

УДК 531.36

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ТЯЖЕЛОГО ШЕРОХОВАТОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, ПОДВЕШЕННОГО НА ГВОЗДЕ

© 2025 г. Е. А. Никонова^{а, *}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 12.12.2024 г.

После доработки 23.12.2024 г.

Принята к публикации 24.12.2024 г.

Рассматривается плоская задача о равновесии тяжелого однородного тонкого проволочного треугольника, подвешенного на тонком горизонтальном гвозде. Изучается существование положений равновесия и их зависимость от коэффициента трения и длин сторон треугольника в предположении о наличии силы сухого трения, действующей между треугольником и гвоздем. Задача решается в барицентрических координатах, связанных с системой вершин рассматриваемого треугольника. Условие равновесия записывается в форме, позволяющей циклическим сдвигом индексов входящих в него величин получить условие равновесия для любой из сторон треугольника, которой он контактирует с гвоздем.

Ключевые слова: равновесия тяжелого твердого тела, сухое трение, конус трения

DOI: 10.31857/S1026351925030071, EDN: AZWUID

1. Введение. Задача о равновесии систем с трением — классическая задача механики, неотъемлемо представленная как в хрестоматийных, так и в современных учебниках и монографиях [1–9] — тема исследования, не теряющая своей актуальности и по сей день [10–15]. Задача, о которой пойдет речь, заимствована из работы [5] (пункт 178, пример 27), но приводится здесь в адаптированном изложении.

В работе рассматривается плоская задача о равновесии тяжелой однородной проволоки, изогнутой в виде контура треугольника и подвешенной на тонком горизонтальном гвозде. Изучаются положения равновесия, а также их зависимость от коэффициента трения и длин сторон треугольника в предположении о наличии силы сухого трения, действующей между треугольником и гвоздем. Для описания положения точки контакта относительно треугольника используются возникающие естественным образом

барицентрические координаты. Важной особенностью этих координат является их однородность, благодаря которой получаемые результаты записываются в симметричном виде.

Множество ярких примеров применения барицентрических координат в различных задачах химии (металлургия, колориметрия) [16], популяционной генетики [17] (см. также [16]), теории цвета [18], теории интерполяции [19], компьютерной графики и вычислительной механики [20], климатологии [21], динамики гравитирующих тел [22], теории управления [23], а также интенсивная работа над книгой [24] побудили автора выполнить предлагаемое исследование.

2. Постановка задачи. Тяжелая однородная проволока изогнута в виде контура треугольника $A_1A_2A_3$ и подвешена на шероховатом гвозде P за сторону A_1A_2 . Требуется определить положения равновесия такого треугольника в предположении, что в точке его контакта с гвоздем действует сила сухого трения с коэффициентом трения, равным μ . Толщина проволоки, а также толщина гвоздя предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами треугольника.

3. Решение. Как известно (см., например, [3, 5], а также [24]), твердое тело, имеющее одну точку касания P с другим телом (опорой), будет находиться в равновесии если и только если силы, приложенные к телу, будут иметь равнодействующую, равную и прямо противоположную силе реакции опоры, то есть проходящую через точку контакта, направленную так, чтобы прижимать изучаемое тело к опоре, и образующую с осью конуса трения угол, меньший, чем угол трения ε : $\text{tg } \varepsilon = \mu$.

В случае, когда тело, имеющее одну общую точку контакта с опорой, находится в поле силы тяжести, центр инерции тела и точка контакта располагаются на одной вертикали, в противном случае возникнет момент силы, выводящий тело из равновесия, см., например, [15]. Это позволяет рассматривать в качестве точки приложения силы тяжести точку контакта тела с опорой.

Для треугольника $A_1A_2A_3$, подвешенного за сторону A_1A_2 на гвоздь P , в точке контакта построим конус трения с вершиной в этой точке, осью, ортогональной стороне A_1A_2 , и углом раствора при вершине, равным 2ε . Таким образом, граничными точками множества неизолированных равновесий будут те точки стороны A_1A_2 , для которых образующая конуса трения проходит ровно через центр масс — точку M — треугольника $A_1A_2A_3$, см. рис. 1.

Для описания точек множества неизолированных равновесий воспользуемся системой барицентрических координат, естественно возникающей при рассмотрении треугольника $A_1A_2A_3$ в качестве базисного.

