ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 3, с. 139–160

УДК 531.3

О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНЫМ МИКРОРЕЛЬЕФОМ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

 А. А. Бобылев[a,*]

[a]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**E-mail:* abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.
После доработки 21.12.2024 г.
Принята к публикации 28.12.2024 г.

Рассматриваются плоские контактные задачи с ограниченной областью контакта для упругих тел, на поверхности которых нанесен регулярный микрорельеф (РМР). Предполагается, что для определения напряженно-деформированного состояния тел может быть использовано решение Фламана задачи о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости. При моделировании контактного взаимодействия использована расчетная схема, в которой одно из тел считается жестким штампом, а второе – упругой полуплоскостью с приведенным модулем упругости. Рассмотрены однопараметрические семейства штампов с РМР, в качестве параметра которых выступает число микровыступов. Методом вычислительного эксперимента исследованы закономерности контактного взаимодействия штампов с РМР и упругой полуплоскости. На основе установленных закономерностей предложена методика приближенного расчета распределения нагрузок между элементами РМР, а также оценки контактного давления, размеров площадок фактического контакта и средних конечных зазоров на микровыступах.

Ключевые слова: задача одностороннего дискретного контакта, поверхности с регулярным микрорельефом

DOI: 10.31857/S1026351925030083, **EDN:** AZZBDE

1. Введение. Поверхности с регулярным микрорельефом (РМР) применяются для улучшения различных эксплуатационных свойств деталей машин и приборов [1]. При расчете параметров контактного взаимодействия таких поверхностей в качестве математических моделей, как правило, используются периодические контактные задачи [2–5]. Характерной особенностью постановок периодических контактных задач является равномерное распределение нагрузок между отдельными элементами РМР. В случае ограниченной области контакта распределение нагрузок между элементами РМР является неравномерным, что значительно усложняет решение задачи. Для решения этого класса задач дискретного контакта, как правило, используются численные алгоритмы.

В настоящей работе рассматриваются плоские контактные задачи с ограниченной областью контакта для упругих тел, на поверхности которых нанесен РМР. Предполагается, что макроформа и РМР контактирующих тел таковы, что для определения напряженно-деформированного состояния тел может быть использовано решение Фламана задачи о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости. В этом случае при моделировании контактного взаимодействия двух упругих тел может быть применена расчетная схема, в которой одно из тел считается недеформируемым (жестким штампом), а второе – упругой полуплоскостью с приведенным модулем упругости [6]. На поверхности возможного контакта полуплоскости со штампом задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует.

Для численного решения рассматриваемого класса задач одностороннего дискретного контакта использованы алгоритмы, разработанные в работах [7, 8]. Методом вычислительного эксперимента исследованы закономерности контактного взаимодействия штампов с РМР и упругой полуплоскости. На основе установленных закономерностей для поверхностей с РМР предложена методика приближенного расчета распределения нагрузок между элементами РМР, а также оценки контактного давления, размеров площадок фактического контакта и средних конечных зазоров на микровыступах.

2. Постановка задачи. Пусть невесомая однородная изотропная упругая полуплоскость в неподвижной прямоугольной системе координат Oxy занимает область $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 0\}$ с границей Γ. Далее под $\mathbf{u}(x,y)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y)$, $\boldsymbol{\sigma}(x,y)$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $(x,y) \in \Omega$. Предполагается, что полуплоскость находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние полуплоскости описывается системой уравнений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{2.1}$$

где $\operatorname{def} \equiv 1/2(\operatorname{grad} + \operatorname{grad}^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{S}$ – тензор модулей упругости.

В полуплоскость вдавливается гладкий жесткий штамп, основание которого имеет РМР. Часть границы Γ, по которой возможен контакт полуплоскости со штампом, обозначается Γ_p. Положение и предельные размеры области возможного контакта Γ_p задаются априори исходя из геометрических и физических соображений. Предполагается, что часть границы Γ_p является односвязной и конечной. При вдавливании штампа с РМР область возможного контакта Γ_p включает множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны.

Форма основания штампа и его РМР описываются функцией $\Phi(x)$, значение которой в точке $(x,0) \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе полуплоскости. Расстояние $\Phi(x)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию полуплоскости. В случае штампа с РМР функция

$\Phi(x)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Для определенности полагается $\min\limits_{\Gamma_p}\Phi(x)=0$. Предполагается также, что выполняется условие:

$$\left|d\Phi / dx\right| \ll 1, \tag{2.2}$$

необходимое для применимости решения Фламана и рассматриваемой расчетной схемы при моделировании локального контактного взаимодействия двух упругих тел.

Положение штампа определяется вектором перемещений $\boldsymbol{\delta}=(\delta_x,\delta_y)$ и углом поворота φ_z как жесткого целого. Главный вектор $\mathbf{F}=(F_x,F_y)$ и главный момент M_z внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка (x_c,y_c). Далее рассматривается задача нормального контакта полуплоскости со штампом, поэтому будем полагать:

$$\delta_x = 0,\ F_x = 0,\ -\infty < F_y < 0,\ \left|M_z\right| < \infty. \tag{2.3}$$

Контактное взаимодействие упругой полуплоскости с жестким штампом описывается условиями одностороннего гладкого контакта:

$$u_y \le \Phi + \delta_y + (x-x_c)\varphi_z,\ \ \sigma_{yy} \le 0,\ \ \sigma_{yy}\left[u_y - \Phi - \delta_y - (x-x_c)\varphi_z\right]=0,\ \ \sigma_{xy}=0 \quad \text{на } \Gamma_p. \tag{2.4}$$

Остальная часть границы полуплоскости свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yy}=0 \ \text{ на } \ \Gamma\backslash\Gamma_p. \tag{2.5}$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int\limits_{\Gamma_p}\sigma_{yy}\,dx = F_y,\quad \int\limits_{\Gamma_p}\sigma_{yy}(x-x_c)dx = M_z. \tag{2.6}$$

Отметим, что соотношения (2.6), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{yy}\le 0$ на Γ_p, удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.6).

Чтобы выделить класс единственности решения в рассматриваемой задаче, необходимо наложить дополнительные условия на поведение решения на бесконечности и на смещения полуплоскости как жесткого целого.

В монографии [9] рассмотрен случай, когда на бесконечности напряжения и вращение стремятся к нулю. Показано, что эти условия обеспечивают единственность поля напряжений. Если при этом отсутствуют массовые силы, а главный вектор внешних поверхностных усилий имеет ограниченную величину и отличен от нуля, то напряжения и соответствующие им перемещения имеют асимптотические представления:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = O(1/r),\ u_i(\mathbf{x}) = O(\ln r) \ \text{ при } \ r\to\infty, \tag{2.7}$$

где $r=(x^2+y^2)^{1/2}$.

Перемещения $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ полуплоскости как жесткого целого имеют вид:

$$v_x(x, y) = \lambda_x - \omega y, \quad v_y(x, y) = \lambda_y + \omega x, \tag{2.8}$$

где λ_x и λ_y – компоненты поступательного перемещения; ω – поворот полуплоскости как жесткого целого. Перемещение λ_x не влияет на условия нормального контакта полуплоскости со штампом, поэтому примем $\lambda_x = 0$. Для выполнения условий (2.7) положим $\omega = 0$. Значение λ_y выбирается так, чтобы оператор Пуанкаре–Стеклова, отображающий на Γ_p нормальные напряжения σ_{yy} в нормальные перемещения u_y, был положительно-определенным [10].

Задача состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}(x, y)$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1), граничным условиям (2.4)–(2.5), уравнениям равновесия штампа (2.6), условиям на бесконечности (2.7) и дополнительным условиям на перемещения полуплоскости как жесткого целого (2.8). Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче одностороннего дискретного контакта априори задается лишь область возможного контакта Γ_p, положение и размеры пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

3. Класс штампов с РМР. Без потери общности будем полагать, что область возможного контакта имеет вид:

$$\Gamma_p = \{0 \le x \le a, \ y = 0\}.$$

Введем в рассмотрение класс $\Pi(\Phi_1, \Phi_2, K)$ штампов с РМР, форма основания которых описывается функцией:

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(\xi)/K, \tag{3.1}$$

где $\Phi_1(x)$ – выпуклая функция, характеризующая макроформу штампа; $\Phi_2(\xi)$ – выпуклая функция, определяющая форму РМР; K – число микровыступов; $\xi = \{Kx/a\}$ – “быстрая” координата, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Для заданной пары функций $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ формула (3.1) определяет однопараметрическое семейство $\Pi^s(\Phi_1, \Phi_2)$ штампов с РМР, в качестве параметра которого выступает число микровыступов K. Микровыступы штампов одного семейства являются подобными, при этом коэффициент подобия равен отношению чисел микровыступов. Несложно показать, что для всех штампов семейства $\Pi^s(\Phi_1, \Phi_2)$ величина $\max|d\Phi/dx|$ имеет одинаковое значение.

