

УДК 539.3

## ЭВОЛЮЦИЯ ОБЛАСТЕЙ ОБРАТИМОГО И НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ В ПОЛОМ ШАРЕ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ ПРИ ЕГО НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ

© 2025 г. Д. А. Чернышов<sup>a</sup>, \*, А. В. Ковалев<sup>a</sup>, \*\*

<sup>a</sup>Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

\*E-mail: chernyshov.danil@gmail.com, \*\*e-mail: kav-mail@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2024 г.

После доработки 23.11.2024 г.

Принята к публикации 14.12.2024 г.

Рассматривается модель сплошной среды Ивлева–Спорыхина (модель упрочняющегося упруговязкопластического тела), учитывающая как обратимые, так и необратимые деформации с целью исследования эволюционных процессов в полом шаре, находящемся под действием нестационарного температурного поля. В ходе решения поставленной задачи получено аналитическое выражение для распределения температуры в теле, построено обобщенное дерево эволюции областей упругости, пластического течения, разгрузки и повторной пластичности, а также построены выражения для радиальной компоненты напряжений и перемещений в данных областях. Выполнено сравнение четырех реологических моделей, учитывающих различные реологические свойства среды.

**Ключевые слова:** температурные напряжения, обратимые и необратимые деформации, упругость, пластичность, вязкость, упрочнение, полый шар

**DOI:** 10.31857/S1026351925030065, **EDN:** AZVSTM

**1. Введение.** Исследования в области механики материалов [1–4] показывают, что поведение твердых тел в процессе деформирования значительно зависит от условий, в которых они находятся. Понимание процессов обратимого и необратимого деформирования используемых в строительстве [6], аэрокосмической отрасли [7] и биомедицине [8] шаров, в том числе полых, критически важно для оценки их долговечности и надежности, поскольку напряженно-деформированное состояние данных объектов при нагреве может сильно варьироваться.

Неравномерный нагрев приводит к возникновению в теле температурных градиентов [5] и, соответственно, к механическим напряжениям. Поэтому важно выяснить, как развиваются области деформирования и какие факторы на это влияют.

В статье рассматривается влияние изменения температуры на напряженно-деформированное состояние полого шара с учетом сложной реологии (в том числе механизмов вязкого деформирования и упрочнения). Кроме

того, выведены основные закономерности, что в дальнейшем поможет лучше понять поведение подобного класса структур при изменении температурных условий и разработать методы для их эффективного анализа.

**2. Постановка задачи.** Полый шар, радиусы внутренней и внешней поверхности которого равны соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , в начальный момент времени  $t = 0$  имеет равномерно распределенную температуру  $T_0$ . Внешняя поверхность шара подвержена нестационарному тепловому воздействию по закону:

$$\frac{T(R_2, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt},$$

где  $T(r, t)$  – распределение температуры,  $r$  – пространственная координата точки,  $x$  – скорость нагрева,  $T_0$  – начальная температура тела,  $T_m$  – максимальная температура нагрева.

Внешняя и внутренняя поверхности шара свободны от усилий. Массовые силы также отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела в процессе его нагрева.

Постановки задачи, аналогичные представленной, приведены в работе [9] для упругопластического материала и в работе [10] для сплошного шара.

**3. Решение задачи.** Процесс решения поставленной задачи разделяется на два последовательных этапа: решение задачи нестационарной теплопроводности и непосредственное определение напряженно-деформированного состояния.

*3.1. Задача теплопроводности.* Нестационарное уравнение теплопроводности [11] вместе с начальными и граничными условиями в сферической системе координат записывается в виде:

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \hat{\vartheta} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \quad (3.1)$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad (3.2)$$

$$\frac{T(R_2, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}, \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\hat{\vartheta}$  – коэффициент температуропроводности.

Граничное условие (3.4) является условие теплоизоляции внутренней поверхности шара.

Введем в соотношениях начально-краевой задачи (3.1)–(3.4) подстановку:

$$\tau(r, t) = r \cdot \frac{T(r, t) - T_0}{T_m - T_0} \quad (3.5)$$

и перейдем к безразмерным координатам:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau(\xi, t)}{\partial t} &= 9 \left( \frac{2}{\xi} \frac{\partial \tau(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \tau(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right), \\
\tau(r, 0) &= 0, \\
\tau(1, t) &= R_2 \left( 1 - e^{-xt} \right), \\
\left[ \frac{\partial \tau(\xi, t)}{\partial \xi} - h \tau(\xi, t) \right]_{\xi=0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь  $\xi = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$  – безразмерная координата,  $9 = 9/(R_2 - R_1)^2$  – приведенный коэффициент температуропроводности,  $h = (R_2 - R_1)/R_1$ .

Следуя [11], выпишем решение задачи (3.6):

$$\begin{aligned}
\tau(\xi, t) &= \left[ \xi \cdot (R_2 - R_1) + R_1 \right] \cdot \left( 1 - e^{-xt} \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_2}{\sin(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n \cos(\mu_n \xi) + h \sin(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 + h^2 + h} \cdot \frac{x}{9\mu_n^2 - x} \cdot \left[ e^{-9\mu_n^2 t} - e^{-xt} \right],
\end{aligned}$$

где  $\mu_n$  – корни уравнения  $\tan(\mu_n) + \mu_n/h = 0$ .