3.1. Барицентрические координаты и работа с ними. Под барицентрическими координатами точки Q на плоскости, связанными с заданным базисным треугольником $A_1A_2A_3$, будем понимать тройку вещественных чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, удовлетворяющих условию нормировки:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1, \quad (3.1)$$

и таких, что для произвольной точки O справедливо следующее соотношение между векторами:

Разделив массы точек на суммарную массу $\rho_\ell(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)$, получаем барицентрические координаты (3.3) точки M .

В барицентрических координатах можно вычислять расстояния между двумя точками, см., например, теорему 10 из § 9 книги [16]. Пусть точки P и Q имеют относительно треугольника $A_1A_2A_3$ барицентрические координаты (π_1, π_2, π_3) и $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ соответственно. Расстояние между ними вычисляется по формуле:

$$PQ^2 = -(\pi_1 - \delta_1)(\pi_2 - \delta_2)\ell_3^2 - (\pi_1 - \delta_1)(\pi_3 - \delta_3)\ell_2^2 - (\pi_2 - \delta_2)(\pi_3 - \delta_3)\ell_1^2. \quad (3.4)$$

Воспользуемся этой формулой для определения барицентрических координат точки H — основания перпендикуляра, опущенного к стороне базисного треугольника из произвольной точки Q с координатами $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Пусть для определенности требуется найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки Q к стороне A_1A_2 , то есть координаты точки H : $(\chi, 1 - \chi, 0)$, представленные с учетом принадлежности H стороне A_1A_2 и нормировочного выражения (3.1). Перпендикуляр от точки до прямой характеризуется тем свойством, что это кратчайшее расстояние от точки до прямой. Поэтому величина χ должна минимизировать HQ , а значит, согласно формуле (3.4) имеем:

$$-(\chi - \delta_1)(1 - \chi - \delta_2)\ell_3^2 + (\chi - \delta_1)\delta_3\ell_2^2 + (1 - \chi - \delta_2)\delta_3\ell_1^2 \rightarrow \min_{\chi}.$$

Выражение слева является квадратным трехчленом относительно χ :

$$\begin{aligned} &\ell_3^2\chi^2 + \chi(-\delta_1\ell_3^2 + \delta_2\ell_3^2 + \delta_3(\ell_2^2 - \ell_1^2) - \ell_3^2) + \\ &+ (-\delta_1\delta_2\ell_3^2 - \delta_1\delta_3\ell_2^2 - \delta_2\delta_3\ell_1^2 + \delta_1\ell_3^2 + \delta_3\ell_1^2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (3.1), минимальное значение HQ достигается при

$$\chi = \delta_1 + \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2 + \ell_3^2}{2\ell_3^2}\delta_3$$

и равно

$$HQ = 2S \cdot \frac{|\delta_3|}{\ell_3}, \quad (3.5)$$

где S — площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

Циклические сдвиги координат, а также индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ позволяют получить координаты оснований перпендикуляров, опущенных из точки Q к сторонам A_2A_3 и A_3A_1 соответственно:

$$\begin{aligned} (0, \chi, 1 - \chi), \quad \chi &= \delta_2 + \frac{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_1^2}\delta_1, \\ (1 - \chi, 0, \chi), \quad \chi &= \delta_3 + \frac{-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}{2\ell_2^2}\delta_2. \end{aligned}$$

Длины этих перпендикуляров соответственно равны $2S \cdot |\delta_1|/\ell_1$ и $2S \cdot |\delta_2|/\ell_2$.

Замечание. В обозначениях, предложенных Джоном Хортоном Конвеем¹ (см., например, [28]) после сокращения и числителя, и знаменателя на общий множитель, барицентрические координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки Q к стороне A_1A_2 базисного треугольника, примут вид:

$$\left(\delta_1 + \frac{\cot A_2}{\cot A_1 + \cot A_2} \delta_3, \delta_2 + \frac{\cot A_1}{\cot A_1 + \cot A_2} \delta_3, 0 \right).$$

Координаты представляются в симметричном виде. Углы при вершинах базисного треугольника наследуют обозначения соответствующих вершин.