Все штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, поэтому семейству $\Pi^s(\Phi_1, \Phi_2)$ штампов с РМР можно поставить в соответствие так называемый базовый штамп $\Pi^b(\Phi_1)$ без РМР, форма основания которого описывается функцией $\Phi(x) \equiv \Phi_1(x)$, а область возможного контакта равна Γ_p. Кроме того, каждому штампу $\Pi^s(\Phi_1, \Phi_2, K)$ поставим в соответствие бесконечный в плане штамп $\Pi^p(\Phi_2, K)$ с таким же РМР, форма основания которого описывается функцией $\Phi(x) \equiv \Phi_1(x)/K$. Контактное взаимодействие штампа $\Pi^p(\Phi_2, K)$ с упругой полуплоскостью моделируется периодической задачей с периодом a/K.

При проведении расчетов использовались следующие параметрические представления функций:

$$\Phi_1(x) = h_1 a\left[H\left(|2x/a - 1| - c_1\right)\right]^{m_1}, \quad \Phi_2(\xi) = h_2 a\left[H\left(|2\xi - 1| - c_2\right)\right]^{m_2}, \tag{3.2}$$

Таблица 1. Параметры семейств штампов и внешней нагрузки

Семейство штампов	Базовый штамп			РМР			max $\lvert d\Phi/dx \rvert$	Внешняя нагрузка	
	h_1	c_1	m_1	h_2	c_2	m_2		f	e
Π_1^s	0.0	0.00	0	10^{-5}	0.00	2	$0.400\cdot 10^{-4}$	$0.80\cdot 10^{-5}$	0.00
Π_2^s	0.0	0.00	0	10^{-4}	0.25	4	$0.336\cdot 10^{-3}$	$0.80\cdot 10^{-5}$	0.10
Π_3^s	10^{-5}	0.00	1	10^{-3}	0.00	2	$0.402\cdot 10^{-2}$	$0.90\cdot 10^{-5}$	0.00
Π_4^s	10^{-5}	0.00	1	10^{-4}	0.50	6	$0.571\cdot 10^{-4}$	$0.70\cdot 10^{-5}$	0.05
Π_5^s	10^{-5}	0.00	2	10^{-4}	0.00	2	$0.440\cdot 10^{-3}$	$1.20\cdot 10^{-5}$	0.00
Π_6^s	10^{-4}	0.25	2	10^{-3}	0.50	4	$0.129\cdot 10^{-2}$	$6.00\cdot 10^{-5}$	0.05
Π_7^s	10^{-5}	0.00	4	10^{-3}	0.25	2	$0.308\cdot 10^{-2}$	$1.20\cdot 10^{-5}$	0.00
Π_8^s	10^{-4}	0.50	4	10^{-5}	0.00	6	$0.219\cdot 10^{-3}$	$1.00\cdot 10^{-5}$	0.05
Π_9^s	10^{-5}	0.00	6	10^{-5}	0.75	2	$0.130\cdot 10^{-3}$	$0.20\cdot 10^{-5}$	0.00
Π_{10}^s	10^{-3}	0.75	6	10^{-4}	0.00	4	$0.809\cdot 10^{-3}$	$0.01\cdot 10^{-5}$	0.05

где $h_i \geq 0,\ 0 \leq c_i \leq 1,\ m_i \in \{0\} \cup [1;\infty)$ – безразмерные параметры, $i = 1,\ 2$; $H(\cdot)$ – функция Хевисайда. Семейства штампов, определяемые парами функций (3.2), обозначаются Π_n^s, где нижний индекс $n = 1, 2, \ldots$ указывает на номер семейства. Штамп семейства Π_n^s с K микровыступами обозначается $\Pi_n(K)$, соответствующий семейству Π_n^s базовый штамп – через Π_n^b, а соответствующий штампу $\Pi_n(K)$ бесконечный в плане штамп – через $\Pi_n^p(K)$. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что семейство штампов Π_n^s определяется набором из шести параметров $\{h_1, c_1, m_1, h_2, c_2, m_2\}$, при этом базовый штамп Π_n^b определяется набором из трех параметров $\{h_1, c_1, m_1\}$, а РМР – набором из четырех параметров $\{h_2, c_2, m_2, K\}$.

Параметры некоторых семейств штампов, использованных при проведении вычислительных экспериментов, приведены в табл. 1. Количество микровыступов K изменялось в диапазоне $2^4 \div 2^{12}$. В качестве примера на рис. 1а, б изображены соответственно профили базового штампа Π_7^b и микровыступов штампов семейства Π_7^s, а на рис. 2а, б – соответственно профили штампов $\Pi_7(16)$ и $\Pi_7(64)$. Следует отметить, что на рис. 1 и 2 масштабы изображения по вертикальной и горизонтальной осям отличаются на несколько порядков.

4. Нагрузки, приложенные к штампу. Нормальная компонента главного вектора (погонная сила) и главный момент внешних сил, приложенных к штампу, задаются в виде:

$$F_y = -faE^*;\quad M_z = eF_y a,$$

где $f > 0$ – безразмерный параметр; e – безразмерный параметр, характеризующий эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $(x_c, y_c) = (0.5a, 0)$; $E^* = E/(1-\nu^2)$ – приведенный модуль упругости; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости. Таким образом, внешние нагрузки, приложенные к штампу, определяются парой безразмерных параметров $\{f, e\}$. Значения этих параметров для некоторых семейств штампов приведены в табл. 1.

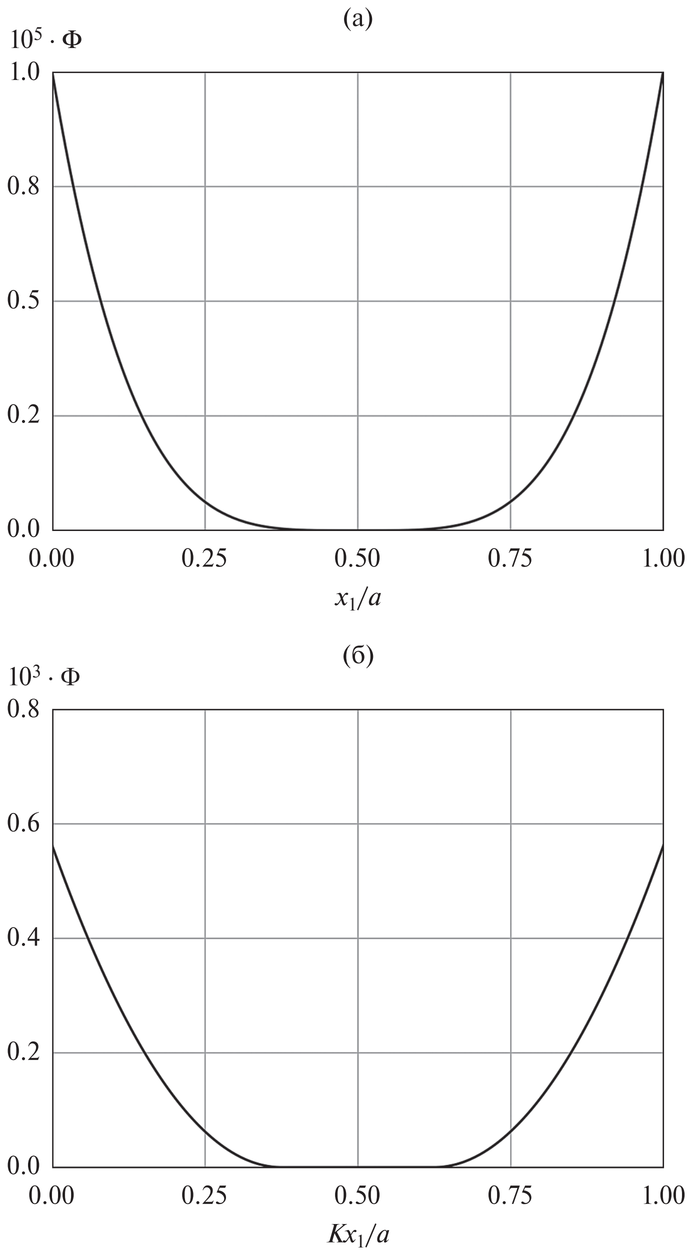


Рис. 1. Профили базового штампа Π_7^b (а) и микровыступов штампов семейства Π_7^s (б).

