

УДК 531.383

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ДАТЧИКАМИ УПРАВЛЕНИЯ

© 2025 г. Д. А. Маслов^a, *

^aНациональный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

*E-mail: MaslovDmA@mpei.ru

Поступила в редакцию 11.11.2024 г.

После доработки 26.11.2024 г.

Принята к публикации 26.11.2024 г.

В статье рассматривается нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электромагнитными датчиками управления. Выведена математическая модель, которая во взаимосвязанной форме описывает нелинейные колебания резонатора и электрические процессы контура управления колебаниями. Полученная математическая модель представляет нелинейную систему дифференциальных уравнений, которая содержит сингулярно возмущенные уравнения, причем сингулярно возмущенными являются уравнения электрических процессов. Учитывалась нелинейность, вызванная коначным отношением малого прогиба к малому зазору датчика управления. Предложены способы построения приближенных решений. Показано принципиальное отличие нелинейных слагаемых уравнений динамики резонатора при использовании восьми и шестнадцати датчиков управления. Показано, что при использовании электромагнитных датчиков управления необходимо учитывать малый параметр, сингулярно входящий в дифференциальные уравнения электрических процессов. По оценке угловой скорости дрейфа сделан вывод о неприменимости схемы гироскопа с восьмью электромагнитными датчиками управления из-за полученного значения некомпенсируемой угловой скорости дрейфа. В случае гироскопа с шестнадцатью датчиками управления выведена формула угловой скорости дрейфа, которую можно скомпенсировать, а также предложен способ вычисления смещения резонансного пика амплитудно-частотной характеристики.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, электромагнитные датчики, цилиндрический резонатор, нелинейные дифференциальные уравнения, сингулярно возмущенные уравнения, нелинейные колебания, угловая скорость дрейфа

DOI: 10.31857/S1026351925030057, EDN: AZPYXA

1. Введение. В настоящее время актуальной задачей является повышение точности навигационных приборов, включая волновые твердотельные гироскопы (ВТГ), с помощью построения более точных математических моделей динамики их чувствительных элементов [1–4]. Учет нелинейности колебаний в математических моделях динамики резонаторов ВТГ позволяет не только оценить погрешности и повысить точность прибора методами компенсации, но и исследовать ряд нелинейных эффектов, которые имеют место в динамике резонаторов ВТГ и не могут быть исследованы в рамках линейных математических моделей.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д.М. Климова и В.Ф. Журавлёва [5–12]. В монографии “Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп)” [5] и предшествующих работах [6–9] построена теория идеального гироскопа, обоснован эффект инерции упругих волн колебаний осесимметричного тела, кольцевого и полусферического резонаторов, построены основополагающие математические модели ВТГ, создана теория принципиального функционирования ВТГ и предложен ряд алгоритмов обработки измерений и управления колебаниями резонаторов. В работах [10–12] исследована динамика несовершенного резонатора ВТГ, предложен метод идентификации дефектов резонатора. В работе [13] исследована динамика кольцевого резонатора при произвольно изменяющейся угловой скорости. В работах [5, 9] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем волновым твердотельным гироскопам, а исследование динамики может проводиться в рамках уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. При этом указано, что для исследования нелинейности требуется учет специфики конкретной колебательной системы.

Работы [14–19] посвящены построению и исследованию математических моделей ВТГ, учитывающих нелинейность колебаний, вызванную электростатическими датчиками управления. Показано, что нелинейность является следствием конечного отношения малого прогиба резонатора к малому зазору между резонатором и электродом датчика управления. Обнаружены и исследованы новые эффекты в динамике резонатора ВТГ, вызванные нелинейностью электростатических сил датчиков управления: зависимость угловой скорости дрейфа от квадрата опорного напряжения; влияние нелинейности на амплитуду колебаний. В работе [17] исследовались нелинейные эффекты динамики резонатора ВТГ с учетом сопротивления электрической цепи управления колебаниями. В работе [18] исследовано параметрическое возбуждение колебаний, сопутствующее вынужденным колебаниям. В работе [19] предложены методики идентификации дефектов резонатора, учитывающие нелинейность колебаний резонатора.

В данной статье рассматриваются нелинейные колебания цилиндрического резонатора ВТГ, вызванные электромагнитными датчиками управления, выводится ряд нелинейных математических моделей. Рассматривается ВТГ с электромагнитными датчиками управления, поскольку они имеют преимущества перед ВТГ с электростатическими датчиками по простоте изготовления, надежности, устойчивости к внешним воздействиям. Также они позволяют

сократить время готовности гироскопа к работе и создавать необходимое воздействие на резонатор при больших угловых скоростях, поскольку силы притяжения электромагнитов больше, чем у электростатических датчиков. Таким образом, возможность применения ВТГ с электромагнитными датчиками управления на высокоманевренных объектах в экстремальных условиях эксплуатации делает их перспективными навигационными приборами, однако исследованию динамики ВТГ с электромагнитными датчиками управления посвящено очень мало исследований [20–22]. Выбор металлического цилиндрического резонатора обусловлен выбором электромагнитных датчиков управления, причем данный тип резонаторов широко используется в ВТГ разных типов [23, 24].

