}{D'} + m^2 \pi^2 (1 + v_m)}}{\sqrt{a^2 (1 + v_m)}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

притом

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \left(2 - \frac{P}{D_*}\right), \quad \beta = \sqrt{\frac{P}{D_*} \left(4 \frac{D_*}{D'} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{P}{D_*}\right)}. \quad (5.10)$$

Действительно, очевидно, что λ_5 и λ_6 вещественные.

Далее можно заметить, что $\beta > \frac{m\pi}{a} \frac{P}{D_*}$, следовательно

$$\beta + \alpha > \frac{m\pi}{a} \left(2 - \frac{P}{D_*}\right) + \frac{m\pi}{a} \frac{P}{D_*} = 2 \frac{m\pi}{a} > 0, \quad (5.11)$$

которое означает, что λ_3 и λ_4 вещественные ($\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$).

Рассмотрим предельное значение критической нагрузки (3.17), как отметили, при этом выпадают граничные условия на гранях $y = 0$, $y = b$

прямоугольника (рис. 1), следовательно, критическое значения нагрузки (3.15) можем также считать предельными и для рассмотренной в этом параграфе задачи, поэтому при конечных значениях a и b будем иметь неравенство:

$$P > \frac{D'm^2\pi^2}{a^2} \frac{1}{\frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} + 1}. \quad (5.12)$$

Имея ввиду это неравенство, можно доказать, что $\beta - \alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{P}{D_*} \left(4 \frac{D_*}{D'} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{P}{D_*} \right)} > \\ &> \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \right)^2} + 4 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \right)^2} \left[\left(\frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \right) \right]} = \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{2 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}{1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}, \\ \beta &> \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{2 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}{1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Используя неравенство (5.12), будем иметь:

$$-\alpha = -2 \frac{m\pi}{a} + \frac{m\pi}{a} \frac{P}{D_*} > -2 \frac{m\pi}{a} + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2} \frac{1}{1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}. \quad (5.14)$$

Следовательно, суммируя (5.13) и (5.14) и выполнив некоторые преобразования, получим:

$$\beta - \alpha > -2 \frac{m\pi}{a} + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{2 + 2 \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}}{1 + \frac{D'm^2\pi^2}{D_*a^2}} = -2 \frac{m\pi}{a} + 2 \frac{m\pi}{a} = 0,$$

т.е.

$$\beta - \alpha > 0. \quad (5.15)$$

Таким образом, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ вещественные числа.

Решение системы дифференциальных уравнений окончательно можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} A(y) &= C_{11} \sin[\lambda_1 y] + C_{12} \cos[\lambda_1 y] + C_{13} e^{\lambda_3 y} + C_{14} e^{\lambda_4 y} + C_{15} e^{\lambda_5 y} + C_{16} e^{\lambda_6 y}, \\ B(y) &= C_{21} \sin[\lambda_1 y] + C_{22} \cos[\lambda_1 y] + C_{23} e^{\lambda_3 y} + C_{24} e^{\lambda_4 y} + C_{25} e^{\lambda_5 y} + C_{26} e^{\lambda_6 y}, \\ C(y) &= C_{31} \sin[\lambda_1 y] + C_{32} \cos[\lambda_1 y] + C_{33} e^{\lambda_3 y} + C_{34} e^{\lambda_4 y} + C_{35} e^{\lambda_5 y} + C_{36} e^{\lambda_6 y}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

При этом между постоянными коэффициентами существуют следующие связи:

$$\begin{aligned} C_{2i} &= -\frac{C_{1i} \lambda_i \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} + v_m \lambda_i^2 \right) \right)}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_i^2 \right)}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad \lambda_2 = \lambda_1, \\ C_{3i} &= -\frac{C_{1i} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + v_m) + \lambda_i^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) + \left(\frac{P}{D_*} - (2 + v_m) \right) \lambda_i^2 \right) \right)}{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} - (1 + v_m) \lambda_i^2 \right) \right)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Далее, удовлетворив граничные условия (5.5) с учетом (5.17), получим систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно C_{1i} , $i = \overline{1, 6}$. Для получения нетривиальных решений потребуем, чтобы определитель этой системы равнялся нулю, в результате получим трансцендентное уравнение для определения P :