5. Сеточные функции характеристик контакта штампов с РМР. Отдельные микровыступы штампа $\Pi_n(K)$ обозначим ϖ_i, $i=\overline{1,K}$, а множество микровыступов штампа – через $D_{mp}=\{\varpi_i\}$, $|D_{mp}|=K$. Введем на множестве микровыступов

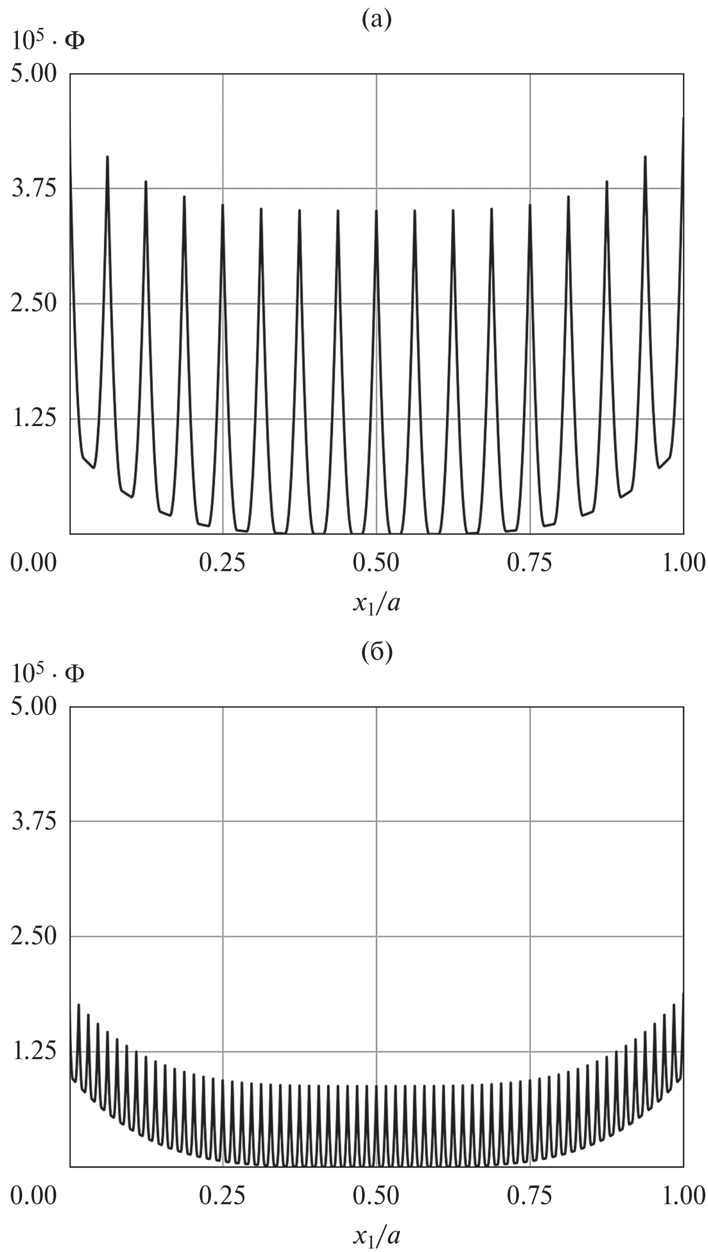


Рис. 2. Профили штампов $\Pi_7(16)$ (а) и $\Pi_7(64)$ (б).

D_{mp} сеточную координату $i = \overline{1, K}$, и обозначим через Γ_i часть Γ_p, соответствующую микровыступу ϖ_i. Для каждого штампа $\Pi_n(K)$ введем следующие сеточные функции:

– контактных усилий на микровыступах $\mathbf{R}_K = [r_i]$:

$$r_i = \int_{\Gamma_i} p(x)dx; \tag{5.1}$$

– относительных величин площадей фактического контакта на микровыступах $\mathbf{S}_K = [s_i]$:

$$s_i = \frac{K}{a} \int_{\Gamma_i} [p(x) > 0]_a \, dx; \tag{5.2}$$

– максимумов контактного давления на микровыступах $\mathbf{P}_K = [p_i]$:

$$p_i = \max_{\Gamma_i} p(x); \tag{5.3}$$

– средних контактных давлений на микровыступах $\mathbf{Q}_K = [q_i]$:

$$q_i = \int_{\Gamma_i} p(x)dx \Big/ \int_{\Gamma_i} [p(x) > 0]_a \, dx; \tag{5.4}$$

– средних конечных зазоров на микровыступах $\mathbf{Z}_K = [z_i]$:

$$z_i = \frac{K}{a} \int_{\Gamma_i} (\Phi + \delta_y + (x - x_c)\varphi_z - u_y)\, dx, \tag{5.5}$$

где $p(x)$ – распределение контактного давления для штампа $\Pi_n(K)$; $[\cdot]_a$ – скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае).

Далее построим для штампа $\Pi_n(K)$ с РМР множество микровыступов, контактирующих с полуплоскостью $D_c(\mathbf{R}_K) = \{\varpi_i \in D_{mp} : r_i > 0\}$. Введем ряд определений. Два микровыступа ϖ_i и ϖ_n являются ближайшими соседями, если $|i-n| = 1$. Два микровыступа $\varpi_i \in D_c$ и $\varpi_n \in D_c$ являются связанными с друг другом, если они либо сами являются ближайшими соседями, либо существует цепочка из микровыступов, являющихся ближайшими соседями и принадлежащих множеству D_c, соединяющая эти два микровыступа. Совокупность связанных между собой микровыступов называется кластером контактирующих микровыступов и обозначается C_m, где $m = 1, \ldots, M$ – номер кластера. Микровыступ $\varpi_i \in C_m$ принадлежит множеству B_m^1 граничных микровыступов кластера, если только один его ближайший сосед принадлежит множеству C_m. Микровыступ $\varpi_i \in C_m$ принадлежит множеству B_m^2 приграничных микровыступов кластера, если один из его ближайших соседей принадлежит множеству B_m^1. Микровыступ $\varpi_i \in C_m$ принадлежит множеству C_m^0 внутренних микровыступов кластера, если он не является граничным или приграничным, т.е. $C_m^0 = C_m \backslash (B_m^1 \cup B_m^2)$. Полагая, что

$$k = \sum_{m=1}^{M} \left| C_m^0 \right| > 0,$$

введем оператор редукции $\mathbf{F}(D_c)\colon \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^k$ исключающий из вектора компоненты, соответствующие микровыступам

$$\varpi_i \notin \bigcup_{m=1}^{M} C_m^0 .$$

Оператор $\mathbf{F}$ является прямоугольной матрицей размеров $k \times K$, в каждой строке которой имеется равно один ненулевой элемент, равный 1.

Для штампов рассматриваемого класса $\Pi(\Phi_1, \Phi_2, K)$ функция $\Phi_1(x)$, характеризующая их макроформу, является выпуклой, поэтому множество D_c контактирующих с полуплоскостью микровыступов имеет вид:

$$D_c = \{k_1, \ldots, k_2\}, \quad 1 \le k_1 \le k_2 \le K,$$

и является кластером $C_1 = D_c$. Если $k_1 + 2 \le k_2 - 2$, то

$$B_1^1 = \{k_1, k_2\}\,,\; B_1^2 = \{k_1 + 1, k_2 - 1\}\,,\; C_1^0 = \{k_1 + 2, \ldots, k_2 - 2\}$$

и может быть определен оператор редукции $\mathbf{F}(D_c)$: $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^k$, где $k = k_2 - k_1 - 3$.

6. Сеточные функции контактных усилий базовых штампов без РМР. Выполним равномерное разбиение T_K отрезка $[0, a]$ на K частей длиной $h = a/K$ и построим равномерную сетку с узлами $x_i = (i - 0.5)h$, $i = \overline{1, K}$. Разбиение T_K производит разделение области возможного контакта Γ_p на подобласти Γ_i, соответствующие отдельным микровыступам $\varpi_i \in D_{mp}$ штампа $\Pi_n(K)$.