В данной работе поставлены следующие две комплексные задачи. Первая задача: вывести нелинейную математическую модель динамики цилиндрического резонатора ВТГ с электромагнитными датчиками управления, которая во взаимосвязанной форме описывает нелинейные колебания резонатора ВТГ и электрические процессы контура управления колебаниями, и построить как можно более точное приближенное решение, которое можно использовать для исследования других, менее точных математических моделей. Для построения приближенного решения выведенной нелинейной математической модели, представляющей из себя задачу Коши для системы дифференциальных уравнений тихоновского типа, будет использоваться метод голоморфной регуляризации тихоновских систем. Метод голоморфной регуляризации является развитием метода регуляризации С.А. Ломова на нелинейные системы дифференциальных уравнений [25–27] и был применен в работе [28] для системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику резонатора ВТГ. Вторая задача: из выведенной наиболее общей исходной математической модели получить приближенные математические модели и исследовать с их помощью нелинейные эффекты динамики резонатора ВТГ: угловую скорость дрейфа и смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. При исследовании нелинейных эффектов будут использоваться схемы ВТГ с восьмью и шестнадцатью датчиками управления, будет показано отличие нелинейных эффектов колебаний резонатора при разном количестве датчиков управления. Таким образом, в настоящей работе будут использоваться, уточняться и обобщаться методы и подходы предшествующих работ по исследованию динамики резонатора ВТГ с шестнадцатью электростатическими датчиками управления [16, 17, 28], а также будет получен комплексный результат исследования нелинейной динамики резонатора ВТГ с восьмью электромагнитными датчиками управления.

2. Исходная математическая модель с учетом нелинейности колебаний, вызванной электромагнитными датчиками управления. Рассмотрим резонатор волнового твердотельного гироскопа (рис. 1), представленный упругой осесимметричной цилиндрической оболочкой 1 толщины h , высоты H и кругового сечения радиуса R . Один край резонатора свободен, а другой жестко прикреплен к основанию 2 (рис. 1а).

Предполагается, что упругие свойства материала резонатора изотропны, инструментальные погрешности изготовления не учитываются. Колебания

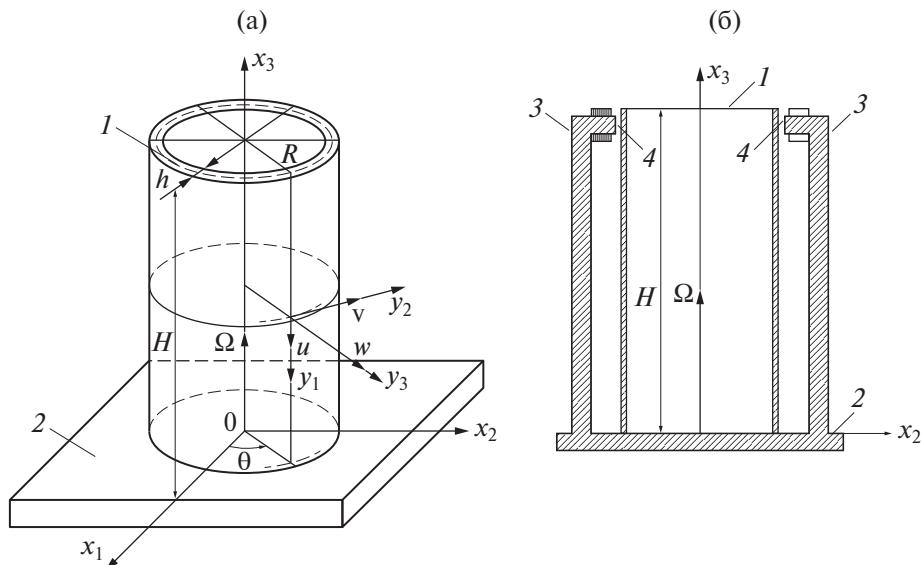


Рис. 1. Расчетная схема волнового твердотельного гироскопа.

резонатора 1 на основании 2 возбуждаются системой из n электромагнитов. Магнитный поток, создаваемый электромагнитом, проходит по магнитопроводу 3, основанию, резонатору и замыкается через зазор 4 (рис. 1б). Резонатор изготавливается из прецизионного железоникелевого сплава элинвара [21], обладающего необходимыми упругими свойствами, имеющего низкий температурный коэффициент линейного расширения и высокую магнитную проницаемость.

Для вывода уравнений движения цилиндрического резонатора составим функцию Лагранжа электромеханической системы [8], включающей, помимо кинетической и потенциальной энергии резонатора, энергию магнитного поля, создаваемого электромагнитными датчиками управления.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Ox_1x_2x_3$. Ось x_3 направим по оси симметрии резонатора (рис. 1). В качестве криволинейных координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей α , $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = H/R$, и угол в окружном направлении θ , который отсчитывается от координатной оси Ox_1 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Введем правый ортогональный трехгранник $y_1y_2y_3$, жестко связанный с срединной поверхностью резонатора. Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности резонатора в осях $y_1y_2y_3$.