Тогда окончательное выражение для безразмерной температуры примет вид:

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, t) &= \frac{T(r, t) - T}{T_m - T} = \left( 1 - e^{-xt} \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_2}{\sin(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n \cos(\mu_n \xi) + h \sin(\mu_n \xi)}{\left( \mu_n^2 + h^2 + h \right) \left[ \xi (R_2 - R_1) + R_1 \right]} \cdot \frac{x}{9\mu_n^2 - x} \cdot \left[ e^{-9\mu_n^2 t} - e^{-xt} \right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

*3.2. Напряженно-деформированное состояние.* Поскольку имеет место случай сферической симметрии, все величины в направлениях  $\phi$  и  $\theta$  принимаются попарно равными, а частные производные любой функции по направлениям  $\phi$  и  $\theta$  обращаются в нуль. Ниже приведем полную систему уравнений задачи механики деформируемого твердого тела для рассматриваемой модели среды.

Уравнение равновесия сводится к виду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_{\phi}) = 0, \tag{3.8}$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\phi}$  – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений.

Условие пластичности для модели среды Ивлева–Спорыхина [12] имеет форму:

$$\left( S_r - c e_r^p - \eta \dot{e}_r^p \right)^2 + 2 \left( S_{\phi} - c e_{\phi}^p - \eta \dot{e}_{\phi}^p \right)^2 = 2 \tilde{k}^2(r, t), \tag{3.9}$$

где  $S_r, S_\varphi$  – радиальная и окружная компоненты девиатора тензора напряжений,  $e_r^p, e_\varphi^p$  – радиальная и окружная компоненты тензора пластических деформаций,  $c$  – коэффициент упрочнения,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\tilde{k}(r, t)$  – предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения, описывающий приращения пластических деформаций:

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{4}{3} d\psi \left( \sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p) \right), \\ de_\varphi^p &= -\frac{2}{3} d\psi \left( \sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\psi$  – скалярный положительный множитель. Из следует пластическая несжимаемость материала:

$$de_r^p + 2de_\varphi^p = 0. \quad (3.11)$$

Следуя [9], примем, что  $de_{ij}^p = e_{ij}^p - \check{e}_{ij}^p$ , где  $\check{e}_{ij}^p$  – пластические деформации в предыдущий момент времени  $t - dt$ , а в начальный момент  $\check{e}_{ij}^p = 0$  (тело находится в упругом состоянии). Тогда примет вид:

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0. \quad (3.12)$$

Преобразовывая (3.9) с учетом (3.12), получим:

$$[(\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)]^2 = 3\tilde{k}^2(r, t).$$

После замены  $\tilde{k}(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}}k(r, t)$  условие пластичности запишется в форме:

$$[(\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)] = 2k(r, t). \quad (3.13)$$

Как и в работе [9], рассматривается линейно зависящий от температуры предел текучести материала  $k(r, t) = k_0(1 - \nu\Delta(r, t))$ , где  $k_0$  – предел текучести при начальной температуре,  $\nu$  – параметр материала,  $\Delta(r, t) = \alpha(T(r, t) - T_0)$ ,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

Закон Дюамеля–Неймана имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $e_r^e, e_\varphi^e$  – радиальная и окружная компоненты тензора упругих деформаций.

Уравнения для полных деформаций и соотношения Коши записываются в форме:

$$\begin{aligned} e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r,r}, \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p &= e_\varphi = u_r/r, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $e_r, e_\varphi$  – радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций.

Дополняя систему уравнений (3.8), (3.12), (3.13)–(3.15) условиями свободных от усилий поверхностей шара  $\sigma_r(R_1, t) = \sigma_r(R_2, t) = 0$ , получим полную систему уравнений.

Как и в работе [10], отыскание неизвестных величин будем проводить в форме:

$$F(r, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} F^{[n, j]}(r) e^{-h^{[n, j]} t}, \quad (3.16)$$

где  $h^{[n, j]}$  – коэффициенты, определяемые соотношением:

$$h^{[n, j]} = \begin{cases} 9 \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 & \text{при } j = 1, \\ x & \text{при } j = 2. \end{cases}$$

Тогда система уравнений (3.8), (3.12), (3.13)–(3.15) примет следующий вид (для удобства индексы  $[n, j]$  опущены):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\phi) &= 0, \\ \left| (\sigma_r - (c - \eta h) e_r^p) - (\sigma_\phi - (c - \eta h) e_\phi^p) \right| &= 2k(r), \\ e_r^p + 2e_\phi^p &= 0, \\ \sigma_r &= \lambda (e_r^e + 2e_\phi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r), \\ \sigma_\phi &= \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\phi^e) + 2\mu e_\phi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r), \\ e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r, r}, \\ e_\phi^e + e_\phi^p &= e_\theta^e + e_\theta^p = e_\phi = e_\theta = \frac{u_r}{r}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Нетрудно видеть, что получаемые в ходе решения задачи выражения для напряжений, деформаций и перемещений имеют вид, аналогичный приведенному в работе [10] для случая сплошного шара, с точностью до границ и констант интегрирования.

В общем случае (когда нагрев происходит не только на внешней, но и на внутренней поверхности шара) в зависимости от свойств материала и скорости изменения температуры возможны различные варианты возникновения, развития и вырождения областей с отличающимися реологическими свойствами. На рис. 1 представлено дерево эволюции указанных зон, для которого приняты следующие обозначения:

- $E$  – упругая область;
- $P$  – области пластического течения;
- $U$  – зоны разгрузки;
- $R$  – области повторного пластического течения;
- желтая сплошная линия с кружками на концах – возникновение области пластического течения;
- зеленая пунктирная линия с кружками на концах – возникновение зоны разгрузки;