$$\text{Det}[b_{ij}] = 0, \quad i, j = \overline{1, 6}. \quad (5.18)$$

Здесь b_{ij} выражается в виде:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \quad b_{12} = 1, \quad b_{1l} = 1, \quad l = 3, 4, 5, 6, \quad b_{21} = \sin[b\lambda_1], \quad b_{22} = \cos[b\lambda_1], \quad b_{2l} = e^{b\lambda_l}, \\ b_{31} &= \frac{\lambda_1 \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} + v_m \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_1^2 \right) \right)}, \quad b_{32} = 0, \\ b_{3l} &= \frac{\lambda_1 \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} + v_m \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_1^2 \right) \right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{41} &= \frac{\lambda_1 \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} + v_m \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_1^2 \right) \right)} \cos[b\lambda_1], \\
b_{42} &= \frac{\lambda_2 \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} + v_m \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_1^2 \right) \right)} \sin[b\lambda_1], \\
b_{4l} &= \frac{e^{b\lambda_l} \lambda_l \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) v_m + \left(\frac{D_*}{D'} - v_m \lambda_l^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} - (1 + v_m) \lambda_l^2 \right) \right)}, \quad b_{51} = 0, \quad b_{52} = \\
&= -\frac{a}{m\pi} \frac{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + v_m) + \lambda_2^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) - \left(\frac{P}{D_*} - (2 + v_m) \right) \lambda_2^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} - (1 + v_m) \lambda_2^2 \right) \right)}, \\
b_{5l} &= -\frac{a}{m\pi} \frac{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + v_m) + \lambda_l^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) + \left(\frac{P}{D_*} - (2 + v_m) \right) \lambda_l^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} - (1 + v_m) \lambda_l^2 \right) \right)}, \\
b_{61} &= -\frac{a \sin[b\lambda_1]}{m\pi} \times \\
&\times \frac{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + v_m) + \lambda_2^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) - \left(\frac{P}{D_*} - (2 + v_m) \right) \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_1^2 \right) \right)}, \\
b_{62} &= -\frac{a \cos[b\lambda_1]}{m\pi} \times \\
&\times \frac{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + v_m) + \lambda_2^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) - \left(\frac{P}{D_*} - (2 + v_m) \right) \lambda_2^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + v_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + v_m) \lambda_2^2 \right) \right)},
\end{aligned}$$

$$b_{6l} = -\frac{a e^{b\lambda_1}}{m\pi} \times \frac{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) (1 + \nu_m) + \lambda_2^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D_*}{D'} \left(1 - \frac{P}{D_*} \right) - \left(\frac{P}{D_*} - (2 + \nu_m) \right) \lambda_1^2 \right) \right)}{\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (1 + \nu_m) + \left(\frac{D_*}{D'} + (1 + \nu_m) \lambda_1^2 \right) \right)}.$$

Для решения уравнения (5.18) относительно P использован пакет Mathematica 13 компании Wolfram Research, Inc. Решение получено для разных значений m и $s = a/b$. Далее приведены результаты расчетов в табл. 2. Расчеты показывают, что наименьшее значение P получается при $m = 1$.

Таблица 2. Значение P (Н/м) при разных m и a/b

$m \backslash s$	0.5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	3.5	4
1	14.46	3.96	2.78	2.05	1.58	1.25	1.02	0.65	0.45	0.33	0.26
2	42.8	14.46	10.42	7.83	6.08	4.86	3.96	2.57	1.79	1.32	1.02
3	67.16	28.38	21.2	16.32	12.89	10.42	8.58	5.63	3.96	2.94	2.26
4	83.88	42.8	33.24	26.31	21.2	17.38	14.46	9.66	6.88	5.13	3.96

6. Устойчивость листа графена (прямоугольной пластинки) под действием касательных напряжений в его срединной плоскости. Пусть прямоугольная пластинка подвергнута действию касательных сил, равномерно распределенных по краям (рис. 5). Рассмотрим случай, когда все, кромки пластинки, шарнирно оперты.