Для составления функции Лагранжа запишем сначала кинетическую энергию резонатора. По теореме о сложении скоростей определяем вектор абсолютной скорости произвольной точки срединной поверхности резонатора:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad (2.1)$$

где вектор угловой скорости резонатора $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega, 0, 0)^T$ и радиус вектор $\mathbf{r} = (0, 0, R)^T$ заданы в проекциях на оси $y_1y_2y_3$. В дальнейшем точкой обозначаем

дифференцирование по времени t . Учитывая (2.1), выражение кинетической энергии цилиндрической оболочки принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_1} \rho h R^2 \left((\dot{u})^2 + (\dot{v} + \Omega(R+w))^2 + (\dot{w} - \Omega v)^2 \right) d\alpha d\theta, \quad (2.2)$$

где ρ – плотность материала резонатора. Формула (2.2) задает в общем виде кинетическую энергию резонатора ВТГ на вращающемся основании.

Потенциальную энергию деформации цилиндрической оболочки определим по формуле [29], которая является результатом использования гипотезы Кирхгофа–Лява:

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{2} D_1 R^2 \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} \left((\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1 - \nu_p)(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2) \right) d\theta d\alpha + \\ & + \frac{1}{2} D_2 R^2 \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} \left((\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1 - \nu_p)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - 0,25\varepsilon_{12}^2) \right) d\theta d\alpha, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $D_1 = Eh^3/[12(1 - \nu_p^2)]$ – жесткость цилиндрической оболочки при изгибе (цилиндрическая жесткость); $D_2 = Eh/(1 - \nu_p^2)$ – жесткость цилиндрической оболочки при растяжении (сжатии); E – модуль Юнга; ν_p – коэффициент Пуассона. Для цилиндрической оболочки компоненты тангенциальной и изгибной деформаций задаются формулами [30]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right), \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для определения вектора перемещения воспользуемся условиями нерастяжимости срединной поверхности, которые получаются приравниванием нулю всех трех компонент тангенциальной деформации $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.5)$$

Для рассматриваемого цилиндрического резонатора, у которого один край свободен, а другой закреплен, система уравнений (2.5) не допускает решений кроме тривиального, а приближение к решению может быть получено при выполнении двух условий: $\varepsilon_{12} = 0$ и $\varepsilon_{22} = 0$ [31]. Из данных условий следует существование разрешающей функции $\Psi(\alpha, \theta, t)$:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad w = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}. \quad (2.6)$$

Учитывая формулы (2.4), (2.5), (2.6), запишем выражения для компонент изгибной деформации через разрешающую функцию:

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right), \\ \kappa_{12} &= -\frac{2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = -\frac{2}{R^2} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Подставляя (2.6), (2.7) в (2.2), (2.3), выражаем кинетическую и потенциальную энергию деформации цилиндрического резонатора на неподвижном основании через разрешающую функцию $\Psi(\alpha, \theta, t)$:

$$\begin{aligned}T &= \frac{\rho h}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_1} \left[\left(\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] d\alpha d\theta \\ P &= \frac{D_1}{2R^2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu_p \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta} \right)^2 \right) \right] d\theta d\alpha.\end{aligned}$$

С учетом того, что в волновых твердотельных гироскопах с цилиндрическим резонатором для возбуждения колебаний используется вторая форма колебаний резонатора по окружной координате, в работе [16] определен специальный вид разрешающей функции:

$$\Psi(\alpha, \theta, t) = C \psi_2(\alpha) (f_*(t) \cos 2\theta - g_*(t) \sin 2\theta), \quad (2.8)$$

где введены обобщенные координаты $f_*(t), g_*(t)$, а функция $\psi_2(\alpha)$ определяется при решении трансцендентного уравнения [16].

Используя формулы (2.6) и функцию (2.8), запишем вектор смещения произвольной точки срединной поверхности резонатора в одномодовом приближении по второй форме колебаний ($k=2$):

$$\mathbf{u}(\alpha, \theta, t) = \begin{pmatrix} u(\alpha, \theta, t) \\ v(\alpha, \theta, t) \\ w(\alpha, \theta, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \psi'_2(\alpha) (f_*(t) \cos 2\theta - g_*(t) \sin 2\theta) \\ 2C \psi_2(\alpha) (f_*(t) \sin 2\theta + g_*(t) \cos 2\theta) \\ 4C \psi_2(\alpha) (-f_*(t) \cos 2\theta + g_*(t) \sin 2\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Примем в качестве обобщенных координат второй формы колебаний резонатора функции $f_*(t), g_*(t)$ и положим константу $C=1/(4\psi_2(\alpha_1))$, чтобы прогиб свободной кромки резонатора имел вид $w(\alpha_1, \theta, t) = -f_*(t) \cos 2\theta + g_*(t) \sin 2\theta$.