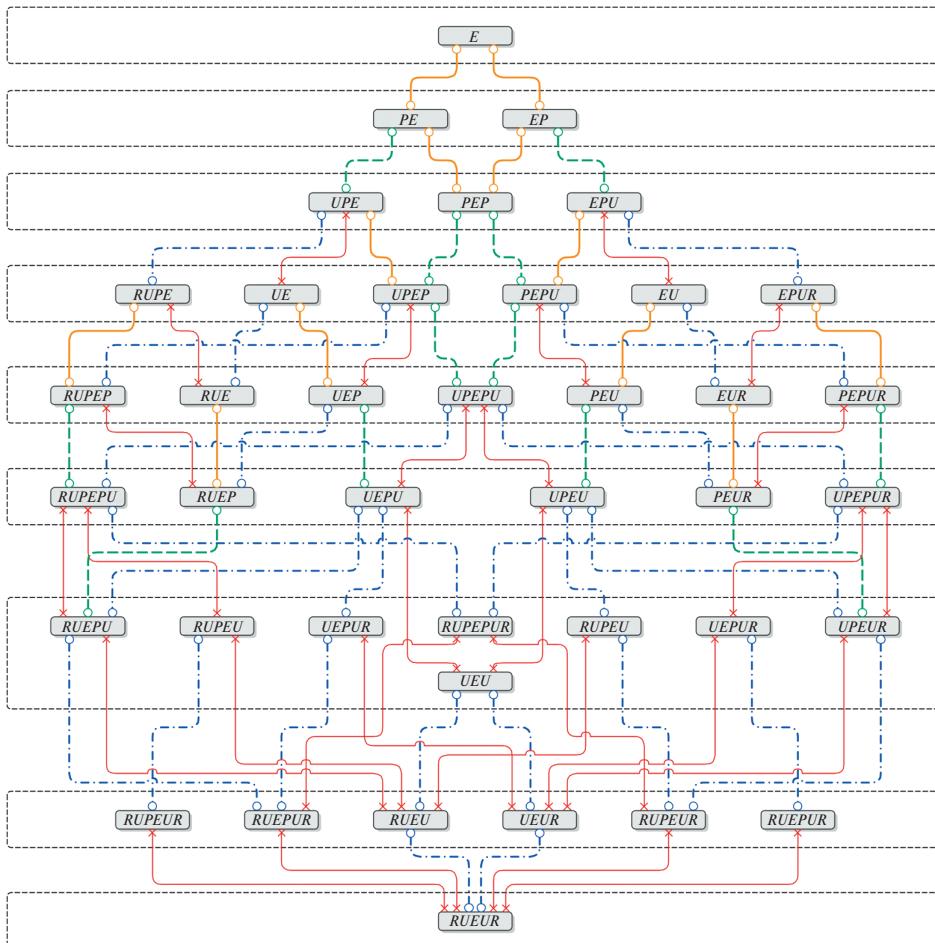


Рис. 1. Дерево эволюции зон с различающимися реологическими свойствами,  $E$  – упругая область,  $P$  – области пластического течения,  $U$  – зоны разгрузки,  $R$  – области повторного пластического течения.

- синяя штрихпунктирная линия с кружками на концах – возникновение области повторного пластического течения;
- красная сплошная линия с крестиками на концах – вырождение области пластического течения.

Стоит заметить, что последовательность развития зон с различными реологическими свойствами отдельно во внутренней и внешней части шара однозначна: сперва возникает область пластического течения, затем – зона разгрузки, после – область повторного пластического течения. Существенную сложность в анализ напряженно-деформированного состояния тела вносят отсутствие явной согласованности процессов во внешней и внутренней частях.

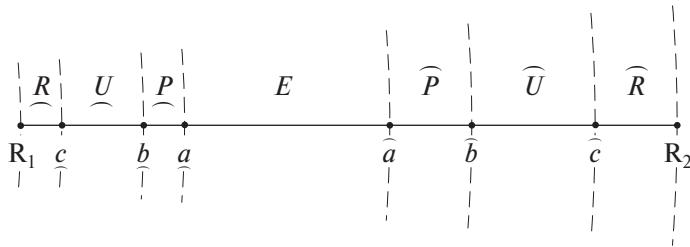


Рис. 2. Расположение областей с различающейся реологией и упругопластических границ при существовании всех семи зон.

Приведем для каждой области выражения для радиальной компоненты напряжений, пластических деформаций, перемещений и их констант интегрирования в общем виде, когда в теле присутствуют все 7 зон (см. рис. 2):

- упругая область:

$$\sigma_r = -\frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_e + \frac{B_e}{r^3},$$

$$u_r = \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_e}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_e}{4\mu r^2},$$

$$A_e = -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=4}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_b^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} +$$

$$+ K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=4}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_c^b \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \right.$$

$$\left. + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} +$$

$$+ 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1, 4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(3, i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(3,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} - \right. \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left. \sum_{j=1}^{\min(3,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
B_e & = K R_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\frac{c}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\frac{\hat{b}}{\rho}}^{\frac{\hat{a}}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{\hat{c}}{\rho}}^{\frac{R_2}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - \right. \\
& \quad \left. - H \cdot \left[ \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{b}{\rho}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\frac{\hat{b}}{\rho}}^{\frac{\hat{c}}{\rho}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\
& + K R_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\};
\end{aligned}$$

- внешняя область пластического течения:

$$\sigma_r = -4K_0 \int_{\hat{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \hat{A}_p + \frac{\hat{B}_p}{r^3},$$

$$e_r^p = -\frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\hat{B}_p}{Hr^3},$$

$$\begin{aligned}
u_r & = \frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \int_{\hat{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\hat{A}_p}{3\lambda + 2\mu} - \\
& \quad - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \frac{\hat{B}_p}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_p & = -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=5}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\frac{c}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& \quad + \left. \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\frac{\hat{b}}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{\frac{R_2}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\
& \quad + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=5}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{b}{\rho}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \Big\} + \\
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1, 5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(4, i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1, 5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(4, i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1, 5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(4, i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \times \right. \\
& \left. \times \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho,
\end{aligned}$$