3.2. Равновесия. Существование и зависимость от параметров задачи. Для определения координат граничной точки контакта P_1^3 на стороне A_1A_2 рассмотрим треугольник MHP_1^3 . В этом треугольнике угол $\angle MP_1^3H = \varepsilon$, поэтому $P_1^3H = HM \operatorname{tg} \varepsilon = HM \mu$. Принимая во внимание (3.3) и (3.5), находим:

$$MH = S \frac{\ell_1 + \ell_2}{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \ell_3}.$$

Принимая во внимание, что точка P_1^3 с координатами $(\pi_1^3, 1 - \pi_1^3, 0)$ является центром масс двух материальных точек $\pi_1^3 A_1$ и $(1 - \pi_1^3) A_2$, ее координаты могут быть определены из соотношения:

$$\pi_1^3 \cdot A_1 P_1^3 = (1 - \pi_1^3) \cdot P_1^3 A_2.$$

Они равны:

$$\left(\pi_1^3, 1 - \pi_1^3, 0 \right), \quad \pi_1^3 = \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2 + 2\ell_3^2 - \ell_1 \ell_3 + \ell_2 \ell_3}{4\ell_3^2} + \mu \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} \frac{S}{\ell_3^2}.$$

Аналогично находятся координаты второй граничной точки контакта P_2^3 . Они равны:

$$\left(\pi_2^3, 1 - \pi_2^3, 0 \right), \quad \pi_2^3 = \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2 + 2\ell_3^2 - \ell_1 \ell_3 + \ell_2 \ell_3}{4\ell_3^2} - \mu \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} \frac{S}{\ell_3^2}.$$

Точкам отрезка $P_1^3 P_2^3$, расположенного симметрично относительно H , отвечают равновесия треугольника. В случае отсутствия трения, то есть при $\mu = 0$, равновесию на стороне A_1A_2 отвечает единственная точка H с координатами:

$$\left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} - \lambda, 0 \right), \quad \lambda = \frac{(\ell_1 - \ell_3) \ell_1 - (\ell_2 - \ell_3) \ell_2}{4\ell_3^2}.$$

¹(англ. John Horton Conway; 26 декабря 1937 – 11 апреля 2020). Выдающийся британский математик с широким кругом научных интересов [26]. Известен, в частности, как создатель клеточного автомата под названием Игра “Жизнь” (англ. Game of Life) [27].

В этой точке вес треугольника компенсируется нормальной составляющей реакции, и сторона A_1A_2 располагается горизонтально. Для равнобедренного треугольника $\ell_1 = \ell_2$ равновесию отвечает середина A_1A_2 . Параметр λ характеризует смещение положения равновесия относительно середины стороны A_1A_2 . При отличном от нуля коэффициенте трения точка H является порождающей для семейства неизоллированных равновесий. Сторона A_1A_2 составляет с горизонтом ненулевой угол φ , такой что

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\ell_1^2 - \ell_2^2 + 2(1 - 2\pi)\ell_3^2 - \ell_1\ell_3 + \ell_2\ell_3 \right) \frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{4S(\ell_1 + \ell_2)},$$

где $(\pi, 1 - \pi, 0)$ — координаты точки подвеса треугольника.

Выпишем условие, которому должен удовлетворять коэффициент трения, чтобы треугольник находился в безразличном равновесии, то есть мог быть подвешен в любой точке стороны A_1A_2 . Это выполняется, если

$$P_1^3 P_2^3 > A_1 A_2 \Rightarrow \mu > \frac{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)}{(\ell_1 + \ell_2)} \frac{\ell_3^2}{2S}.$$

В случае, когда ℓ_3 наибольшая из сторон треугольника, этого условия также достаточно, чтобы треугольник находился в равновесии при подвешивании в любой своей точке.

3.3. Другая задача, где также находят свое применение полученные результаты. Рассмотрим еще одну задачу, где полученные результаты оказываются также полезными. Следуя [5] (пункт 176, пример 4, см. также [24], где изложено решение, отличное от предлагаемого здесь), рассмотрим два однородных стержня A_1A_2 и A_1A_3 , жестко соединенных под прямым углом в точке A_1 . Стержень A_1A_2 выступает за край стола. Найдем наибольшую длину выступающей части A_1A_2 и покажем, что если коэффициент трения больше, чем

$$\frac{A_1 A_2 (A_1 A_2 + 2 A_1 A_3)}{A_1 A_3^2},$$

то система может висеть, опираясь на край только концом A_2 .