Подставляя (2.9) в (2.2), определяем кинетическую энергию резонатора:

$$T = \frac{1}{2} \left[m (\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\zeta_* \Omega (g_* \dot{f}_* - f_* \dot{g}_*) \right], \quad (2.10)$$

где приведенная масса

$$m = \frac{\pi \rho h R^2}{16 \psi_2^2(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} \left((\psi'_2(\alpha))^2 + 20 \psi_2^2(\alpha) \right) d\alpha , \quad (2.11)$$

коэффициент $\zeta_* = \frac{\pi \rho h R^2}{\psi_2^2(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} \psi_2^2(\alpha) d\alpha$. В связи с малостью Ω в (2.10) пренебрегались слагаемые, содержащие Ω^2 .

Подставляя (2.9) в (2.4), а (2.4), (2.5) в (2.3), получим выражение для потенциальной энергии деформации цилиндрического резонатора:

$$P = \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2) , \quad (2.12)$$

где приведенная жесткость резонатора

$$c = \frac{\pi D_1}{2 R^2 \psi_2^2(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} \left[2 (3 \psi_2(\alpha) - \psi''_2(\alpha))^2 - 3(v_p - 1) (3(\psi'_2(\alpha))^2 + 4 \psi_2(\alpha) \psi''_2(\alpha)) \right] d\alpha . \quad (2.13)$$

При вычислении магнитной энергии n электромагнитов предположим, что зазоры малы по сравнению с линейными размерами сердечников. Тогда магнитное поле можно считать однородным и пренебречь краевыми эффектами. Поля рассеяния вне магнитопровода, резонатора и зазоров не учитываем. Считая, что магнитная проницаемость магнитопровода, резонатора и основания велика, будем пренебречь их магнитным сопротивлением. При сделанных допущениях энергия магнитного поля n электромагнитов определяется выражением:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_j i_j^2 = \frac{L_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2}{1 - \frac{1}{d} (-f_*(t) \cos 2\theta_j + g_*(t) \sin 2\theta_j)} , \quad (2.14)$$

где L_j – индуктивность, i_j – ток j -го электромагнита, центр которого расположен под углом $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$ к оси Ox , $j=1, \dots, n$; $L_0 = \mu_0 S N^2 / d$ – индуктивность электромагнита при недеформированном резонаторе, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума, S – площадь полюса, N – число витков обмотки, d – зазор между сердечником электромагнита и недеформированным резонатором.

Потенциальная энергия упругой деформации цилиндрического резонатора и его кинетическая энергия определяются по формулам (2.12) и (2.10) соответственно. Используя соотношения (2.12), (2.10), (1.14), найдем выражение для функции Лагранжа–Максвелла электромеханической системы:

$$T - P + W_m = \frac{1}{2} \left(m (\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\zeta_* \Omega (g_* \dot{f}_* - f_* \dot{g}_*) - c (f_*^2 + g_*^2) \right) +$$

$$+ \frac{L_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2}{1 - \frac{1}{d}(-f_*(t) \cos 2\theta_j + g_*(t) \sin 2\theta_j)}. \quad (2.15)$$

Внутренние потери при колебаниях будем описывать моделью Кельвина–Фойгта. Внешними потерями пренебрегаем, считая объем корпуса прибора вакуумированным. Введем диссипативную функцию, учитывающую внутреннее трение материала резонатора:

$$\Phi = \frac{1}{2} c_* (\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2), \quad (2.16)$$

где c_* – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства материала резонатора.

Введем электрическую диссипативную функцию:

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n R_e i_j^2, \quad (2.17)$$

где R_e – электрическое сопротивление цепи между электродом управления и источником питания.

Используя уравнения Лагранжа–Максвелла, учитывая (2.15), (2.16), (2.17), получим следующие уравнения электромеханической системы:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_* + \gamma \dot{f}_* + \omega^2 f_* - 2\zeta \Omega \dot{g}_* + \frac{L_0}{2md} \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2 \cos 2\theta_j}{(d + f_* \cos 2\theta_j - g_* \sin 2\theta_j)^2} &= 0, \\ \ddot{g}_* + \gamma \dot{g}_* + \omega^2 g_* + 2\zeta \Omega \dot{f}_* - \frac{L_0}{2md} \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2 \sin 2\theta_j}{(d + f_* \cos 2\theta_j - g_* \sin 2\theta_j)^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\dot{\Phi}_j + R_e i_j = U_0 U_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.19)$$

где $\gamma = c_*/m$, $\omega^2 = c/m$, $\zeta = \zeta_*/m$; $\Phi_j = L_j i_j$ – магнитный поток, R_e – электрическое сопротивление; U_j – нормализованное величиной U_0 управляющее напряжение, которое подается на j -й электромагнит.