- внутренняя область пластического течения:

$$\sigma_r = -4K_0 \cdot \int_{\underline{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \cdot \int_{\underline{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \underline{A}_p + \frac{\underline{B}_p}{r^3},$$

$$e_r^p = -\frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \cdot \int_{\underline{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\underline{B}_p}{Hr^3},$$

$$\begin{aligned}
u_r = & \frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \int_{\underline{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \times \\
& \times \int_{\underline{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\underline{A}_p}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \frac{\underline{B}_p}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{A}_p = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=3}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^{\underline{a}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\underline{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\
& + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=3}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \right. \\
& \left. + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
B_p & = K R_2^3 \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^{\underline{a}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\underline{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - \right. \\
& - H \left[ \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\bar{b}}^{\underline{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] + K R_2^3 \left\{ 2H \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^{\underline{a}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_{\underline{a}}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \right. \\
& \quad \left. \left. - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^{\underline{a}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\};
\end{aligned}$$

- внешняя зона разгрузки:

$$\sigma_r = 2\omega \int_{\bar{b}}^r \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_{\bar{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \hat{A}_u + \frac{\hat{B}_u}{r^3},$$

$$u_r = \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\bar{b}}^r \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_{\bar{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\hat{A}_u}{3\lambda + 2\mu} - \frac{\hat{B}_u}{4\mu r^2},$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_u & = -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=6}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^{\underline{a}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^5 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{\underline{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\
& + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=6}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^5 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \int_{\bar{b}}^{\underline{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - \right. \\
& \left. - \left[ R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
\hat{B}_u & = K R_2^3 \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\underline{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - \right. \\
& - H \left[ \int_{\underline{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] + K R_2^3 \left\{ 2H \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_{a}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \right. \\
& \left. - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} - 4\omega \int_{a}^{\hat{b}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho;
\end{aligned}$$

- внутренняя зона разгрузки:

$$\sigma_r = 2\omega \cdot \int_{\underline{b}}^r \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_{\underline{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_u + \frac{B_u}{r^3},$$

$$u_r = \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\underline{b}}^r \frac{e_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_{\underline{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_u}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_u}{4\mu r^2},$$

$$\begin{aligned}
A_u & = -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=2}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& + \left. \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{\underline{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\
& + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=2}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\underline{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \int_{\hat{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - \right. \right. \\
& \left. \left. - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
B_u & = KR_2^3 \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\frac{c}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\frac{a}{\rho}}^{\frac{b}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{c}{\rho}}^{\frac{R_2}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - \right. \\
& \left. - H \left[ \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{b}{\rho}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{c}{\rho}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + KR_2^3 \left\{ 2H \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \right. \\
& \left. - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} + 4\omega \int_b^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho;
\end{aligned}$$

- внешняя область повторного пластического течения:

$$\begin{aligned}
\sigma_r & = 4K_0 \int_{\hat{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \hat{A}_r + \frac{\hat{B}_r}{r^3}, \\
e_r^p & = \frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\hat{B}_r}{Hr^3}, \\
u_r & = -\frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \int_{\hat{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \times \\
& \times \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\hat{A}_r}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \frac{\hat{B}_r}{r^2}, \\
\hat{A}_r & = -\Lambda \left\{ [H - 2\omega] \left[ \int_{R_1}^{\frac{c}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{b}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& \left. + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{\frac{a}{\rho}}^{\frac{b}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\frac{c}{\rho}}^{\frac{R_2}{\rho}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \left\{ \left[ H - 2\omega \right] \int_{\underline{c}}^b \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \sum_{j=0}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right] \int_{\underline{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right. \right. - \\
& \left. \left. - \left[ R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
\hat{B}_r & = KR_2^3 \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - \right. \\
& \left. - H \left[ \int_{\underline{c}}^b \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + KR_2^3 \left\{ 2H \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \right. \\
& \left. - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} - 4\omega \int_a^{\hat{c}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho;
\end{aligned}$$

- внутренняя область повторного пластического течения:

$$\sigma_r = 4K_0 \int_{\underline{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_r + \frac{B_r}{r^3},$$

$$e_r^p = \frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3B_r}{Hr^3},$$

$$\begin{aligned}
u_r & = -\frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \int_{\underline{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \times \\
& \times \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{rA_r}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \frac{B_r}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_r = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=1}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_b^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\
& + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left[ H - 2\omega \right] \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \left. \right\} + \\
& + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \sum_{j=1}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\underline{c}}^b \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left[ H - 2\omega \right] \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\
& + 4\omega K \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\
& + M \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right. \right. - \\
& \left. \left. - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \frac{2KH + M}{R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\
\mathcal{B}_r = & KR_2^3 \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_b^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right. \\
& - H \left[ \int_{\underline{c}}^b \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \left. \right\} + KR_2^3 \left\{ 2H \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] \right. \\
& \left. - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} + 4\omega \int_{\underline{c}}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Здесь  $e_r^p$  — остаточные деформации,  $a$  — граница между упругой областью и областью пластического течения;  $b$  — граница между областью пластического течения и зоной разгрузки,  $c$  — граница между зоной разгрузки и областью повторного пластического течения. Верхней ( $\hat{a}, b, \hat{c}$ ) и нижней ( $\underline{a}, b, \underline{c}$ ) дугам обозначена принадлежность границ к внешней и внутренней частям шара соответственно. Кроме того,  $\gamma = [R_1 \ \underline{c} \ b \ \underline{a} \ \hat{a} \ b \ \hat{c} \ R_2]$  — обобщенный вектор упругопластических границ, содержащей также радиусы внутренней и внешней поверхностей (индексация ведется с нуля).