Введем для базового штампа Π_n^b сеточные функции контактных усилий $\mathbf{R}_K^b = [r_i^b]$ и нормализованных контактных усилий $\tilde{\mathbf{R}}_K^b = [\tilde{r}_i^b]$:

$$r_i^b = \int\limits_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} p_b(x)dx\,, \quad \tilde{r}_i^b = r_i^b \,/\, (h p_b^m)\,, \tag{6.1}$$

где $p_b(x)$ – распределение контактного давления для базового штампа Π_n^b; $p_b^m = |F_y|/a$ – среднее контактное давление по области возможного контакта Γ_p. Интегрируемость неотрицательной функции $p_b(x)$ на отрезке $[0, a]$ следует из третьего условия (2.3). Обозначим

$$P_b(x) = \int\limits_0^x p_b(t)dt\,. \tag{6.2}$$

Тогда из (6.1) и (6.2) получим, что

$$\tilde{r}_i^b = \frac{1}{p_b^m} \frac{P_b(x_i + h/2) - P_b(x_i - h/2)}{h}.$$

Если функция $p_b(x)$ является непрерывной в точке x_i, то существует предел:

$$\lim_{h\to 0} \tilde{r}_i^b = \frac{1}{p_b^m} \lim_{h\to 0} \frac{P_b(x_i + h/2) - P_b(x_i - h/2)}{h} = \frac{1}{p_b^m} \frac{dP_b}{dx}\bigg|_{x = x_i} = \frac{p_b(x_i)}{p_b^m} = \tilde{p}_b(x_i), \tag{6.3}$$

где $\tilde{p}_b(x)$ – нормализованное распределение контактного давления для базового штампа Π_n^b. Следовательно, для множества сеточных функций нормализованных контактных усилий $\tilde{\mathbf{R}}_K^b$ при $K \to \infty$ существует предельная кривая – нормализованное распределение контактного давления $\tilde{p}_b(x)$. Предполагая $p_b(x) \in C^2[x_i - h/2, x_i + h/2]$, несложно получить оценку:

$$\left|\tilde{r}_i^b - p_b^*(x_i)\right| \le \frac{h^2}{24\, p_b^m} \max_{t \in [x_i - h/2,\, x_i + h/2]} \left|p_b''(t)\right|. \qquad (6.4)$$

7. Периодическая контактная задача. Контактное взаимодействие бесконечного в плане штампа $\Pi_n^p(K)$ с упругой полуплоскостью моделируется периодической задачей с периодом a/K. Для ее решения можно использовать как аналитические, так и численные методы.

С помощью решения периодической контактной задачи для штампа $\Pi_n^p(K)$ аналогично (5.2)–(5.4) введем следующие функции:

– относительных величин площадей фактического контакта на микровыступах $\Upsilon_s(p)$;

– максимумов контактного давления на микровыступах $\Upsilon_p(p)$;

– средних контактных давлений на микровыступах $\Upsilon_q(p)$;

– средних конечных зазоров на микровыступах $\Upsilon_z(p)$,

где $p \equiv p_p^m$ – среднее контактное давление для бесконечного в плане штампа $\Pi_n^p(K)$.

8. Характеристики процесса вдавливания штампа. Рассмотрим процесс вдавливания жесткого штампа в упругую полуплоскость при увеличении внешней нагрузки. Аналогично [11, 12] введем для штампа $\Pi_n^p(K)$ следующие характеристики процесса контактного взаимодействия с упругой полуплоскостью – функции безразмерного параметра внешней нагрузки f:

– относительной величины площади фактического контакта штампа

$$s \equiv \frac{1}{a} \int_{\Gamma_p} [\, p(x) > 0]_a \, dx = \Lambda_K^1(f);$$

– осадки штампа $\delta_y = \Lambda_K^2(f)$;

– угла поворота штампа $\varphi_z = \Lambda_K^3(f)$.

9. Вычислительные алгоритмы. Для численного решения задач одностороннего дискретного контакта жестких штампов $\Pi_n(K)$ с РМР и упругой полуплоскости в настоящей работе применялся разработанный в работе [7] вычислительный алгоритм, основанный на вариационной формулировке контактной задачи и ее гранично-элементной дискретизации. Использовались регулярные сетки одноузловых граничных элементов нулевого порядка. Этот же алгоритм применялся при решении задач для базовых штампов Π_n^p без РМР. Необходимое количество граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При построении гранично-элементных сеток подобласть Γ_i, соответствующая одному микровыступу, разбивалась на $N_{be} = 1024$ граничных элемента, т.е. общее количество граничных элементов на Γ_p составляло $N_{be} \times K$. Наибольшее количество элементов сетки для штампа с 4096 микровыступами составляло $2^{22} = 4\,194\,304$ элемента.

Следует отметить, что разработанный в работе [7] вычислительный алгоритм позволяет определять не только вектор узловых нормальных напряжений, но и перемещение δ_y и угол поворота φ_z жесткого штампа.

Для численного решения периодических контактных задач для бесконечных в плане штампов $\Pi_n^p(K)$ применялся разработанный в работе [8] вычислительный алгоритм, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье при аппроксимации оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего в зоне возможного контакта нормальные напряжения в нормальные перемещения. Передаточная функция оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полуплоскости имеет вид:

$$G(\alpha) = 2/(E^*|\alpha|),$$

где α – параметр преобразования Фурье. Коэффициент расширения вычислительной области полагался равным единице. Дискретизация задачи производилась путем равномерного разбиения периода a/K на $N_{be} = 4096$ одноузловых граничных элементов нулевого порядка.

При построений функций $\Upsilon_s(p)$, $\Upsilon_p(p)$, $\Upsilon_q(p)$ и $\Upsilon_z(p)$ для бесконечного в плане штампа $\Pi_n^p(K)$ применялся следующий алгоритм. Определялось максимальное усилие $R_{\max} = \max\limits_{1 \le i \le K} r_i$ на микровыступах штампа $\Pi_n^p(K)$ с РМР и вычислялось максимальное среднее давление $p_{\max}^m = R_{\max}K/a$ для соответствующего ему штампа $\Pi_n^p(K)$. Далее производилось разбиение отрезка $[0, p_{\max}^m]$ на L_p частей таким образом, чтобы их размеры увеличивались в геометрической прогрессии по мере удаления от левого конца отрезка, а отношение длин наибольшего и наименьшего из отрезков составляло l_p. В результате получена сетка $\{p_0 = 0, p_1, \ldots, p_L = p_{\max}^m\}$. Далее производилось пошаговое нагружение штампа $\Pi_n^p(K)$ средним давлением p_l, $l = 1, \ldots, L_p$ и вычислялись значения сеточных функций $\boldsymbol{\Upsilon}_s(p) = \{\Upsilon_s(p_l)\}$, $\boldsymbol{\Upsilon}_p(p) = \{\Upsilon_p(p_l)\}$, $\boldsymbol{\Upsilon}_q(p) = \{\Upsilon_q(p_l)\}$ и $\boldsymbol{\Upsilon}_z(p) = \{\Upsilon_z(p_l)\}$. Значения функций $\Upsilon_s(p)$, $\Upsilon_p(p)$, $\Upsilon_q(p)$ и $\Upsilon_z(p)$ для произвольного значения $p \in [0, p_{\max}^m]$ вычислялись путем линейной интерполяции значений соответствующей сеточной функции. При проведении расчетов полагалось, что $L_p = 1024$ и $l_p = 25$.

Аналогичный алгоритм использовался для построения функций $\Lambda_K^i(f)$, $i = 1, 2, 3$, характеризующих процесс вдавливания жесткого штампа $\Pi_n(K)$ с РМР в упругую полуплоскость, при изменении безразмерного параметра внешней нагрузки f в интервале $[0, f^*]$. Произведем разбиение интервала $[0, f^*]$ на L_f частей таким образом, чтобы их размеры увеличивались в геометрической прогрессии по мере удаления от левого конца интервала, а отношение длин наибольшего и наименьшего из отрезков составляло l_f. В результате получим сетку $T_f = \{f_0 = 0, f_1, \ldots, f_L = f^*\}$. Введем далее сеточные функции $\boldsymbol{\Lambda}_K^i = R_f \Lambda_K^i(f)$, $i = 1, 2, 3$, где R_f – оператор ограничения на сетку T_f. Для вычисления этих сеточных функций производилось пошаговое нагружение штампа. Значения функций $\Lambda_K^i(f)$, $i = 1, 2, 3$, для произвольного значения $f \in [0, f^*]$ вычислялись путем линейной интерполяции значений соответствующей сеточной функции. При проведении расчетов полагалось, что $L_f = 256$ и $l_f = 64$.