Запишем выражение магнитного потока в виде:

$$\Phi_j(t) = L_j(t) i_j(t) = L_0 i_0 I_j(t), \quad j = 1 \dots n, \quad (2.20)$$

где $i_0 = U_0/R_e$ и введено обозначение безразмерной величины:

$$I_j = \frac{i_j}{i_0 (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)}, \quad (2.21)$$

где $f(t) = -f_*(t)/d$, $g(t) = -g_*(t)/d$ – безразмерные обобщенные координаты, задающие нормализованные по отношению к величине зазора d радиальные смещения резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом 45° .

Подставляя (2.20), (2.21) в (2.19), делим левую и правую часть (2.19) на $U_0 = i_0 R_e$. И переходим к $f(t)$, $g(t)$. Тогда из (2.18), (2.19) получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \gamma \dot{f} + \omega^2 f - v \dot{g} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n I_j^2 \cos 2\theta_j &= 0, \\ \ddot{g} + \gamma \dot{g} + \omega^2 g + v \dot{f} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n I_j^2 \sin 2\theta_j &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{L_0}{R_e} \dot{I}_j + I_j (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) = U_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.23)$$

где обозначены $v = 2\zeta\Omega$, $\eta = 4L_0i_0^2/(md^2)$.

Поставим начальные условия для системы —:

$$f(0) = f^0, \quad \dot{f}(0) = \dot{f}^0, \quad g(0) = g^0, \quad \dot{g}(0) = \dot{g}^0, \quad I_j(0) = I_j^0, \quad j = 1 \dots n. \quad (2.24)$$

Перейдем в уравнениях (2.22)–(2.23) к безразмерному времени $\tau = \omega t$ и запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\tau^2} &= -f - \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=1}^n I_j^2 \cos 2\theta_j, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} &= -g - \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=1}^n I_j^2 \sin 2\theta_j, \\ \varepsilon \frac{dI_j}{d\tau} + (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) I_j &= U_j, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma/\omega$, $\tilde{v} = v/\omega$, $\tilde{\eta} = \eta/\omega^2$, и введен $\varepsilon = L_0\omega/R_e$ – безразмерный малый параметр. Уравнения в безразмерном времени вместе с начальными условиями (2.24) запишем в векторно-матричном виде:

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + \tilde{\eta}f(y), \quad (2.25)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{d\tau} = D(x)y + h(\tau), \quad (2.26)$$

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad (2.27)$$

где обозначены

$$x = \left(f, \frac{df}{d\tau}, g, \frac{dg}{d\tau} \right)^T, \quad x^0 = \left(f^0, \dot{f}^0, g^0, \dot{g}^0 \right)^T, \quad y = (I_1, \dots, I_n)^T, \quad y^0 = (I_1^0, \dots, I_n^0)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\tilde{\gamma} & 0 & \tilde{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\tilde{v} & -1 & -\tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad f(y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \sum_{j=1}^n y_j^2 \cos 2\theta_j & 0 & \frac{1}{8} \sum_{j=1}^n y_j^2 \sin 2\theta_j \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \text{diag}\{-1 + x_1 \cos 2\theta_1 + x_3 \sin 2\theta_1, \dots, -1 + x_1 \cos 2\theta_n + x_3 \sin 2\theta_n\},$$

$$\mathbf{h}(\tau) = (U_1, \dots, U_n)^T.$$

Таким образом, получена задача Коши для системы дифференциальных уравнений тихоновского типа (2.25)–(2.27), то есть системы дифференциальных уравнений, часть из которых являются сингулярно возмущенными. Выведенную математическую модель (2.22)–(2.24), которая также записана в форме (2.25)–(2.27), будем называть исходной математической моделью, так как она объединяет обобщенный вид нелинейности колебаний резонатора, вызванной электромагнитными датчиками управления, и сингулярно возмущенные уравнения электромагнитных колебаний в цепи управления.

3. Вырожденная задача для тихоновской системы в качестве приближенной математической модели. Установим, что для задачи (2.25)–(2.27) выполняются условия теоремы Тихонова о предельном переходе [32]. Поскольку при работе ВТГ амплитуда прогиба меньше величины зазора между недеформированным резонатором и электромагнитами управления (исключается их соединение), при исследовании задачи (2.25)–(2.27) будем использовать ограничение:

$$x_1^2 + x_3^2 \leq \beta^2, \quad (3.1)$$

где β – константа, $0 < \beta < 1$. Используя (3.1), введем область

$$H = \left\{ (\mathbf{x}, \tau) \in \bar{D} = \left\{ |\mathbf{x}| \leq \sqrt{2}\beta, 0 \leq \tau \leq T \right\}, |y_j| \leq 2 / (1 - \beta), j = 1 \dots n \right\}.$$

Правые части уравнений (2.25), (2.26) непрерывны вместе с частными производными по компонентам векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в области H . Полагая в (2.26) $\varepsilon = 0$, получим задачу, называемую в теории возмущений вырожденной задачей:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\eta}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{h}(\tau) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (3.4)$$

Система алгебраических уравнений (3.3) представляет n независимых уравнений с единственными решениями:

$$\bar{y}_j = \frac{h_j}{1 - \bar{x}_1 \cos 2\theta_j - \bar{x}_3 \sin 2\theta_j}, \quad j = 1 \dots n,$$