В выражениях — дополнительно были использованы следующие замены:

$$\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad H = 3c + 2\omega - 3\eta \cdot h, \quad K_0 = \frac{2\omega}{H}, \quad K = \frac{2\omega}{\Xi}, \quad \Lambda = \frac{4K}{H}, \quad M = 2\omega^2 \Lambda,$$

$$\Xi = H \left[ 1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right] + 2\omega \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{c} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{b} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{a} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{\bar{a}} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{\bar{b}} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{\bar{c}} \right)^3 - 1 \right].$$

Возникновение зон разгрузки связано с выравниванием температурного градиента на поверхности шара и является следствием ассоциированного закона пластического течения, согласно которому скорость пластических деформаций не может быть отрицательна. Причем в областях  $\hat{b} \leq r \leq \hat{a}$  и  $\hat{a} \leq r \leq \hat{b}$  продолжает происходить рост пластических деформаций, а в областях  $r \leq \hat{b}$  и  $\hat{b} \leq r$  уровень накопленных деформаций фиксируется и остается  $\hat{e}_r^p(r)$ . Таким образом, задача вычисления уровня накопленных деформаций соответствует поиску огибающей семейства пластических деформаций с параметром  $t$ .

Положение упругопластических границ определяется согласно следующим условиям:

- равенство нулю пластических деформаций на границах  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}$ ;
- равенство нулю скорости пластических деформаций на границах  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}$ ;
- равенство пластических деформаций на границах  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}$  и остаточных деформаций на этих границах.

Через  $t_p, \hat{t}_p$  обозначим моменты возникновения областей пластического течения, через  $t_u, \hat{t}_u$  — моменты возникновения зон разгрузки, через  $t_x, \hat{t}_x$  — моменты возникновения областей пластического течения,  $t_k, \hat{t}_k$  — моменты вырождения областей пластического течения. Верхние и нижние дуги, как и для упругопластических границ, обозначают принадлежность внешней и внутренней части шара соответственно.

В моменты времени  $t_k$  границы зон разгрузки “догоняют” границы областей пластического течения и достигают своего предельного положения  $a(t_k) = b(t_k) = \hat{b}'$  и  $\hat{a}(\hat{t}_k) = \hat{b}(\hat{t}_k) = \hat{b}'$ . Вырождение областей пластического течения может произойти как до, так и после возникновения областей повторного пластического течения в зависимости от свойств материала и параметров нагрева.

Алгоритм, позволяющий определить последовательность процессов при эволюции областей обратимого и необратимого деформирования, можно записать в следующем виде:

1. Пусть тело в текущий момент времени тело находится в состоянии  $P_i$  (например,  $E$ ) согласно рис. 1.

2. На следующем этапе тело может перейти из состояния  $P_i$  в любое из его дочерних состояний  $S_{ij}$  (для  $P_0 = E$  возможен переход в состояния  $S_{01} = PE$  и  $S_{02} = PE$ ). Поэтому для каждого из состояний  $S_{ij}$  определяется момент времени  $t_{ij}$  (например,  $t_{01} = 12$  с и  $t_{02} = 12$  с), в который данное состояние наступит (т.е. выполнится соответствующее ему условие на поверхности).

3. Из всех возможных  $S_{ij}$  реализуется то  $S'_i$ , для которого  $t'_i$  является наименьшим из  $t_{ij}$  (т.е. из  $S_{01} = PE$  и  $S_{02} = EP$  реализуется  $S'_i = EP$ , поскольку  $t_{02} < t_{01}$ ).

4. Реализованное состояние  $S'_i$  становится  $P_{i+1}$ , и процесс повторяется, начиная с шага 1.

После полного нагрева до температуры  $T_m$  в момент времени .. (общий для всего тела) температурный градиент в теле становится равным нулю, процесс деформирования завершается, а упругопластические границы  $\underline{c}$  и  $\bar{c}$  достигают своих предельных положений  $\underline{c}'$  и  $\bar{c}'$  соответственно. При этом в областях  $R_1 \leq r \leq \underline{c}'$  и  $\bar{c}' \leq r \leq R_1$  фиксируется уровень накопленных деформаций  $\tilde{e}_r^p$ .

Для простоты дальнейших записей введем обобщенную функцию остаточных деформаций:

$$\bar{e}_r^p(r) = \begin{cases} \tilde{e}_r^p(r), & R_1 \leq r \leq \underline{c}', \\ \hat{e}_r^p(r), & \underline{c}' < r \leq \underline{b}', \\ 0, & \underline{b}' < r < \bar{b}', \\ \hat{e}_r^p(r), & \bar{b}' \leq r < \bar{c}', \\ \tilde{e}_r^p(r), & \bar{c}' \leq r \leq R_2. \end{cases}$$

Рассмотрим далее процесс полного остывания тела до начальной температуры, характеризующийся условием снятия температурной нагрузки  $\Delta(r, t) = 0$  и представляющий собой процесс разгрузки материала во всем теле. Выражения для остаточных напряжений и перемещений, строго говоря, известны и совпадают с (3.21) или (3.22) с точностью до нижней границы интегрирования и констант, определяемых из условия свободных внутренней и внешней поверхностей шара:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\omega \left[ \int_{R_1}^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( \frac{R_1^3}{r^3} - 1 \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right], \\ u_r &= \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \left[ \int_{R_1}^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{4\mu} \frac{R_1^3}{r^3} \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**4. Анализ решения.** В первую очередь следует заметить, что решение задачи теплопроводности было получено в предположении, что выполнены все условия применимости формулы Грина [11]. Данный факт связан с непрерывностью решения со своими частными производными первого порядка по пространственной координате в замкнутой области  $r \in [R_1, R_2]$ ,  $t \geq 0$  и непрерывностью частных производных второго порядка в интервале  $r \in [R_1, R_2]$ . Этот вопрос не рассматривается в рамках данной работы. На рис. 3 представлено распределение безразмерной температуры в безразмерных координатах в различные моменты времени.