Пусть $A_1A_2 = \ell_3$ (1, 2, 3), тогда для рассматриваемого уголка барицентрические координаты центра масс — точки M — имеют вид:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\ell_3}{2(\ell_2 + \ell_3)}, \quad \mu_3 = \frac{\ell_2}{2(\ell_2 + \ell_3)}.$$

Барицентрические координаты точки H — основания перпендикуляра, опущенного к A_1A_2 из центра масс M — имеют вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\ell_2}{2(\ell_2 + \ell_3)}, \quad \chi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\ell_2}{2(\ell_2 + \ell_3)}, \quad \chi_3 = 0.$$

При фиксированном коэффициенте трения μ наибольшая длина выступающей части A_1A_2 равна:

$$A_1 H + HP_2^3 = A_1 H + \mu HM = \frac{\ell_3^2 + \mu \ell_2^2}{2(\ell_2 + \ell_3)}.$$

Наконец, уголок может висеть, опираясь на край стола только концом A_2 при

$$\frac{\ell_3^2 + \mu \ell_2^2}{2(\ell_2 + \ell_3)} > \ell_3.$$

Следовательно, указанное равновесие реализуется при всех μ , больших чем $(2\ell_2 + \ell_3)\ell_3/\ell_2^2$.

Заключение. В работе решена плоская задача о равновесиях тяжелого однородного тонкого проволочного треугольника, подвешенного на тонком горизонтальном гвозде. Вычислены барицентрические координаты точек множеств неизолированных равновесий. Выполнен анализ зависимости найденных решений от значения коэффициента трения и величин длин сторон треугольника. Сформулирована и решена задача, в которой полученные результаты также находят свое применение.

В заключение отметим следующее. В работе [29] рассмотрена плоская задача о движении, в частности, о равновесии материальной точки при наличии связей, границы которых имеют особые точки. Особое внимание уделялось случаю, когда при переходе через такие точки касательный вектор менял направление на противоположное. В работе сформулирована рекомендация, указывающая на необходимость отказа в данном классе задач от идеализированного понятия материальной точки и введения в рассмотрение диска или шара конечного размера. Если руководствоваться этим замечанием в рассмотренной задаче и считать, что диаметр гвоздя — величина конечная, то задача о равновесиях треугольника на таком гвозде, располагающемся в окрестности какой-либо из его вершин и имеющем по точке контакта с прилегающими к вершине сторонами, сводится к анализу условий, при которых вертикаль, проходящая через центр масс треугольника, пересекает четырехугольник, образованный в пересечении конусов трения, построенных в точках контакта гвоздя и сторон треугольника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Phear J.B.* Elementary mechanics. Cambridge: MacMillan, 1850. 252 p.
2. *Walton W.A.* Collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics. 2nd edition. Cambridge: Deighton, Bell and Co, 1855. 470 p.
3. *Аннелъ П.* Теоретическая механика. Т. I. М.: Физматгиз, 1960. 516 с.
4. *Wittenbauer F.* Aufgaben aus der technischen mechanik. Berlin: Springer, 1907. 392 p.
5. *Routh E.J.* A treatise on analytical statics, with numerous examples. 2nd ed. Cambridge University Press, 1909. 392 p.
6. *Бухгольц Н.Н., Воронков И.М., Минаков А.П.* Сборник задач по теоретической механике. 3-е изд. М.—Л.: ГИТТЛ, 1949. 276 с.