которые вместе с производными по \bar{x}_1 и \bar{x}_3 непрерывны в области \bar{D} . Условие устойчивости полученных корней справедливо в результате выполнения (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(-(1 - x_1 \cos 2\theta_j - x_3 \sin 2\theta_j) y_j + h_j \right) = -1 + x_1 \cos 2\theta_j + x_3 \sin 2\theta_j < 0, \quad j = 1 \dots n.$$

Решением задачи (3.2)–(3.4) будем называть непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$, удовлетворяющую условиям (3.1), (3.4) и

обращающую уравнения (3.2) в тождество. В области \bar{D} решение задачи (3.2)–(3.4) существует и единственno.

Таким образом, согласно теореме Тихонова о предельном переходе [32], решение задачи (2.25)–(2.27) существует на $[0, T]$ и имеет место предельный переход к решению вырожденной задачи (3.2)–(3.4) при стремлении малого параметра ε к нулю:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(\tau, \varepsilon) = \bar{\mathbf{x}}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}(\tau, \varepsilon) = \bar{\mathbf{y}}(\tau), \quad 0 < \tau \leq T,$$

Основываясь на теореме Тихонова о предельном переходе и учитывая малость параметра ε , можем использовать решение вырожденной задачи (3.2)–(3.4) в качестве нулевого приближения к компоненте решения \mathbf{x} задачи (2.25)–(2.27). Обратим внимание, что приближение для компоненты решения \mathbf{y} задачи (2.25)–(2.27) справедливо только вне окрестности начальной точки (вне пограничного слоя).

Обратим внимание, что вырожденную задачу (3.2)–(3.4), как задачу нахождения $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$, следует переписать в виде:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\eta}\mathbf{f}(-\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{h}), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}^0.$$

Решение вырожденной задачи в теории возмущений представляет достаточную сложность, поскольку данная задача обычно нелинейна. Рассмотрим подробнее, каким образом можно построить приближение к решению вырожденной задачи. Опуская обозначение “–” решения вырожденной задачи, запишем ее в исходных обозначениях, чтобы нагляднее показать суть проводимых упрощений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\tau^2} &= -f - \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} &= -g - \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$f(0) = f^0, \quad \dot{f}(0) = \dot{f}^0, \quad g(0) = g^0, \quad \dot{g}(0) = \dot{g}^0. \quad (3.6)$$

В (3.5)–(3.6) использовался общий вид записи для произвольного числа датчиков управления. Рассмотрим случай ВТГ с $n=8$ датчиками управления. Тогда напряжения U_j , $j=1\dots 8$, подаваемые на электромагниты управления, имеют вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_5 = 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau, \\ U_3 &= U_7 = 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu\tau - u_2 \cos \mu\tau, \\ U_2 &= U_6 = 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau, \\ U_4 &= U_8 = 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu\tau - u_4 \cos \mu\tau, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где обозначены $\mu = \omega_0/\omega = (\omega + \lambda)/\omega$, ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора близкая к резонансной частоте второй формы колебаний ω , $\lambda = \omega_0 - \omega$ – частотная настройка, $|\lambda| \ll \omega$; u_1, u_2, u_3, u_4 – нормализованные амплитуды управляющих напряжений, $u_i < 1$, $i = 1..4$; $u_A(\tau)$, $u_B(\tau)$ – нормализованные управляющие напряжения, подаваемые, соответственно, на группу электродов № 1, 3, 5, 7 и смещенную относительно них на угол 45° группу электродов № 2, 4, 6, 8.

Как и для электростатических датчиков управления [16], так и для электромагнитных датчиков сигналы управления (3.7) реализуют широко применяемую в ВТГ “пуш-пульную” (push-pull) схему управления [5]. Данная схема основана на подаче разности потенциалов $U_0(1+u)$ и $U_0(1-u)$, $0 < u < 1$, на датчики, расположенные ортогонально, и применяется для линеаризации силы датчика, которая пропорциональна квадрату напряжения. В данном случае для нормализованных напряжений:

$$(1+u)^2 - (1-u)^2 = 4u. \quad (3.8)$$

Однако при учете конечного отношения прогиба резонатора к зазору датчика как электростатического [16], так и электромагнитного нарушается линеаризация push-pull. Несмотря на конечность отношения прогиба к зазору, величина прогиба является малой, что обосновывает одновременное использование при выводе уравнений динамики резонатора линейной теории оболочек и учет нелинейности силового воздействия датчика управления. Силовое воздействие двух ортогонально расположенных датчиков управления пропорционально выражению, которое может быть разложено в ряд по нормализованному величиной зазора прогибу $|\tilde{w}| = |w/d| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(1+u)^2}{(1-\tilde{w})^2} - \frac{(1-u)^2}{(1+\tilde{w})^2} &= (1+u)^2 \left(1 + 2\tilde{w} + 3\tilde{w}^2 + 4\tilde{w}^3 + \dots\right) - \\ &\quad - (1-u)^2 \left(1 - 2\tilde{w} + 3\tilde{w}^2 - 4\tilde{w}^3 + \dots\right) = \\ &= 4u \left(1 + 3\tilde{w}^2 + 5\tilde{w}^4 + \dots\right) + 4(1+u^2) \left(\tilde{w} + 2\tilde{w}^3 + 3\tilde{w}^5 + \dots\right) = \\ &= 4(u + \tilde{w} + u^2\tilde{w} + 3u\tilde{w}^2 + 2\tilde{w}^3 + 2u^2\tilde{w}^3 + \dots). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, при учете прогиба \tilde{w} , схема линеаризации push-pull нарушается.