Отметим одну особенность вычислительных алгоритмов решения контактных задач с использованием одноузловых граничных элементов нулевого порядка, т.е. элементов с постоянной аппроксимацией искомых контактных напряжений. Эти алгоритмы позволяют определить положения границ зон фактического контакта с точностью до размера граничного элемента и, как следствие, относительные величины площадей фактического контакта на микровыступах (значения функций $\mathbf{S}_K = [s_i]$ и $\Upsilon_s(p)$) изменяются дискретно с шагом $\Delta s = 1/N_{be}$, а относительная величина площади фактического контакта штампа $s = \Lambda_K^1(f)$ изменяется дискретно с шагом $\Delta s = 1/(N_{be} \times K)$. Отметим также, что двукратное измельчение гранично-элементной сетки примерно вдвое уменьшает погрешность определения площади фактического контакта.

10. Результаты вычислительных экспериментов. Закономерности контактного взаимодействия штампов с РМР и упругой полуплоскости. При проведении вычислительных экспериментов использовано более тысячи различных семейств Π_n^s штампов с РМР. В процессе обработки результатов расчетов для этих семейств штампов установлена следующая закономерность: при увеличении числа K микровыступов уменьшаются относительные расхождения

$$\varepsilon_m(\mathbf{R}, K) = \left\| \mathbf{R}_K - \mathbf{R}_K^b \right\|_m / \left\| \mathbf{R}_K \right\|_m$$

сеточных функций контактных усилий для штампов $\Pi_n(K)$ с РМР и соответствующих им базовых штампов Π_n^b без РМР. Символ $\|\cdot\|_m$ обозначает гельдеровскую норму вектора с одним из показателей $m = 1, 2, \infty$. В качестве примера в табл. 2 приведены относительные среднеквадратичные расхождения $\varepsilon_2(\mathbf{R}, K)$ для семейств штампов, параметры которых и приложенных к ним внешних нагрузок указаны в табл. 1. Нетрудно видеть, что для всех семейств штампов среднеквадратичные расхождения $\varepsilon_2(\mathbf{R}, 4096)$ не превышают 0.664%. Следовательно, при достаточно большом количестве микровыступов с приемлемой для инженерной практики точностью для штампа $\Pi_n(K)$ с РМР распределение контактных усилий на его микровыступах может быть вычислено по известному распределению контактного давления для соответствующего базового штампа Π_n^b без РМР. Отметим, что наибольшие по абсолютной величине расхождения компонент сеточных функций $\mathbf{R}_K$ и $\mathbf{R}_K^b$ наблюдались для граничных и приграничных микровыступов кластера C_1, а для семейств штампов Π_3^s и Π_4^s,

Таблица 2. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{R}, K) = 10^5 \cdot \varepsilon_2(\mathbf{R}, K)$

Семейство штампов	Количество микровыступов K								
	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Π_1^s	2475	1570	972	601	379	245	161	106	70.6
Π_2^s	5199	4289	3257	2321	1612	1057	680	436	279
Π_3^s	16532	10705	6987	4610	3068	2056	1387	942	643
Π_4^s	43.0	47.3	37.0	21.6	13.8	6.70	3.96	3.06	1.68
Π_5^s	4681	3264	2156	1372	849	515	310	183	106
Π_6^s	438	285	214	135	75.1	47.1	26.4	15.1	9.08
Π_7^s	5012	3861	1786	1232	829	553	348	180	107
Π_8^s	314	442	335	137	177	96.9	62.8	42.9	27.8
Π_9^s	307	46.6	41.8	63.6	40.2	20.8	17.5	9.12	4.91
Π_{10}^s	13092	8395	6085	5832	4198	2545	1815	1136	664

базовые штампы которых имеют форму клина, – для центральных микровыступов штампов.

Ранее в работе [8] для семейств штампов с РМР было установлено, что при вдавливании штампов в упругую полосу существует единая огибающая сеточных функций нормализованных контактных усилий на микровыступах $\tilde{\mathbf{R}}_K = [\tilde{r}_i]$, где $\tilde{r}_i = r_i K/|F_y|$. В настоящей работе этот результат уточнен для упругой полуплоскости: на основании установленной закономерности и соотношений (6.3), (6.4) можно предположить, что для рассмотренных семейств Π_n^s штампов с РМР при $K \to \infty$ существует предельная кривая для сеточных функций нормализованных контактных усилий на микровыступах $\tilde{\mathbf{R}}_K$, в качестве которой выступает распределение нормализованного контактного давления $\tilde{p}_b(x)$ для соответствующего базового штампа Π_n^b без РМР.

Кроме того, установлена еще одна закономерность: при достаточно большом количестве микровыступов ряд характеристик контакта для штампа $\Pi_n(K)$ с РМР могут быть с приемлемой для инженерной практики точностью определены с помощью решения периодической задачи для бесконечного в плане штампа $\Pi_n^p(K)$ по контактным усилиям на микровыступах $\mathbf{R}_K^b = [r_i^b]$, вычисленным для базового штампа Π_n^b.

Используя (5.2)–(5.5), вычислим для штампа $\Pi_n(K)$ сеточные функции относительных величин площадей фактического контакта $\mathbf{S}_K$, максимумов контактного давления $\mathbf{P}_K$, средних контактных давлений $\mathbf{Q}_K$ и средних конечных зазоров $\mathbf{Z}_K$ на микровыступах. Далее вычислим сеточную функцию контактных усилий $\mathbf{R}_K^b$ для базового штампа Π_n^b, построим множество $D_c(\mathbf{R}_K^b)$ микровыступов, контактирующих с полуплоскостью, и соответствующий оператор редукции $\mathbf{F}(D_c)$. Определим для множества C_1^0 внутренних микровыступов кластера $C_1 = D_c$ относительные расхождения сеточных функций:

$$\varepsilon_m(\mathbf{S}, K) = \left\| \mathbf{F}\mathbf{S}_K - \mathbf{F}\Upsilon_s(\mathbf{R}_K^b K / a) \right\|_m / \left\| \mathbf{F}\mathbf{S}_K \right\|_m,$$

$$\varepsilon_m(\mathbf{P}, K) = \left\| \mathbf{F}\mathbf{P}_K - \mathbf{F}\Upsilon_p(\mathbf{R}_K^b K / a) \right\|_m / \left\| \mathbf{F}\mathbf{P}_K \right\|_m,$$

$$\varepsilon_m(\mathbf{Q}, K) = \left\| \mathbf{F}\mathbf{Q}_K - \mathbf{F}\Upsilon_q(\mathbf{R}_K^b K / a) \right\|_m / \left\| \mathbf{F}\mathbf{Q}_K \right\|_m,$$

$$\varepsilon_m(\mathbf{Z}, K) = \left\| \mathbf{F}\mathbf{Z}_K - \mathbf{F}\Upsilon_z(\mathbf{R}_K^b K / a) \right\|_m / \left\| \mathbf{F}\mathbf{Z}_K \right\|_m.$$

Здесь и далее для краткости записи применение скалярной функции скалярного аргумента к сеточной функции означает покомпонентное применение этой функции к компонентам сеточной функции. Аналогичное правило действует в отношении операции умножения сеточной функции на скаляр.

В табл. 3–6 приведены относительные среднеквадратичные расхождения $\varepsilon_2(\mathbf{S}, K)$, $\varepsilon_2(\mathbf{P}, K)$, $\varepsilon_2(\mathbf{Q}, K)$ и $\varepsilon_2(\mathbf{Z}, K)$ для семейств штампов, параметры которых и приложенных к ним внешних нагрузок указаны в табл. 1. Нетрудно видеть, что для всех семейств штампов среднеквадратичные расхождения $\varepsilon_2(\mathbf{S}, 4096)$ не превышают 0.828%, $\varepsilon_2(\mathbf{P}, 4096)$ – 2.422%, $\varepsilon_2(\mathbf{Q}, 4096)$ – 0.809%, $\varepsilon_2(\mathbf{Z}, 4096)$ – 0.0718%. Для сравнения в табл. 7 для штампов $\Pi_n(4096)$

Таблица 3. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{S}, K) = 10^5 \cdot \varepsilon_2(\mathbf{S}, K)$

Семейство штампов	Количество микровыступов K								
	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Π_1^s	719	340	179	104	93.0	84.1	86.4	90.6	94.1
Π_2^s	467	273	187	129	114	102	102	102	104
Π_3^s	5461	3646	2387	1649	1312	1004	918	848	828
Π_4^s	109	80.4	51.3	52.8	43.4	47.2	54.6	59.3	62.3
Π_5^s	1157	590	310	204	196	216	226	235	220
Π_6^s	123	61.7	52.4	58.3	61.1	62.1	64.9	67.5	69.6
Π_7^s	310	214	208	189	195	201	205	206	207
Π_8^s	112	72.0	73.1	70.6	64.7	66.9	72.1	75.2	77.3
Π_9^s	77.0	68.5	61.3	52.4	50.6	60.2	62.5	63.7	64.6
Π_{10}^s	2545	966	899	773	612	513	471	448	445