Разрешающая система уравнений устойчивости пластинки будет выражаться системой (2.10) с учетом (2.11), имея ввиду, что для рассматриваемого

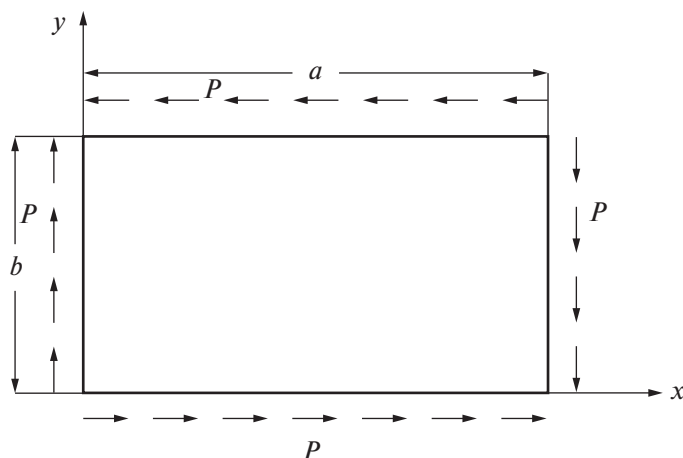


Рис. 5. Прямоугольная пластинка подвергнута действию равномерно распределенных касательных сил $S_{12} = S_{21} = P$.

случая: $T_{11} = T_{22} = 0$, $S_{12} = S_{21} = P$, к которой следует присоединить граничные условия (3.2).

Решение полученной граничной задачи (2.10), (3.2), т.е. задачи о выпучивании пластинки под действием касательных сил в ее срединной плоскости, в конечном виде весьма сложно, поэтому воспользуемся вариационным методом Бубнова–Галеркина.

Решение граничной задачи (2.10), (3.2) представим в виде рядов:

$$w = \sum_{m,n} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\Omega_1 = \sum_{m,n} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \Omega_2 = \sum_{m,n} C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.1)$$

Отметим, что форма решения (6.1) тождественно удовлетворяет как геометрическим, так и статическим граничным условиям (3.2).

Применим метод Бубнова–Галеркина:

$$\iint_{00}^{ba} \left[\nabla^2 w + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - \frac{1}{D_*} 2P \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dx dy = 0,$$

$$\iint_{00}^{ba} \left[(1 + \nu_m) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2} + \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1 \right) \right] \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} dx dy = 0, \quad (6.2)$$

$$\iint_{00}^{ba} \left[\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x \partial y} + (1 + \nu_m) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y^2} - \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2 \right) \right] \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Будем учитывать в начале по два параметра в этом методе:

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

$$\Omega_1 = B_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + B_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b}, \quad (6.3)$$

$$\Omega_2 = C_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

Из системы уравнений (6.2) при $p = q = 1, 2$ получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_{11}, A_{22}, B_{11}, B_{22}, C_{11}, C_{22}$:

$$-9\pi^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) A_{11} - \frac{128P}{D_*} A_{22} + 9\pi a B_{11} + 9\pi b C_{11} = 0,$$

$$\pi a \frac{D_*}{D'} A_{11} - \left[\pi^2 \frac{b}{a} (1 + \nu_m) + ab \frac{D_*}{D'} + \pi^2 \frac{a}{b} \right] B_{11} - \pi^2 \nu_m C_{11} = 0,$$

$$\pi a b^2 D_* A_{11} + \pi^2 a b D' \nu_m B_{11} + \left[\pi^2 b^2 D' + a^2 b^2 D_* + \pi^2 a^2 D' (1 + \nu_m) \right] C_{11} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{32P}{9D_*}A_{11} - \pi^2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)A_{22} + \frac{\pi a}{2}B_{22} + \frac{\pi b}{2}C_{22} = 0, \\
& \frac{\pi a D_*}{2D'}A_{22} - \left[\pi^2\frac{a}{b} + \frac{abD_*}{4D'} + \pi^2\frac{b}{a}(1 + v_m)\right]B_{22} - \pi^2v_mC_{22} = 0, \\
& 2\pi ab^2D_*A_{22} + 4\pi^2abD'v_mB_{22} + \left[4\pi^2b^2D' + a^2b^2D_* + 4\pi^2a^2D'(1 + v_m)\right]C_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Для получения нетривиальных решений потребуем, чтобы определитель системы уравнений (6.4) равнялся нулю, в результате получим линейное алгебраическое уравнение для определения P :