Предельные переходы к реологическим моделям, не учитывающим вязкость и упрочнение, осуществляются приравниванием нулю коэффициентов  $c$  и  $\eta$  соответственно. Одновременное исключение из рассмотрения вязкости и упрочнения приводит к случаю упругопластического материала, исследование

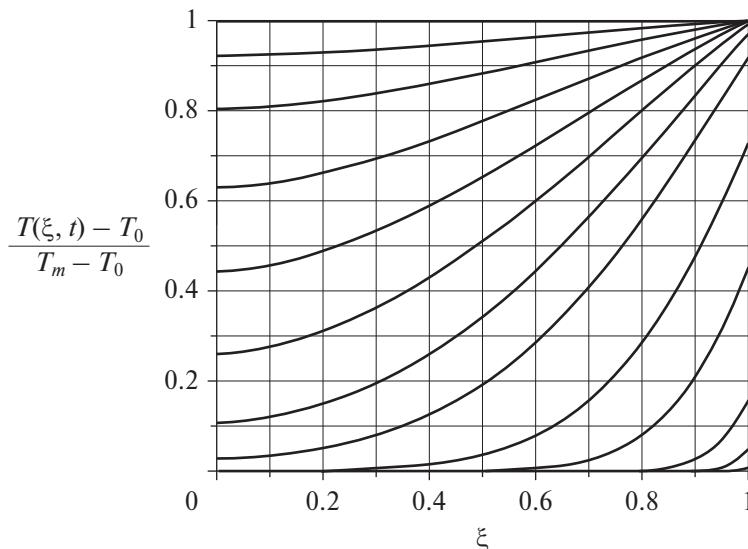


Рис. 3. Распределение безразмерной температуры в теле.

которого проводилось в работе [9]. Заметим также, что рассмотрение приведенных выше соотношений в пределе при  $a = b = c = R_1 \rightarrow 0$  приводит к решению аналогичной задачи о сплошном шаре [10].

Проведем сравнение четырех моделей сред. В дальнейшем для основных величин будем использовать следующие индексы:  $i$  — упругопластический материал,  $c$  — упругопластический материал с упрочнением,  $\eta$  — упруговязкопластический материал без упрочнения,  $c\eta$  — упруговязкопластический материал с упрочнением. В качестве демонстрации рассмотрим тело со следующими свойствами:  $R_1 = 0.025$  м,  $R_2 = 0.225$  м,  $x = 0.1$  с<sup>-1</sup>,  $\vartheta = 1.172 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>,  $\Delta_m = 8.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_0 = 2 \cdot 10^8$  Па,  $\gamma = 70.6$ ,  $\lambda = 9.2 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 4.3 \cdot 10^{10}$  Па,  $c = 0.9 \cdot 10^{11}$  Па,  $\eta = 1.0 \cdot 10^{10}$  Па·с.

В табл. 1 приведены моменты возникновения и вырождения областей при различных наборах реологических свойств, а также процентное изменение временных характеристик при включении в модель дополнительных механизмов деформирования. Как видно из представленных данных, влияние вязких свойств на процесс деформирования незначительно проявляется только на ранних стадиях и практически исчезает с течением времени. В то же время введение упрочнения приводит к значительным количественным изменениям характеристик на протяжении всего процесса и, как следствие, может изменить последовательности событий при его протекании.

Распределение остаточных напряжений в теле приведено на рис. 4. Как было отмечено ранее, влияние вязкости в момент полного нагрева шара и его последующего охлаждения является незначительным. Однако упрочнение приводит к существенному изменению величин напряжений (в рассматриваемом случае — более чем в 2 раза). Стоит также заметить, что характер их

**Таблица 1.** Временные характеристики процесса для различных реологических моделей и относительные величины влияния включения в модель дополнительных свойств

| Момент      | $t, \text{с}$ |        |        |         | $\delta t, \%$ |                |            |             |             |
|-------------|---------------|--------|--------|---------|----------------|----------------|------------|-------------|-------------|
|             | $i$           | $c$    | $\eta$ | $c\eta$ | $c - i$        | $c\eta - \eta$ | $\eta - i$ | $c\eta - c$ | $c\eta - i$ |
| $\hat{t}_p$ | 3.244         | 3.244  | 3.418  | 3.312   | 0.000          | -3.106         | 5.362      | 2.090       | 2.090       |
| $\hat{t}_p$ | 17.188        | 13.816 | 17.276 | 13.873  | -19.62         | -19.70         | 0.513      | 0.410       | -19.29      |
| $\hat{t}_u$ | 18.516        | 18.512 | 18.690 | 18.579  | -0.024         | -0.591         | 0.939      | 0.366       | 0.342       |
| $\hat{t}_u$ | 37.932        | 37.993 | 38.191 | 38.073  | 0.161          | -0.308         | 0.681      | 0.209       | 0.370       |
| $\hat{t}_k$ | 40.239        | 41.754 | 40.396 | 41.820  | 3.764          | 3.525          | 0.391      | 0.159       | 3.929       |
| $\hat{t}_k$ | 43.466        | 43.427 | 43.639 | 43.494  | -0.092         | -0.332         | 0.397      | 0.156       | 0.064       |
| $\hat{t}_r$ | 57.666        | 57.664 | 57.842 | 57.732  | -0.004         | -0.190         | 0.305      | 0.118       | 0.114       |
| $\hat{t}_r$ | 121.81        | 115.89 | 121.96 | 115.95  | -4.858         | -4.925         | 0.127      | 0.057       | -4.804      |