Амплитуды нормализованных величин имеют одинаковый порядок малости, поэтому слагаемыми, содержащими $f^\alpha g^\beta u_k^\delta$, $k = A, B$, пренебрегаем при выполнении условия $\alpha + \beta + \delta > 3$ в связи с высоким порядком малости. Тогда с учетом (3.9) получаем из (3.5) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{d\tau^2} &= -f - \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \tilde{\eta} \left(f + 2f^3 + u_A^2 f + (1+3f^2)u_A \right), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} &= -g - \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \tilde{\eta} \left(g + 2g^3 + u_B^2 g + (1+3g^2)u_B \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В дальнейшем будем пренебрегать слагаемыми $u_A^2(\tau)f$, $u_B^2(\tau)g$ в силу их малости. Данные слагаемые характеризуют параметрическое возбуждение колебаний резонатора, сопутствующее вынужденным колебаниям, которое было показано в работе [16] при использовании электростатических датчиков управления и более подробно исследовалось в работе [18]. Также далее пусть будет учтено изменение квадрата характерной частоты собственных колебаний на величину η . В итоге запишем (3.10) в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\tau^2} &= -f - \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \tilde{\eta} (2f^3 + (1+3f^2)(-u_1 \sin \mu t + u_2 \cos \mu t)), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} &= -g - \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \tilde{\eta} (2g^3 + (1+3g^2)(-u_3 \sin \mu t + u_4 \cos \mu t)).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Уравнения (3.11) учитывают все рассмотренные нелинейности до третьего порядка: кубическую нелинейность специального вида и квадратичную нелинейность при управлении. Вид кубической нелинейности в (3.11) обусловлен использованием восьми датчиков управления, $n=8$. При схеме управления колебаний с использованием шестнадцати датчиков управления, $n=16$, вид кубической нелинейности имел бы вид как в работе [16], где рассматривались шестнадцать электростатических датчиков управления.

Уравнения (3.11), представляющие уравнения вырожденной задачи, описывают динамику резонатора ВТГ, их можно усреднить по методу Крылова–Боголюбова и, действуя аналогично схеме исследования [16], вывести нелинейные эффекты динамики резонатора ВТГ: угловую скорость дрейфа, вызванную нелинейностью колебаний, и сдвиг резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. Однако в таких исследованиях будут отсутствовать эффекты, вызванные влиянием электрического сопротивления цепи управления (так как в вырожденной задачи полагали $\varepsilon=0$). Поэтому нам требуется более точная приближенная математическая модель, учитывающая электрическое сопротивление цепи управления.

Далее покажем, как можно получить приближенное решение вырожденной задачи. Запишем задачу с уравнениями (3.11) в виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \tilde{\eta}\mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau) = & \left(0.2X_1^3 + (1+3X_1^2)(-u_1 \sin \mu t + u_2 \cos \mu t), 0.2X_3^3 + \right. \\ & \left. + (1+3X_3^2)(-u_3 \sin \mu t + u_4 \cos \mu t) \right)^T,\end{aligned}$$

где $\tilde{\eta}$ – малый параметр. То есть имеется регулярно возмущенная задача, поэтому используем метод малого параметра и решение ищем в виде:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^{[0]}(t) + \tilde{\eta}\mathbf{X}^{[1]}(t) + \tilde{\eta}^2\mathbf{X}^{[2]}(t) + \dots$$

Заметим, что по правилу Коши произведения рядов можно получить степенной ряд, коэффициенты которого обозначим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{2,k}(a_0, \dots, a_k) \tilde{\eta}^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{\eta}^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} \right) \tilde{\eta}^k = a_0^2 + 2a_0 a_1 \tilde{\eta} + \dots,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{3,k}(a_0, \dots, a_k) \tilde{\eta}^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{\eta}^k \right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j a_i a_{j-i} \right) a_{k-j} \right) \tilde{\eta}^k = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 \tilde{\eta} + \dots$$