$$\text{Det}[d_{ij}] = 0, i, j = \overline{1, 6}, \tag{6.5}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -9\pi^2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right), \quad d_{12} = -\frac{128P}{D_*}, \quad d_{13} = 9\pi a, \quad d_{14} = 0, \\
d_{15} &= 9\pi b, \quad d_{16} = 0, \quad d_{21} = \pi a \frac{D_*}{D'}, \quad d_{22} = 0, \\
d_{23} &= -\left[\pi^2\frac{b}{a}(1 + v_m) + ab\frac{D_*}{D'} + \pi^2\frac{a}{b}\right], \quad d_{24} = 0, \quad d_{25} = -\pi^2v_m, \quad d_{26} = 0, \\
d_{31} &= \pi ab^2D_*, \quad d_{32} = 0, \quad d_{33} = \pi^2abD'v_m, \quad d_{34} = 0, \\
d_{35} &= \pi^2b^2D' + a^2b^2D_* + \pi^2a^2D'(1 + v_m), \quad d_{36} = 0, \\
d_{41} &= -\frac{32P}{9D_*}, \quad d_{42} = -\pi^2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right), \quad d_{43} = 0, \quad d_{44} = \frac{\pi a}{2}, \\
d_{45} &= 0, \quad d_{46} = \frac{\pi b}{2}, \quad d_{51} = 0, \quad d_{52} = \frac{\pi a D_*}{2D'}, \quad d_{53} = 0, \\
d_{54} &= -\left[\pi^2\frac{a}{b} + \frac{abD_*}{4D'} + \pi^2\frac{b}{a}(1 + v_m)\right], \quad d_{55} = 0, \quad d_{56} = -\pi^2v_m, \\
d_{61} &= 0, \quad d_{62} = 2\pi ab^2D_*, \quad d_{63} = 0, \quad d_{64} = 4\pi^2abD'v_m, \\
d_{65} &= 0, \quad d_{66} = 4\pi^2b^2D' + a^2b^2D_* + 4\pi^2a^2D'(1 + v_m).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

В результате на основе уравнения (6.5) получим:

$$P = \frac{9\pi^4(a^2 + b^2)^2 D_*}{32ab\sqrt{4\pi^4b^4 + a^4\left(b^2\frac{D_*}{D'} + \pi^2\right)\left(b^2\frac{D_*}{D'} + 4\pi^2\right) + \pi^2a^2b^2\left(5b^2\frac{D_*}{D'} + 8\pi^2\right)}} \tag{6.7}$$

или

$$P(s) = \frac{9\pi^4(1+s^2)^2 D_* D'}{32s\sqrt{b^4 s^4 D_*^2 + 5b^2 \pi^2 s^2 (1+s^2) D_* D' + 4\pi^4 (1+s^2)^2 D'^2}}. \quad (6.8)$$

Представим формулу (6.8) в виде:

$$P(s) = k_1 \frac{D' \pi^2}{b^2}, \quad (6.9)$$

где

$$k_1 = \frac{9\pi^2 b^2 (1+s^2)^2 D_*}{32s\sqrt{b^4 s^4 D_*^2 + 5b^2 \pi^2 s^2 (1+s^2) D_* D' + 4\pi^4 (1+s^2)^2 D'^2}}. \quad (6.10)$$

Во втором приближении получим:

$$\begin{aligned} w = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + \\ & + A_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \\ \Omega_1 = & B_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + B_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + B_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\ & + B_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + B_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}, \\ \Omega_2 = & C_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + C_{13} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + \\ & + C_{31} \cos \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{33} \cos \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из системы уравнений (6.2) при $p=q=1, 2, 3$ получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_{11}, A_{22}, A_{13}, A_{31}, A_{33}, B_{11}, B_{22}, B_{13}, B_{31}, B_{33}, C_{11}, C_{22}, C_{13}, C_{31}, C_{33}$. Далее для получения нетривиальных решений потребуем, чтобы определитель полученной системы уравнений равнялся нулю, в результате получим P :

$$P(s) = \frac{225\pi^4 b (1+s^2)^2 (9+s^2)(1+9s^2) D_* D'}{64s\sqrt{T(b^4 D_* s^2 + 4b^2 \pi^2 (1+s^2) D')}}, \quad (6.12)$$

где

$$\begin{aligned} T = & b^2 D_* s^2 (55809 + 361764s^2 + 1334854s^4 + 361764s^6 + 55809s^8) + \\ & + \pi^2 (1+s^2)(9+s^2)(1+9s^2)(8109 + 37882s^2 + 8109s^4) D'. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Представим формулу (6.12) в виде:

$$P(s) = k_2 \frac{D' \pi^2}{b^2}, \quad (6.14)$$

где

$$k_2 = \frac{225\pi^2 b^3 (1+s^2)^2 (9+s^2) (1+9s^2) D_*}{64s \sqrt{T(b^4 D_* s^2 + 4b^2 \pi^2 (1+s^2) D')}}. \quad (6.15)$$