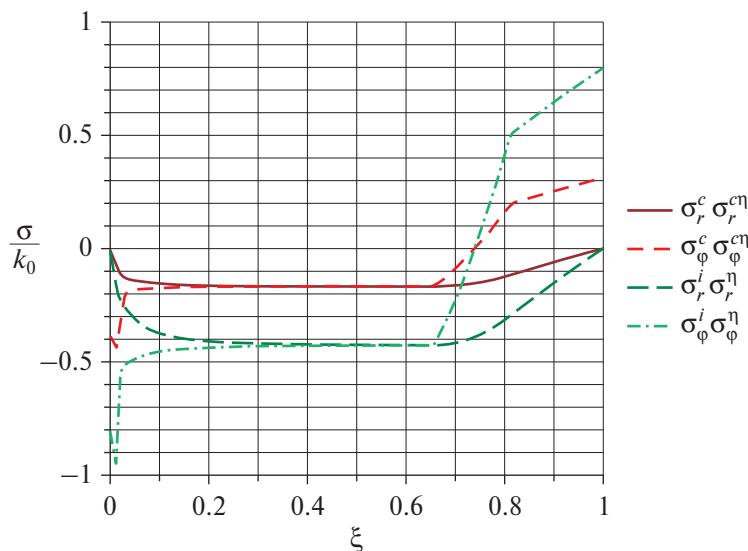


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в теле.

распределения во внешней части шара совпадает с распределением остаточных деформаций в сплошном шаре.

На рис. 5 представлено изменение положения упругопластических границ с течением времени: (а) – для внутренней части шара, (б) – для внешней части шара. Эти результаты подтверждают ранее сделанные наблюдения. Учет вязких деформаций практически не влияет на положение упругопластических границ. В свою очередь, рассмотрение упрочнения материала приводит к увеличению глубины проникания областей пластического и повторного

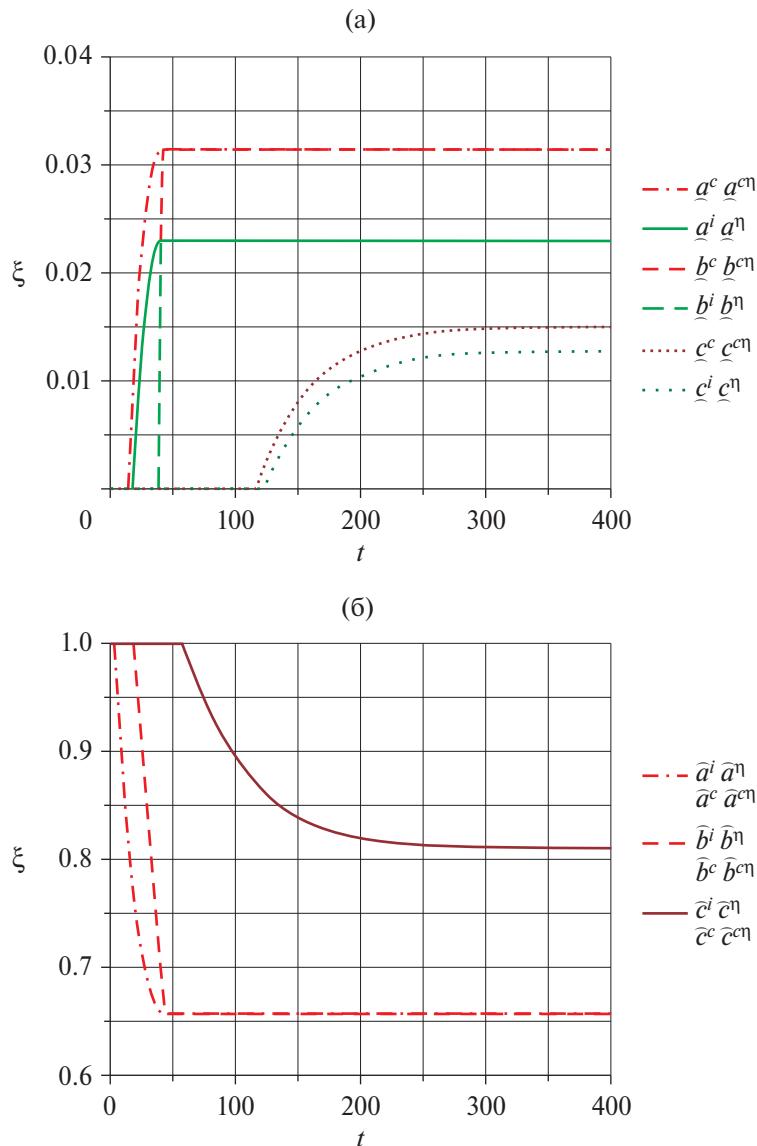


Рис. 5. Положение упругопластических границ

пластического течения в наиболее удаленной от поверхности нагрева части шара. Этот факт полностью согласуется с данными, представленными в табл. 1. Для всех четырех моделей сред возникновение пластических зон на внешней поверхности происходит практически в один и тот же момент. В то же время для моделей, учитывающих упрочнение, условия пластичности на внутренней поверхности выполняются раньше, чем для моделей без упрочнения.

**Заключение.** В рамках исследования было получено полное решение задачи механики деформируемого твердого тела для нагреваемого полого шара с реологическими параметрами, которые придают модели свойства неконсервативности. Были совершены предельные переходы к частным моделям сплошных сред, описывающим упругопластический, упруговязкопластический и упрочняющийся упругопластический материалы. В результате были получены численные характеристики описанного процесса, а также построены графические зависимости для ключевых величин при различных механизмах деформирования.

Анализ решения позволил сформулировать следующие выводы:

1. Влияние вязкости на напряженно-деформированное состояние проявляется только на начальных этапах процесса и быстро ослабевает с течением времени.

2. Включение в модель параметра упрочнения значительно влияет на временные характеристики процесса и уровень напряжений в теле.