Таблица 4. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{P}, K) = 10^5 \cdot \varepsilon_2(\mathbf{P}, K)$

Семейство штампов	Количество микровыступов K								
	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Π_1^s	730	312	136	64.4	30.9	29.7	62.7	113	185
Π_2^s	5112	3782	2931	2366	1989	1723	1539	1412	1327
Π_3^s	5673	3737	2428	1634	1131	743	482	327	303
Π_4^s	40249	27904	19547	13758	9708	6857	4846	3425	2422
Π_5^s	1248	659	340	205	163	143	127	119	86.1
Π_6^s	2970	2339	1539	1006	636	370	228	128	71.0
Π_7^s	1482	790	780	648	483	333	219	167	107
Π_8^s	5740	2612	1513	1185	752	541	318	189	109
Π_9^s	5336	2389	1461	1011	809	585	410	245	143
Π_{10}^s	9267	3192	2449	2331	1414	761	414	259	174

приведены относительные расхождения сеточных функций, вычисленные с использованием норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$. Отметим, что имеющиеся для некоторых штампов значительные различия результатов для этих норм связаны с неоднородным распределением контактных усилий по микровыступам.

Таким образом, для штампа $\Pi_n(K)$ с РМР при достаточно большом количестве микровыступов с приемлемой для инженерной практики точностью распределения относительных величин площадей фактического контакта, максимумов контактного давления, средних контактных давлений и средних конечных зазоров на его внутренних микровыступах $\varpi_i \in C_1^0$ могут быть определены с помощью решения периодической задачи для бесконечного в плане

Таблица 5. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{Q}, K) = 10^5 \cdot \varepsilon_2(\mathbf{Q}, K)$

Семейство штампов	Количество микровыступов K								
	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Π_1^s	690	275	126	64.9	70.1	67.5	74.5	76.6	80.3
Π_2^s	2229	1283	709	418	229	129	91.0	77.2	80.5
Π_3^s	5795	3800	2474	1784	1326	1047	838	807	809
Π_4^s	157	138	69.3	47.3	47.6	46.7	54.8	57.5	59.6
Π_5^s	1295	714	417	309	260	240	231	227	217
Π_6^s	134	85.9	80.3	69.6	65.9	65.8	67.4	68.9	70.0
Π_7^s	2062	1428	739	463	362	284	244	230	219
Π_8^s	173	147	107	70.7	71.6	694	70.8	72.9	75.0
Π_9^s	67.8	56.6	54.6	46.4	48.0	58.1	60.7	61.8	62.6
Π_{10}^s	7718	2339	2629	2542	1704	1021	643	495	436

Таблица 6. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{Z}, K) = 10^5 \cdot \varepsilon_2(\mathbf{Z}, K)$

Семейство штампов	Количество микровыступов K								
	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Π_1^s	1622	726	330	167	97.6	65.7	51.3	44.8	41.7
Π_2^s	633	381	229	137	80.4	43.8	23.4	13.3	8.98
Π_3^s	520	335	214	137	89.6	57.6	37.1	24.1	65.0
Π_4^s	3250	1067	403	215	112	71.6	34.0	15.6	12.6
Π_5^s	964	470	225	126	95.4	80.2	66.9	57.1	38.6
Π_6^s	1133	436	180	85.8	41.1	15.6	3.98	3.37	4.33
Π_7^s	134	98.2	47.2	25.0	14.5	9.07	5.94	4.54	2.90
Π_8^s	658	358	243	181	105	78.6	34.8	14.2	4.97
Π_9^s	1474	664	483	328	342	310	287	150	71.8
Π_{10}^s	47.6	15.5	20.0	20.4	13.2	7.48	4.01	2.10	1.18

штампа $\Pi_n^p(K)$ по контактным усилиям на микровыступах $\mathbf{R}_K^b$, вычисленным для базового штампа Π_n^b.

Также в процессе обработки результатов расчетов для бесконечных в плане штампов $\Pi_n^p(K)$ установлена следующая закономерность: функции $\Upsilon_s(p)$, $\Upsilon_p(p)$, $\Upsilon_q(p)$ и $K\Upsilon_z(p)$ инвариантны относительно периода (размера микровыступа) a/K. Следовательно, при достаточно большом числе микровыступов относительные величины площадей фактического контакта, значения максимумов контактного давления и средних контактных давлений на его внутренних микровыступах $\varpi_i \in C_1^0$ практически не зависят от числа микровыступов, а значения средних конечных зазоров убывают обратно пропорционально числу

Таблица 7. Относительные расхождения $\tilde{\varepsilon}_m = 10^5 \cdot \varepsilon_m$

Штамп	$\tilde{\varepsilon}_m(\mathbf{R}, 4096)$		$\tilde{\varepsilon}_m(\mathbf{S}, 4096)$		$\tilde{\varepsilon}_m(\mathbf{P}, 4096)$		$\tilde{\varepsilon}_m(\mathbf{Q}, 4096)$		$\tilde{\varepsilon}_m(\mathbf{Z}, 4096)$	
	$m=1$	$m=\infty$	$m=1$	$m=\infty$	$m=1$	$m=\infty$	$m=1$	$m=\infty$	$m=1$	$m=\infty$
$\Pi_1(4096)$	6.11	119	80.2	131	12.1	1161	73.8	51.2	37.7	56.1
$\Pi_2(4096)$	20.3	400	85.5	158	146	6058	73.8	87.3	7.91	122
$\Pi_3(4096)$	60.1	5908	686	4323	39.1	4555	674	4590	3.31	2655
$\Pi_4(4096)$	0.245	12.0	51.5	137	201	20 999	50.4	73.3	12.0	60.2
$\Pi_5(4096)$	20.2	2648	171	2280	14.1	2170	173	2146	7.40	712
$\Pi_6(4096)$	1.37	239	56.0	151	31.4	983	56.6	146	2.05	4.70
$\Pi_7(4096)$	19.7	2804	175	443	22.7	2326	183	1124	0.865	67.3
$\Pi_8(4096)$	2.56	769	64.0	156	34.7	1325	63.2	156	2.19	80.2
$\Pi_9(4096)$	0.500	122	53.4	127	44.2	2035	52.5	117	13.3	479
$\Pi_{10}(4096)$	115	8190	369	968	61.4	1950	372	1060	0.673	19.7

микровыступов. Отметим, что существование единой огибающей контактного давления для однопараметрического семейства $\Pi^s(\Phi_1, \Phi_2)$ штампов с РМР при вдавливании в упругую полуплоскость впервые было установлено в работе [7], а существование единой огибающей относительных величин площадей фактического контакта при вдавливании штампов с РМР в упругую полосу — в работе [8].

В работах [11, 12] при исследовании методом вычислительного эксперимента процесса вдавливания штампов с РМР в функционально-градиентные и многослойные упругие полосы, сцепленные с недеформируемым основанием, наблюдалась сходимость последовательностей сеточных функций относительных величин площадей фактического контакта штампа $\mathbf{\Lambda}_K^1$, осадки штампа $\mathbf{\Lambda}_K^2$ и угла поворота штампа $\mathbf{\Lambda}_K^3$ при увеличении числа K микровыступов. В настоящей работе при моделировании процесса вдавливания жестких штампов $\Pi_n(K)$ с РМР в упругую полуплоскость установлена аналогичная закономерность: при увеличении числа K уменьшаются относительные расхождения сеточных функций:

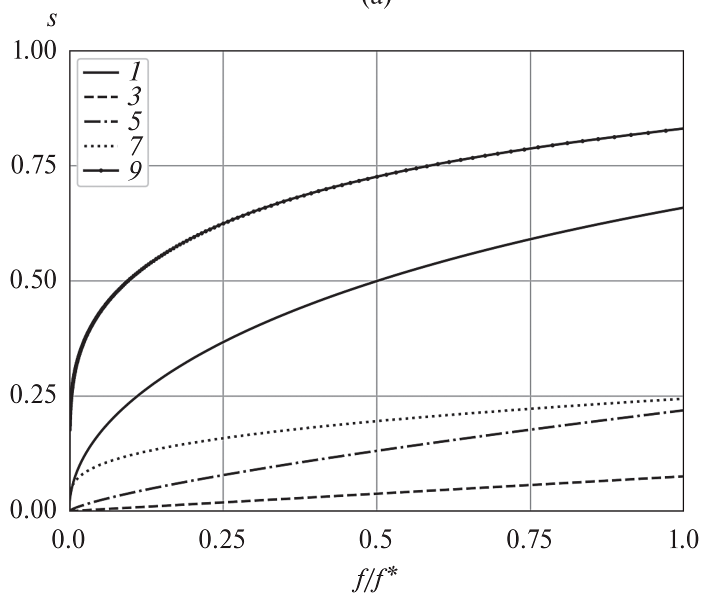
$$\varepsilon_m^i(K) = \left\| \mathbf{\Lambda}_K^i - \mathbf{\Lambda}_Q^i \right\|_m \Big/ \left\| \mathbf{\Lambda}_Q^i \right\|_m, \; i = 1, 2, 3,$$

где Q = 4096 — максимальное число микровыступов в серии расчетов.