В третьем приближении получим:

$$\begin{aligned} w = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + \\ & + A_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + A_{24} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} + \\ & + A_{42} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{44} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b}, \\ \Omega_1 = & B_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + B_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + B_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\ & + B_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + B_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\ & + B_{24} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} + B_{42} \sin \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + B_{44} \sin \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b}, \\ \Omega_2 = & C_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + C_{13} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + \\ & + C_{31} \cos \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{33} \cos \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + C_{24} \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} + \\ & + C_{42} \cos \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + C_{44} \cos \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Из системы уравнений (6.2) при $p=q=1, 2, 3, 4$ получаются однородные алгебраические уравнения относительно $A_{11}, A_{22}, A_{13}, A_{31}, A_{33}, A_{24}, A_{42}, B_{11}, B_{22}, B_{13}, B_{31}, B_{33}, B_{24}, B_{42}, B_{44}, C_{11}, C_{22}, C_{13}, C_{31}, C_{33}, C_{24}, C_{42}, C_{44}$. Далее для получения нетривиальных решений потребуем, чтобы определитель полученной системы уравнений равнялся нулю, в результате получается биквадратное алгебраическое уравнение 8-ой степени относительно P . Уравнение решено, применив операторы численного анализа и графический метод в пакете Mathematica 13, после чего можно определить k_3 , где:

$$P(s) = k_3 \frac{D' \pi^2}{b^2}. \quad (6.17)$$

В табл. 3 приведены значения коэффициентов k_2, k_3 и k_4 .

Таблица 3. Численные значения коэффициентов k_1 (по формуле (6.10)), k_2 (по формуле (6.15)) и k_3 при разных значениях $s = a/b$

s	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3
k_1	9.56	8.41	7.89	7.71	7.73	7.87	8.53	9.42
k_2	7.76	6.83	6.34	6.09	5.98	5.94	6.04	6.28
k_3	7.73	6.8	6.31	6.04	5.88	5.77	5.6	5.45

Из приведенной таблицы убедимся, что третье приближение обеспечивает требуемую практическую точность решения задачи по методу Бубнова–Галеркина.

7. Заключение. В работе изложена моментно-мембранная линейная теория тонких пластин: 1) плоского напряженного состояния, 2) поперечного изгиба как континуальная теория деформационного поведения листа графена.

На основе указанной теории упругих пластин рассматриваются различные задачи устойчивости первоначального плоского (безмоментного) равновесного состояния листа графена. В каждой поставленной задаче выведены линейные однородные уравнения устойчивости прямоугольной пластинки (листа графена) с соответствующими однородными граничными условиями. Изложена методика расчета критических нагрузок и форм потери устойчивости листа графена. Приведен ряд точных и приближенных аналитических решений, рассматриваемых класс задач, и их численный параметрический анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке МОНКС РА в рамках научного проекта № SCS 25RG-2F119.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allen M.P., Tildesley D.I. Computer simulation of liquids. Oxford Science Publications, 2000. 385 p.
2. Kang J.W. et al. Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator // Curr. Appl. Phys. 2013. V. 13. № 4. P 789–794. <https://doi.org/10.1016/j.cap.2012.12.007>
3. Wang J., Li T.T. Molecular dynamics simulation of the resonant frequency of graphene nanoribbons // Ferroelectrics. 2019. V. 549. № 1. P. 87–95. <https://doi.org/10.1080/00150193.2019.1592547>
4. Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Фирсова А.Д. Об определении упругих модулей наноструктур, теоретический расчет и методика экспериментов // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 75–84.
5. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне // ПММ. 2007. Т. 71. № 4. С. 595–615.
6. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д. Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 110–127.
7. Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решетки графита // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 5. С. 6–16.