7. Розенблат Г.М. Сухое трение в задачах и решениях. Москва–Ижевск: Издательство “РХД”, 2009. 52 с.
8. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. Москва–Ижевск: Издательство “РХД”, 2011. 304 с.
9. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Избранные задачи механики систем с сухим трением. М.: Физматлит, 2013. 200 с.
10. Иванов А.П. Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ. 2007. Т. 71. № 3. С. 427–438.
11. Иванов А.П. Об экстремальном свойстве реакций связей // ПММ. 2012. Т. 76. № 2. С. 197–213.
12. Иванов А.П. О равновесии систем с сухим трением // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 317–333.
13. Иванов А.П. О равновесии “балансирующих камней” // ПММ. 2018. Т. 82. № 5. С. 592–598.
<https://doi.org/10.31857/S003282350002265-1>
14. Genda A., Stepan G. On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope // Acta Mechanica. 2023. V. 234. P. 3009–3018.
<https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
15. Буров А.А., Никонов В.И. О равновесиях тяжелого обруча, подвешенного на гвозде // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 1. С. 185–196.
<https://doi.org/10.31857/S1026351924010109>
16. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс (Библиотека “Квант”. Вып. 61.). М.: Наука, 1987. 160 с.
17. Яглом И.М. Генетика популяций и геометрия // Квант. 1986. № 4. С. 5–11.
18. Фирстов В.Е., Фирстов В.В. Архимедова концепция барицентра и количественный анализ живописных образов с помощью ИКТ BARYCOLOR // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 11. № 1. С. 410–420.
19. Farouki R.T. The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective // Comput. Aided Geom. Des. 2012. V. 29. № 6. P. 379–419.
<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2012.03.001>
20. Hormann K., Sukumar N. Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics. New York: CRC Press, 2017. 338 p.
21. Makhtudov K., Mitani Y., Kusuda T. Interpolation of climatic parameters by using barycentric coordinates // World J. Environ. Eng. 2015. V. 3. № 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.12691/wjee-3-1-1>
22. Никонов В.И. Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Вестник Московского университета. Серия I: Математика. Механика. 2014. Т. 69. № 2. С. 45–51.
23. Jakubiak J. On barycentric coordinates in control of a thruster driven spacecraft // Proceedings of 13th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing (CONTROLO). Ponta Delgada, Azores, Portugal: IEEE, 2018. P. 165–170.
<https://doi.org/10.1109/CONTROLO.2018.8516405>
24. Буров А.А., Муницина М.А., Никонова Е.А., Шалимова Е.С. Избранное из механики систем с трением: задачи Рауса. М.: ИП Воронцов М.Ю., 2024. 112 с.
25. Никонов В.И. Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 334–343.

26. *Schleicher D.* John Conway: The man who played mathematics // *Math. Intel.* 2021. V. 43. P. 79–91.
<https://doi.org/10.1007/s00283-021-10123-4>
27. *Gardner M.* The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" // *Scientific American*. 1970. V. 223. P. 120–123.
28. *Capitán F.J.G.* Barycentric Coordinates // *Int. J. Comput. Discovered Math.* 2015. P. 32–48.
29. *Burov A.A.* On particularities of the realization of unilateral constraints with piecewise smooth boundaries // *Russ. J. Nonlinear Dynamics*. 2024. V. 20. № 4. P. 481–491.
<https://doi.org/10.20537/nd241201>

BARYCENTRIC COORDINATES IN THE EQUILIBRIUM PROBLEM OF A HEAVY ROUGH TRIANGLE SUSPENDED ON A PIN

E. A. Nikonova^{a, *}

^a*FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

A planar equilibrium problem of a heavy homogeneous thin wire triangle suspended on a thin horizontal nail is considered. The existence of equilibrium positions and their dependence on the coefficient of friction and the lengths of the sides of the triangle are studied under the assumption of the presence of a dry friction force acting between the triangle and the nail. The problem is solved in barycentric coordinates associated with the vertex system of the triangle in question. The equilibrium condition is written in a form that allows a cyclic shift of the indices of the quantities included in it to obtain an equilibrium condition for any of the sides of the triangle with which it contacts the nail.

Keywords: equilibria of a heavy solid, dry friction, friction cone

REFERENCES

1. *Phear J.B.* Elementary Mechanics. Cambridge: MacMillan. 1850. 252 p.
2. *Walton W.A.* Collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics. 2nd ed. Cambridge: Deighton, Bell, and Co. 1855. 470 p.
3. *Appell P.* Traité de Mécanique Rationnelle. Tome I. Paris: Gauthier-Villars, 1893. 560 p. [*Appell P.* Theoretical Mechanics, V. 1: Statics. Dynamics Points. Moscow: Fizmatlit, 1960. 516 p. (in Russian)].
4. *Wittenbauer F.* Aufgaben aus der Technischen Mechanik. Berlin: Springer. 1907. 392 p.
5. *Routh E.J.* A Treatise on Analytical Statics, with Numerous Examples. 2nd ed. Cambridge University Press, 1909. 392 p.
6. *Bukhholts N.N., Voronkov I.M., Minakov A.P.* Collection of problems in theoretical mechanics. 3rd ed. M.—L.: GITTL. 1949. 276 p. (in Russian).
7. *Rosenblat G.M.* Dry friction in problems and solutions. Moscow—Izhevsk: Publishing house "RCD", 2009. 52 p. (in Russian).