Таким образом, на основании результатов проведенных вычислительных экспериментов можно предположить существование для рассмотренных семейств Π_n^s штампов с РМР при $K \to \infty$ предельных кривых $s = \Lambda^1(f)$, $\delta_y = \Lambda^2(f)$ и $\varphi_z = \Lambda^3(f)$.

В качестве примера на рис. 3–5 приведены графики зависимостей $s = \Lambda_Q^1(f)$, $\delta_y = \Lambda_Q^2(f)$ и $\varphi_z = \Lambda_Q^3(f)$ для штампов $\Pi_n(Q)$, параметры которых указаны в табл. 1. Номера кривых 1–10 соответствуют номерам штампов $n = 1, ..., 10$. Отметим, что на рис. 4б кривые 2 и 10 практически совпали и визуально не различимы. При проведении расчетов полагалось, что $f^* = 10^{-5}$, а

(а)



(б)

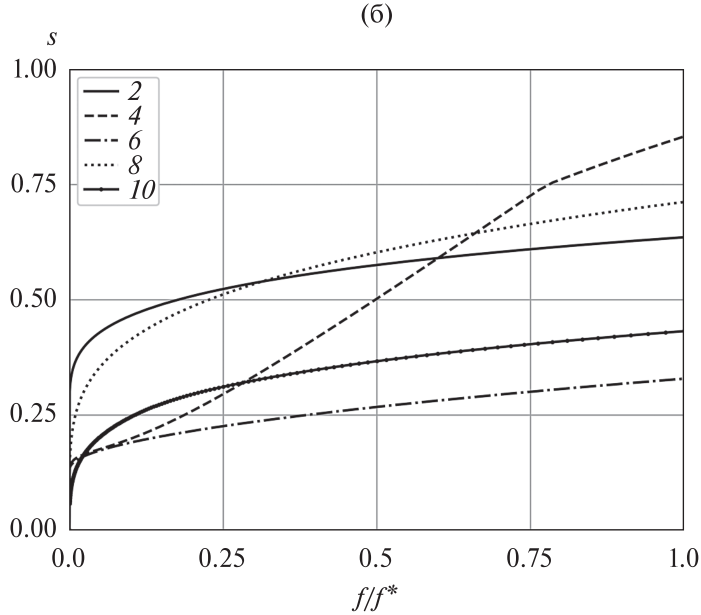


Рис. 3. Зависимость относительной величины площади фактического контакта штампа от параметра внешней нагрузки $s = \Lambda_Q^1(f)$ (номера кривых соответствуют номерам штампов $\Pi_n(Q)$).

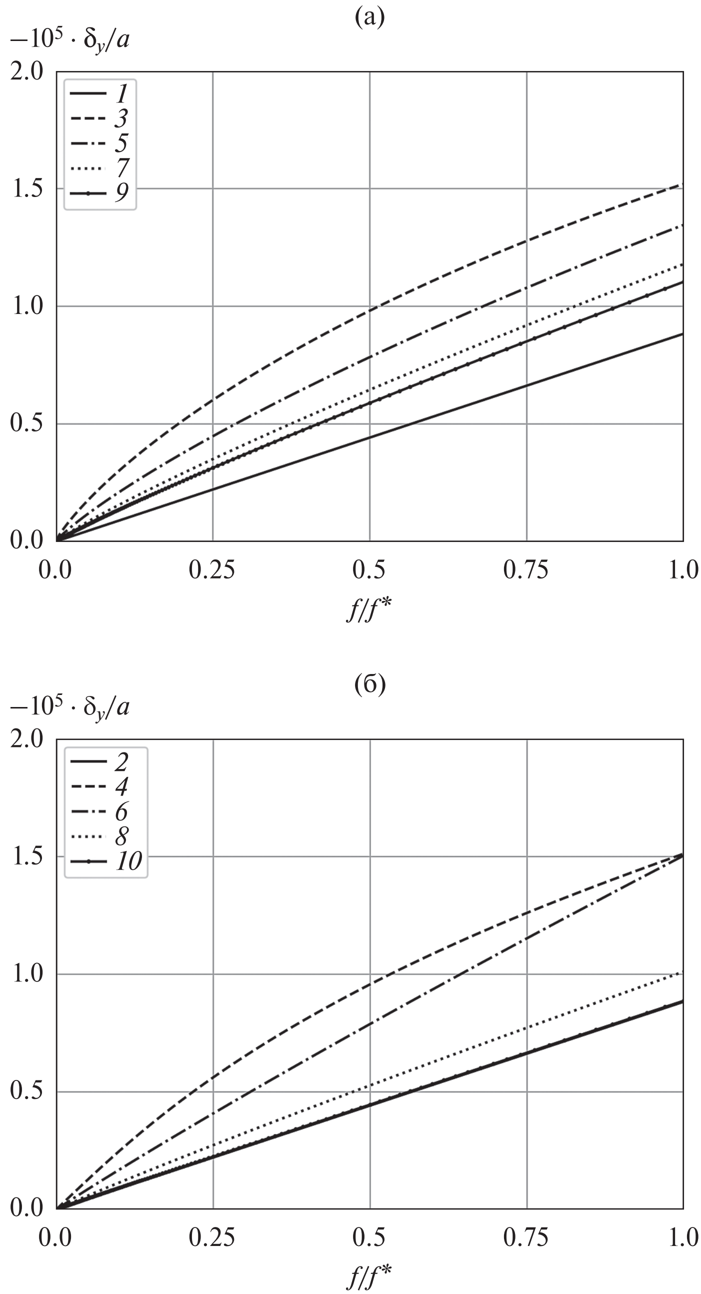


Рис. 4. Зависимость осадки штампа от параметра внешней нагрузки $\delta_y = \Lambda_Q^2(f)$ (номера кривых соответствуют номерам штампов $\Pi_n(Q)$).

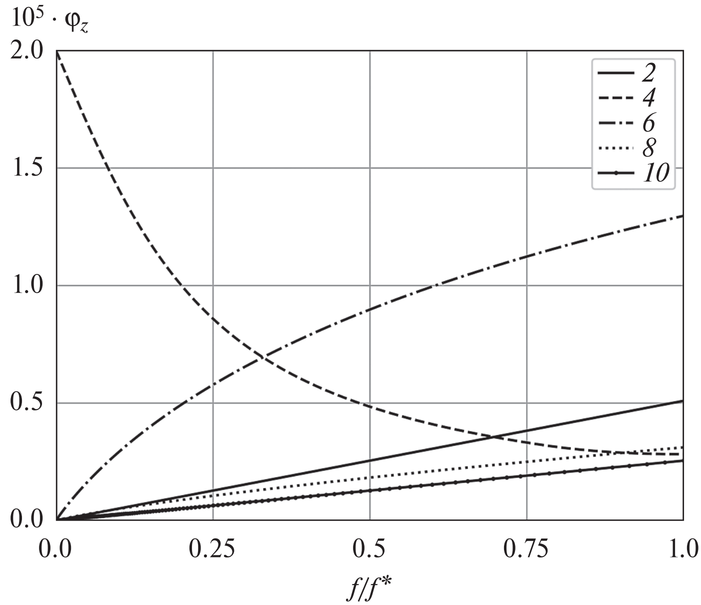


Рис. 5. Зависимость угла поворота штампа от параметра внешней нагрузки $\varphi_z = \Lambda_Q^3(f)$ (номера кривых соответствуют номерам штампов $\Pi_n(Q)$).