8. Кузькин В.А., Кривцов А.М. Описание механических свойств графена с использованием частиц с вращательными свойствами степеней свободы // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 4. С. 476–479.
9. Беринский И.Е. и др. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов: учеб. пособие / Под общ. ред. А.М. Кривцова, О.С. Лобода. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. 160 с.
10. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д. Теоретическая механика. Определение эквивалентных упругих характеристик дискретных систем. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 32 с.
11. Савинский С.С., Петровский В.А. Дискретная и континуальная модели для расчета фоновых спектров углеродных нанотрубок. // Физика твердого тела. 2002. Т. 44. Вып. 9. С. 1721–1726.
12. Savin A.V., Kivshar Y.S., Hu B. Suppression of thermal conductivity in graphene nanoribbons with rough edges. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. 195422.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.195422>
13. Abdullina D.U., Korznikova E.A., Dubinko V.I., Laptev D.V., Kudreyko A.A., Soboleva E.G. et al. Mechanical response of carbon nanotube bundle to lateral compression // Computation. 2020. V. 8. № 2. P. 27.
<https://doi.org/10.3390/computation8020027>
14. Evazzade I., Lobzenko I.P., Korznikova E.A., Ovid'ko I.A., Roknabadi M.R., Dmitriev S.V. Energy transfer in strained graphene assisted by discrete breathers excited by external ac driving // Phys. Rev. B. 95. 2017. P. 035423.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.035423>
15. Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С. Собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок. // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737.
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>
16. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
17. Кормилицин О.П., Шукейло Ю.А. Механика материалов и структур нано- и микро-техники. М.: Издательский центр “Академия”, 2008. 224 с.
18. Odegard G.M., Gates T.S., Nicholson L.M., Wise K.E. Equivalent-continuum modeling of nano-structured materials // NASA Langley Research Center: Technical Memorandum NASA/TM. 2001. P. 1869–1880.
19. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 57–74.
20. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель деформирования нанотрубок. М.: ИПМ РАН, 2003. Препринт № 739. 67 с.
21. Лисовенко Д.С., Городцов В.А. От графита (стержней, пластин, оболочек) к углеродным нанотрубкам. Упругие свойства. М.: ИПМ РАН, 2004. Препринт № 747. 67 с.
22. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Мезомеханика многослойных углеродных нанотрубок и нанолент // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 6. С. 25–42.
23. Li C.A., Chou T.W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. № 10. P. 2487–2499.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00056-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00056-8)

24. Wan H., Delale F. A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes // *Mechanica*. 2010. V. 45. P. 43–51.
<https://doi.org/10.1007/s11012-009-9222-2>
25. Беринский И.Е., Кривцов А.М., Кударова А.М. Определение изгибной жесткости графенового листа // *Физ. мезомех.* 2014. Т. 17. № 1. С. 57–65.
26. Устинов К.Б., Ченцов А.В. О деформировании нанопластин углерода: дискретное и континуальное моделирование. М.: ИПМ. РАН, 2007. Препринт № 824. 31с.
27. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н., Бабичев А.В. Компьютерное моделирование выпучивания нанотрубки при кручении // *Сиб. жур. индустр. матем.* 2008. Т. 11. № 1. С. 3–22.
28. Аннин Б.Д., Баимова Ю.А., Мулюков Р.Р. Механические свойства, устойчивость, коробление графеновых листов у углеродных нанотрубок (обзор) // *Прикл. мех. и тех. физика*. 2020. Т. 61. № 5. С. 175–189.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200519>
29. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Simulation of mechanical parameters of graphene using the DREIDING force field // *Acta Mechanica*. 2018. V. 229. № 6. P. 2343–2378.
<https://doi.org/10.1007/s00707-018-2115-5>
30. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // *Int. J. Eng. Sci.* 2018. V. 133. P. 109–131.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.09.001>
31. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method // *Int. J. Mech. Sci.* 2021. V. 209. P. 106703.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106703>
32. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // *Доклады РАН*. 2001. Т. 381. № 3. С. 825–827.
33. Саркисян С.О. Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов // *Физическая мезомеханика*. 2022. Т. 25. № 2. С. 109–121.
34. Саркисян С.О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот” // *Физическая мезомеханика*. 2020. Т. 23. № 4. С. 13–19.
<https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-14002>
35. Саркисян С.О. Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2022. № 1. С. 38–47.
36. Sargsyan S.H. Moment-membrane theory of elastic cylindrical shells as a continual model of deformation of a single-layer carbon nanotube // *Materials Physics and Mechanics*. 2024. V. 52. № 1. P. 26–38.
https://doi.org/10.18149/MPM.5212024_3
37. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 569 с.
38. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

STABILITY OF THE PLANE STRESSED STATE OF THE GRAPHENE SHEET BASED ON THE MOMENT-MEMBRANE THEORY OF ELASTIC PLATES

A. H. Sargsyan^{a, *}, S. H. Sargsyan^{a, **}

^a*State University of Shirak after M. Nalbandyan, Gyumri, Armenia*

^{*}*e-mail: armenuhis@gmail.com*, ^{**}*e-mail: s_sargsyan@yahoo.com*

Abstract — Two-dimensional nanomaterials (graphene, carbon nanotube) are high-strength and ultra-light materials that have several promising areas of application. From theoretical and applied perspectives, it is relevant to study various problems of their statics, stability, vibrations, and calculations of the required mechanical characteristics based on the corresponding continuum theory of the deformation behavior of two-dimensional nanomaterials.