8. *Ivanov A.P.*, Fundamentals of the Theory of Systems with Friction. Moscow–Izhevsk: Publishing house “RCD”, 2011. 304 p. (in Russian).
9. *Sumbatov A.S., Yunin Ye.K.* Selected Problems in the mechanics of systems with dry friction. M.: Fizmatlit, 2013. 200 p. (in Russian).
10. *Ivanov A.P.* The stability of equilibrium in systems with friction // Journal of applied mathematics and mechanics. 2007. V. 71. № 3. P. 385–395.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.07.010>
11. *Ivanov A.P.* Extremum property of constraint reactions // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76. № 2. P. 142–153.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.003>
12. *Ivanov A.P.* The equilibrium of systems with dry friction // J. Appl. Math. Mech. 2015. V. 79. № 3. P. 217–228.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.09.002>
13. *Ivanov A.P.* On the equilibrium of magic stones // Mech. Solids. 2018. V. 53. № S(2). P. 26–31.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418050084>
14. *Genda A., Stepan G.* On the stability of bodies suspended asymmetrically with an inelastic rope // Acta Mechanica. 2023. V. 234. P. 3009–3018.
<https://doi.org/10.1007/s00707-023-03546-x>
15. *Burov A.A., Nikonov V.I.* On the equilibria of a heavy hoop suspended on a nail // Mech. Solids. 2024. V. 59. № 1. P. 11–19.
<https://doi.org/10.1134/S0025654423601106>
16. *Balk M.B., Boltyanskii V.G.* Geometry of Masses. M.: Nauka, 1987. 160 p. (in Russian).
17. *Yaglom, I.M.* Population genetics and Geometry. M.: Kvant. 1986. № 4. P. 5–11 (in Russian).
18. *Firstov V.E., Firstov V.V.* Archimedova the concept of the barycenter and the quantitative analysis of pictorial images using IKT “BARYCOLOR” // Modern information technologies and IT education. 2015. V. 11. № 1. P. 410–420 (in Russian).
19. *Farouki R.T.* The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective // Computer Aided Geometric Design. 2012. V. 29. № 6. P. 379–419.
<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2012.03.001>
20. *Hormann K., Sukumar N.* Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics. New York: CRC Press. 2017. 338 p.
21. *Makhmudov K., Mitani Y., Kusuda T.* Interpolation of climatic parameters by using barycentric coordinates // World Journal of Environmental Engineering. 2015. V. 3. № 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.12691/wjee-3-1-1>
22. *Nikonov V.I.* Relative equilibria in the motion of a triangle and a point under mutual attraction // Moscow University Mechanics Bulletin. 2014. V. 69. № 2. P. 44–50.
<https://doi.org/10.3103/S0027133014020034>
23. *Jakubiak J.* On barycentric coordinates in control of a thruster driven spacecraft // Proceedings of 13th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing (CONTROLO). Ponta Delgada, Azores, Portugal: IEEE. 2018. P. 165–170.
<https://doi.org/10.1109/CONTROLO.2018.8516405>
24. *Burov A.A., Munitsyna M.A., Nikonova E.A., Shalimova E.S.* Selected problems of mechanical systems with friction: Routh problems. M.: IP Vorontsov M.Y. 2024. 112 p.

-
25. *Nikonov V.I.* The existence and stability of steady configurations in the problem of the motion of a wire triangle and a point mass under the mutual attraction // J. Appl. Math. Mech. 2015. V. 79. № 3. P. 229–236.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.09.003>
 26. *Schleicher D.* John Conway: The Man Who Played Mathematics // Math. Intel. 2021. V. 43. P. 79–91.
<https://doi.org/10.1007/s00283-021-10123-4>
 27. *Gardner M.* The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" // Scientific American. 1970. V. 223. P. 120–123.
<https://doi.org/10.1038/scientificamerican1070-120>
 28. *Capitán F.J.G.* Barycentric Coordinates // Int. J. Comput. Discovered Math. 2015. P. 32–48.
 29. *Burov A.A.* On Particularities of the realization of unilateral constraints with piecewise smooth boundaries // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. V. 20. № 4. P. 481–491.
<https://doi.org/10.20537/nd241201>