значение безразмерного параметра e, характеризующего эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки, для каждого штампа принималось равным указанному в табл. 1. Нетрудно видеть, что относительная величина площади фактического контакта штампа $s = \Lambda_Q^1(f)$ и осадка штампа $\delta_y = \Lambda_Q^2(f)$ возрастают с увеличением внешней нагрузки. Угол поворота штампа $\varphi_z = \Lambda_Q^3(f)$ также возрастает с увеличением внешней нагрузки для штампов всех рассмотренных семейств Π_n^s, кроме Π_4^s, базовый штамп которого имеет форму клина. При приложении внешней нагрузки с эксцентриситетом относительно вершины клина штамп мгновенно поворачивается на угол $\varphi_z^* = 90° - \alpha$, где α – угол полураствора клина. С увеличением нагрузки угол поворота штампов семейства Π_4^s убывает. Зависимости $\varphi_z = \Lambda_Q^3(f)$ для штампов с номерами $n = 1, 3, 5, 7, 9$, для которых параметр $e = 0$, не представлены на рис. 5, так как полученные численные значения φ_z для параметра $f \in [0, f^*]$ по абсолютной величине не превышали $3 \cdot 10^{-15}$.

Все проведенные в данной работе расчеты выполнялись для упругой полуплоскости, модуль Юнга которой полагался равным $E = 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона – равным $\nu = 0.3$.

11. Приближенный расчет характеристик контакта поверхностей с РМР (плоская задача). Пусть макроформа и РМР контактирующих тел таковы, что для определения напряженно-деформированного состояния тел может быть использовано решение Фламана задачи о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости. В этом случае при моделировании локального контактного взаимодействия двух упругих тел может быть использована расчетная схема, в которой одно из тел считается жестким штампом, а второе – упругой полуплоскостью с приведенным модулем упругости. Также предполагается, что в зоне контакта находится достаточно большое количество, по крайней мере несколько сотен микровыступов.

На основе установленных методом вычислительного эксперимента закономерностей для штампов с РМР предлагается следующая методика приближенного расчета распределения нагрузок между элементами РМР, а также оценки контактного давления, размеров площадок фактического контакта и средних конечных зазоров на микровыступах.

На первом шаге аналитически или численно определяется распределение контактного давления для базового штампа без РМР. Далее производится равномерное разбиение области возможного контакта Γ_p на отрезки, соответствующие отдельным микровыступам РМР, и вычисляются контактные усилия на этих отрезках, т.е. вычисляется сеточная функция $\mathbf{R}_K^b$.

На втором шаге решается периодическая контактная задача для бесконечного в плане штампа, РМР которого идентичен РМР рассматриваемого штампа конечных размеров, и определяются аналитически или численно с помощью описанного выше в п. 8 алгоритма функции $\Upsilon_s(p)$, $\Upsilon_p(p)$, $\Upsilon_q(p)$ и $\Upsilon_z(p)$.

На завершающем шаге вычисляются приближенные распределения по микровыступам рассматриваемого штампа с РМР (сеточные функции) относительных величин площадей фактического контакта $\mathbf{S}_K^* = \Upsilon_s(\mathbf{R}_K^b K/a)$, максимумов контактного давления $\mathbf{P}_K^* = \Upsilon_p(\mathbf{R}_K^b K/a)$, средних контактных давлений $\mathbf{Q}_K^* = \Upsilon_q(\mathbf{R}_K^b K/a)$ и средних конечных зазоров $\mathbf{Z}_K^* = \Upsilon_z(\mathbf{R}_K^b K/a)$.

Отметим, что если контактное давление для базового штампа без РМР ограничено во всей области контакта, то на ее краях оно стремится к нулю, а контактные усилия и, следовательно, контактные напряжения на граничных и приграничных микровыступах соответствующего штампа с РМР будут малы по сравнению с аналогичными характеристиками для его внутренних микровыступов.

12. Заключение. В настоящей работе рассмотрена задача дискретного контакта жесткого штампа с РМР и упругой полуплоскости. С учетом результатов работ [8, 11, 12] можно предположить, что установленные для полуплоскости закономерности контактного взаимодействия могут быть обобщены на случай упругой полосы как однородной, так и функционально-градиентной или многослойной. Также с учетом результатов работы [13] представляет интерес исследование аналогичных закономерностей для пространственных задач о вдавливании штампов с РМР в упругое полупространство или слой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шнейдер Ю.Г.* Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом. СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. 264 с.
2. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. *Горячева И.Г., Цуканов И.Ю.* Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел (Обзор) // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 6. С. 757–789. https://doi.org/10.31857/S0032823520060053

4. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. Article 45.
https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00045
5. *Цуканов И.Ю.* К вопросу о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 685–694.
https://doi.org/10.31857/S0032823522050125
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 135–153.
https://doi.org/10.31857/S0572329922020052
8. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 404–423.
https://doi.org/10.31857/S0032823522030031
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
10. *Бобылев А.А.* О положительной определенности оператора Пуанкаре-Стеклова для упругой полуплоскости // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2021. № 6. С. 34–40.
11. *Бобылев А.А.* Задача одностороннего дискретного контакта для функционально-градиентной упругой полосы // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2024. № 2. С. 58–69.
https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-2-8
12. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для многослойной упругой полосы // Прикл. мех. и техн. физ. 2024. Т. 65. № 2. С. 230–242.
https://doi.org/10.15372/PMTF202315415
13. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 70–89.
https://doi.org/10.31857/S0572329922100129

ON REGULARITIES OF CONTACT INTERACTION OF SURFACES WITH REGULAR MICRORELIEF (PLANE PROBLEM)

A. A. Bobylev[a, *]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

**e-mail: abobylov@gmail.com*

Abstract – We consider plane contact problems with a limited contact area for elastic bodies with a regular microrelief (RMR) applied to their surfaces. It is assumed that Flamant's solution to the problem of the action of a concentrated normal force on the boundary of an elastic half-plane can be used to determine the stress-strain state of bodies. When modeling the contact interaction, a calculation scheme was used in which one of the bodies is considered as a rigid punch, and the second is considered as an elastic half-plane with a composite modulus of elasticity. The single-parameter families of punches with RMR are considered, the parameter of which is the number of microprotrusions. The regularities of contact interaction of punches with RMR and elastic half-plane were investigated by the method of computational experiment. Based on the established patterns, a method for approximate calculation of load distribution between RMR elements, as well as assessment of contact pressure, sizes of actual contact areas and average final gaps on microprotrusions is proposed.

Keywords: problem of unilateral discrete contact, surface with regular microrelief

REFERENCES

1. *Schneider Yu.G.* Operational properties of parts with regular microrelief. SPb.: SPb GITMO (TU), 2001. 264 p. (in Russian)
2. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer, 1998. 346 p.
3. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Development of Discrete Contact Mechanics with Applications to Study the Frictional Interaction of Deformable Bodies // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 8. P. 1441–1462.
https://doi.org/10.3103/S0025654420080099
4. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of Elastic Normal Contact of Surfaces with Regular Microgeometry Based on the Localization Principle // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. Article 45.
https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00045
5. *Tsukanov I.Y.* On the Contact Problem for a Wavy Cylinder and an Elastic Half-Plane // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 8. P. 2104–2110.
https://doi.org/10.3103/S002565442208026X
6. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 452 p.
7. *Bobylev A.A.* Application of the Conjugate Gradient Method to Solving Discrete Contact Problems for an Elastic Half-Plane // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 317–332.
https://doi.org/10.3103/S0025654422020029
8. *Bobylev A.A.* Algorithm for Solving Discrete Contact Problems for an Elastic Strip // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 7. P. 1766–1780.
https://doi.org/10.3103/S0025654422070068
9. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. 732 p.
10. *Bobylev A.A.* On the Positive Definiteness of the Poincaré–Steklov Operator for Elastic Half-Plane // Moscow University Mechanics Bulletin. 2021. V. 76. № 6. P. 156–162.
https://doi.org/10.3103/S0027133021060029
11. *Bobylev A. A.* The Unilateral Discrete Contact Problem for a Functionally Graded Elastic Strip // Moscow University Mechanics Bulletin. 2024. V. 79. № 2. P. 56–68.
https://doi.org/10.3103/S0027133024700080
12. *Bobylev A.A.* Algorithm for Solving Unilateral Discrete Contact Problems for a Multilayer Elastic Strip // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2024. V. 65. № 2. P. 382–392.
https://doi.org/10.1134/S0021894424020202
13. *Bobylev A.A.* Algorithm for Solving Discrete Contact Problems for an Elastic Layer // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 2. P. 439–454.
https://doi.org/10.3103/S0025654422100296