3. Добавление механизма упрочнения в упругопластическую модель не влияет на время возникновения первой пластической области, если вязкость материала не рассматривается.

4. Предельные положения упругопластических границ в наиболее удаленной от поверхности нагрева части шара для всех четырех моделей можно считать совпадающими.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
2. *Бернштейн М.Л., Займовский В.А.* Механические свойства металлов. М.: Металлургия, 1979. 495 с.
3. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64. Вып. 5. С. 225–240.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF202315249>
4. *Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Бурууев А.М., Нестеров Т.К., Стадник Н.Э.* Расчет остаточных напряжений в состоянии упругой разгрузки предварительно нагретого неоднородного термоупругопластического материала в условиях торOIDальной симметрии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 105–113.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.011>
5. *Акинлаби Е.Т., Дац Е.П., Махамуд Р.М., Мурашкин Е.В.* Об одном способе расчета температурных напряжений в функционально-градиентном упругопластическом материале // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 50–58.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920060021>
6. Патент № 2010132900, Int. Cl. E04B 5/21 (2006.01). Steel reinforcement structure of bubbledeck slab elements and procedure of manufacturing bubbledeck slab elements: № 2010000002: заявл. 14.05.2010: опубл. 18.11.2010 / Duc Thang // WIPO: World Intellectual Property Organization.
7. URL: <https://patentscope.wipo.int/search/en/detail.jsf?docId=WO2010132900> (дата обращения: 14.10.2024).

8. *Ляев А.* Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
9. *Лычев С.А., Лычева Т.Н., Койфман К.Г.* Нелинейная эволюционная задача для самонапряженных слоистых гиперупругих сферических тел // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 1. С. 43–59.  
<http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.04>
10. *Дац Е.П.* Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры: дис. канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2017. С. 23–48.
11. *Чернышов Д.А., Ковалев А.В.* Термодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 4. С. 70–84.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329922030059>
12. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.
13. *Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ, 1997. 361 с.

**THE EVOLUTION OF REGIONS OF REVERSIBLE AND  
IRREVERSIBLE DEFORMATION WITHIN A HOLLOW SPHERE  
WITH COMPLEX RHEOLOGICAL PROPERTIES  
UNDER CONDITIONS OF UNSTEADY HEATING**

**D. A. Chernyshov<sup>a</sup>, \*, A. V. Kovalev<sup>a</sup>, \*\***

*<sup>a</sup>Voronezh State University, Voronezh, 394018 Russia*

*\*e-mail: chernyshov.danil@gmail.com, \*\*e-mail: kav-mail@mail.ru*

**Abstract** — The Ivlev–Sporykhin continuum model, which is a model of a hardening elastoviscoplastic solid, is considered in this study. The model takes into account both reversible and irreversible deformations to investigate evolutionary processes occurring in a hollow sphere under the influence of a time-dependent temperature field. During the solution of this problem, an analytical expression for the temperature distribution within the body was derived. A generalized tree of evolution of regions of elasticity, plastic flow, unloading, and re-plasticity was also constructed. Expressions for the radial components of stress and displacement in these regions were also developed. Four rheological models were compared, taking into account the various properties of the medium.

**Keywords:** Thermal stress, reversible and irreversible strain, elasticity, plasticity, viscosity, hardening, hollow sphere

**REFERENCES**

1. *Parkus H.* Instationäre Wärmespannungen. Vienna: Springer, 1959.
2. *Bershtain M.L., Zaimovskiy V.A.* Mechanical Properties of Metals. M.: Metallurgiya, 1979.

3. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* Gadolin Problem of Assembling A Prestressed Two-Layer Pipe // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. № 5. P. 929–942.
4. *Dats E.P., Murashkin E.V., Bururuev A.M., Nesterov T.K., Stadnik N.E.* Calculation of Residual Stresses in The State of Elastic Unloading of a Preheated Inhomogeneous Thermoelastoplastic Material Under Conditions of Toroidal Symmetry // *Estrn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. Yakovleva Ser. Mekh. Predeln. Sost.* 2021. № 1. P. 105–113.
5. *Akinlabi E.T., Dats E.P., Mahamood R.M., Murashkin E.V., Shatalov M.Y.* On a Method of Temperature Stresses Computation in a Functionally Graded Elastoplastic Material // *Mech. Solids.* 2020. № 6. P. 800–807.
6. Patent No. 2010132900, Int. Cl. E04B 5/21 (2006.01). Steel reinforcement structure of bubbledeck slab elements and procedure of manufacturing bubbledeck slab elements: No. 2010000002: filed 14.05.2010: published 18.11.2010 / Duc Thang // WIPO : World Intellectual Property Organization.
7. URL: <https://patentscope.wipo.int/search/en/detail.jsf?docId=WO2010132900>
8. *Love A.E.H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: University Press, 1927.
9. *Lychev S.A., Lycheva T.N., Koifman K.G.* The Nonlinear Evolutionary Problem for Self-Stressed Multilayered Hyperelastic Spherical Bodies // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2020. № 1. P. 43–59.
10. *Dats E.P.* Candidate's Dissertation in Physics and Mathematica. (KnAGTU, Komsomolsk-na-Amure, 2017), pp. 23–48.
11. *Chernyshov D.A., Kovalev A.V.* Thermal Deformation of a Body with Complex Rheology under Conditions of Spherical Symmetry // *Mech. Solids.* 2022. № 4. P. 740–753.
12. *Kartashov E.M.* Analytical Methods in Heat Conductivity of Solids. M.: Vysshaya Shkola, 2001 [in Russian].
13. *Sporikhin A.N.* Perturbation Method in Stability Problems for Complex Media. Voronezh: Voronezh. Gos. Univ., 1997 [in Russian].