In this work, based on the moment-membrane theory of elastic plates, which is interpreted as the continuum theory of the deformation behavior of graphene, stability problems of a freely supported graphene sheet (rectangular plate) are studied. The sheet is uniformly compressed in one direction, compressed in two directions, and subjected to shear stresses in its plane. The stability problem of uniformly compressed graphene sheets, freely supported on two opposite sides and having different boundary conditions on the other two sides, is also considered.

When solving stability problems of the graphene sheet (rectangular plate), the Euler method is applied, considering a form of equilibrium that is slightly deviated from the initial (moment-free) position (buckled plate). Differential equilibrium equations and boundary conditions are formulated for this shape. The critical load value is determined from the solution of these boundary problems, i.e., the load value at which the initial flat form of the plate becomes unstable. All solutions are accompanied by numerical results: tables or diagrams providing the critical load values for each particular case.

Keywords: graphene sheet, moment membrane theory of plates, stability of the initially compressed state, critical loads

REFERENCES

1. Allen M.P., Tildesley D.I. Computer simulation of liquids. Oxford Science Publications, 2000. 385 p.
2. Kang J.W. et al. Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator // Curr. Appl. Phys. 2013. V. 13. № 4. P 789–794. <https://doi.org/10.1016/j.cap.2012.12.007>
3. Wang J., Li T.T. Molecular dynamics simulation of the resonant frequency of graphene nanoribbons // Ferroelectrics. 2019. V. 549. № 1. P. 87–95. <https://doi.org/10.1080/00150193.2019.1592547>
4. Ivanova E.A., Morozov N.F., Semenov B.N., Firsova A.D. On the determination of elastic moduli of nanostructures, theoretical calculation and experimental technique // Izv. RAS. MTT. 2005. № 4. P. 75–84 [in Russian].

5. *Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F.* Obtaining macroscopic relations of elasticity of complex crystal lattices taking into account moment interactions at the micro level // PMM. 2007. V. 71. № 4. P. 595–615 [in Russian].
6. *Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F., Firsova A.D.* Description of the crystal packing of particles taking into account moment interactions // Izv. RAS. MTT. 2003. № 4. P. 110–127 [in Russian].
7. *Berinsky I.E., Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F.* Application of moment interaction to the construction of a stable model of the graphite crystal lattice // Izv. RAS. MTT. 2007. № 5. P. 6–16 [in Russian].
8. *Kuzkin V.A., Krivtsov A.M.* Description of mechanical properties of graphene using particles with rotational properties of degrees of freedom // Reports of the Russian Academy of Sciences. 2011. V. 440. № 4. P. 476–479 [in Russian].
9. *Berinsky I.E. et al.* Modern problems of mechanics. Mechanical properties of covalent crystals: textbook. Manual / Ed. by A.M. Krivtsov, O.S. Loboda. St. Petersburg: Publishing house of the Polytechnic University, 2014. 160 p. [in Russian].
10. *Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F., Firsova A.D.* Theoretical Mechanics. Determination of Equivalent Elastic Characteristics of Discrete Systems. St. Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State Polytechnical University. 2004. 32 p. [in Russian].
11. *Savinsky S.S., Petrovsky V.A.* Discrete and continuous models for calculating the phonon spectra of carbon nanotubes. // Solid State Physics. 2002. V. 44. Iss. 9. P. 1721–1726 [in Russian].
12. *Savin A.V., Kivshar Y.S., Hu B.* Suppression of thermal conductivity in graphene nanoribbons with rough edges. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. 195422. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.195422>
13. *Abdullina D.U., Korznikova E.A., Dubinko V.I., Laptev D.V., Kudreyko A.A., Soboleva E.G. et al.* Mechanical response of carbon nanotube bundle to lateral compression // Computation. 2020. V. 8. № 2. P. 27. <https://doi.org/10.3390/computation8020027>
14. *Evazzade I., Lobzenko I.P., Korznikova E.A., Ovid'ko I.A., Roknabadi M.R., Dmitriev S.V.* Energy transfer in strained graphene assisted by discrete breathers excited by external ac driving // Phys. Rev. B. 95. 2017. P. 035423. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.035423>
15. *Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov M.A., Pavlov I.S.* Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes. // J. Tech. Phys. 2021. V. 91. Iss. 11. P. 1732–1737. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21> [in Russian].
16. *Krivtsov A.M.* Deformation and destruction of solids with microstructure. M.: Fizmatlit, 2007. 304 p. [in Russian].
17. *Kormilitsin O.P., Shukeilo Yu.A.* Mechanics of materials and structures of nano- and microengineering. M.: Publishing Center “Academy”, 2008. 224 p. [in Russian].
18. *Odegard G.M., Gates T.S., Nicholson L.M., Wise K.E.* Equivalent-continuum modeling of nano-structured materials // NASA Langley Research Center: Technical Memorandum NASA/TM. 2001. P. 1869–1880.
19. *Goldstein R.V., Chentsov A.V.* Discrete-continuous model of a nanotube // Izv. RAS. MTT. 2005. № 4. P. 57–74 [in Russian].
20. *Goldstein R.V., Chentsov A.V.* Discrete-continuous model of nanotube deformation. Moscow: IPM RAS, 2003. Preprint № 739. 67 p. [in Russian].
21. *Lisovenko D.S., Gorodtsov V.A.* From graphite (rods, plates, shells) to carbon nanotubes. Elastic properties. Moscow: IPM RAS, 2004. Preprint № 747. 67 p. [in Russian].

22. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Mesomechanics of multilayer carbon nanotubes and nanowhiskers // Physical mesomechanics. 2008. V. 11. № 6. P. 25–42 [in Russian].
23. Li C.A., Chou T.W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. № 10. P. 2487–2499.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00056-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00056-8)
24. Wan H., Delale F. A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes // Mechanica. 2010. V. 45. P. 43–51.
<https://doi.org/10.1007/s11012-009-9222-2>
25. Berinsky I.E., Krivtsov A.M., Kudarova A.M. Determination of the bending rigidity of a graphene sheet // Phys. mesomech. 2014. V. 17. № 1. P. 57–65 [in Russian].
26. Ustinov K.B., Chentsov A.V. On the deformation of carbon nanoplates: discrete and continuous modeling. M.: IPM. RAS, 2007. Preprint № 824. 31 p. [in Russian].
27. Annin B.D., Korobeynikov S.N., Babichev A.V. Computer modeling of nanotube buckling under torsion // Sib. J. Ind. Mat. 2008. V. 11. № 1. P. 3–22 [in Russian].
28. Annin B. D., Baimova Yu. A., Mulyukov R. R. Mechanical properties, stability, warping of graphene sheets in carbon nanotubes (review) // Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. Vol. 61. No. 5. P. 175–189.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200519> [in Russian].
29. Korobeynikov S. N., Alyokhin V. V., Babichev A. V. Simulation of mechanical parameters of graphene using the DREIDING force field // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 6. P. 2343–2378.
<https://doi.org/10.1007/s00707-018-2115-5>
30. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // Int. J. Eng. Sci. 2018. V. 133. P. 109–131.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.09.001>
31. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method // Int. J. Mech. Sci. 2021. V. 209. P. 106703.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106703>
32. Krivtsov A.M., Morozov N.F. Anomalies of mechanical characteristics of nanosized objects // Reports of the Russian Academy of Sciences. 2001. V. 381. № 3. P. 825–827 [in Russian].
33. Sargsyan S.O. Rod and continuous-moment models of deformations of two-dimensional nanomaterials // Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. № 2. P. 109–121 [in Russian].
34. Sargsyan S.O. Thin shell model in the moment theory of elasticity with the deformation concept of “shear plus rotation” // Physical Mesomechanics. 2020. V. 23. № 4. P. 13–19.
<https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-14002> [in Russian].
35. Sargsyan S.O. Variational principles of the moment-membrane theory of shells // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2022. № 1. P. 38–47 [in Russian].
36. Sargsyan S.H. Moment-membrane theory of elastic cylindrical shells as a continual model of deformation of a single-layer carbon nanotube // Materials Physics and Mechanics. 2024. V. 52. № 1. P. 26–38.
https://doi.org/10.18149/MPM.5212024_3
37. Timoshenko S.P. Stability of elastic systems. M.: Gostekhizdat, 1955. 569 p. [in Russian].
38. Volmir A.S. Stability of deformable systems. M.: Nauka, 1967. 984 p. [in Russian].