Тогда получим серию задач с системами линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{X}^{[0]}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{[0]} + \mathbf{b}^{[0]}(\tau), \quad \mathbf{X}^{[0]}(0) = \mathbf{x}^0,$$

$$\mathbf{b}^{[0]}(\tau) = (0, \tilde{\eta}(-u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau), 0, \tilde{\eta}(-u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau))^T,$$

$$\frac{d\mathbf{X}^{[j]}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{[j]} + \mathbf{b}^{[j]}(\tau), \quad \mathbf{X}^{[j]}(0) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{b}^{[j]}(\tau) = (0, 2C_{3,j}(X_1^{[0]}, \dots, X_1^{[j]}) + 3C_{2,j}(X_1^{[0]}, \dots, X_1^{[j]})(-u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau), \\ 0, 2C_{3,j}(X_3^{[0]}, \dots, X_3^{[j]}) + 3C_{2,j}(X_3^{[0]}, \dots, X_3^{[j]})(-u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau))^T$$

и их решения по формуле Коши:

$$\mathbf{X}^{[0]}(\tau) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)\mathbf{x}^0 + \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}^{[0]}(s)ds,$$

$$\mathbf{X}^{[j]}(\tau) = \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}^{[j]}(s)ds, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\Phi(\tau)$ – фундаментальная матрица решений системы уравнений.

4. Построение приближенного решения для исходной математической модели.

Будем использовать метод голоморфной регуляризации [25], преимуществом которого является построение единых формул приближенного решения как в пограничном слое, так и вне его, что позволяет проводить качественный анализ приближенного решения на всем рассматриваемом временном отрезке, включая пограничный слой. Данный перспективный математический метод аналитической теории возмущений [25–28] был впервые применен для построения приближенного решения нелинейной математической модели, описывающей динамику резонатора ВТГ с шестнадцатью электростатическими датчиками управления в [28]. Алгоритм метода голоморфной регуляризации можно описать следующим образом: сначала нелинейная сингулярно возмущенная задача сводится к линейной задаче относительно первых интегралов, которая изучается с точки зрения регулярной теории возмущений, а затем применяется аппарат теории неявных функций и определяются коэффициенты степенного по малому параметру ряда. При построении приближенных решений используются некоторые упрощения, позволяющие показать

эффективность метода [28]. Воспользуемся формулами, которые были выведены в работе [28] для тихоновской системы дифференциальных уравнений вида (2.25)–(2.27). Формулы приближения к решению (2.25)–(2.27), имеющего второй порядок точности по ε :

$$\mathbf{X}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \mathbf{X}^{[0]}(\tau) + \varepsilon \mathbf{X}^{[1]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{X}\| \leq C_1 \varepsilon^2, \quad \tau \in [0, T_\tau], \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Y}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \mathbf{Y}^{[0]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \mathbf{Y}^{[1]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{Y}\| \leq C_2 \varepsilon^2, \quad \tau \in [0, T_\tau], \quad (4.2)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Сначала принимаем в качестве $\mathbf{X}^{[0]}(\tau) = \hat{\mathbf{X}}(\tau)$ – решение вырожденной задачи, или приближение к решению вырожденной задачи.

Для компоненты \mathbf{y} решения – выводятся следующие коэффициенты приближения (4.2) [28] с подстановкой компонент $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{X}}(\tau)$:

$$\begin{aligned} Y_j^{[0]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \left(y_j^0 + \frac{h_j(\tau)}{d_j(\hat{X}_1)}\right) \exp\left(d_j(\hat{X}_1) \cdot \frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \frac{h_j(\tau)}{d_j(\hat{X}_1)}, \quad j = 1, 3, 5, 7, \\ Y_j^{[0]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \left(y_j^0 + \frac{h_j(\tau)}{d_j(\hat{X}_3)}\right) \exp\left(d_j(\hat{X}_3) \cdot \frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \frac{h_j(\tau)}{d_j(\hat{X}_3)}, \quad j = 2, 4, 6, 9, \end{aligned} \quad (4.3)$$

а также

$$\begin{aligned} Y_j^{[1]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(\hat{X}_1)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(\hat{X}_1)}{d_j^3(\hat{X}_1)}\hat{X}_2\right) \left(\exp\left(d_j(\hat{X}_1) \frac{\tau}{\varepsilon}\right) - 1\right), \quad j = 1, 3, 5, 7, \\ Y_j^{[1]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(\hat{X}_3)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(\hat{X}_3)}{d_j^3(\hat{X}_3)}\hat{X}_4\right) \left(\exp\left(d_j(\hat{X}_3) \frac{\tau}{\varepsilon}\right) - 1\right), \quad j = 2, 4, 6, 9. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее можно получить для компоненты \mathbf{x} следующий коэффициент приближения (4.1) [28], использующий $\mathbf{Y}^{[0]}, \mathbf{Y}^{[1]}$:

$$\mathbf{X}^{[1]}\left(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \Psi^{-1}(\tau) \int_0^\tau \Psi(s) \mathbf{f}'\left(\mathbf{Y}^{[0]}\left(s, \frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) \mathbf{Y}^{[1]}\left(s, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) ds, \quad (4.5)$$

где $\Psi(\tau)$ – фундаментальная матрица решений системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{A}^T(\tau)\mathbf{z}, \quad \mathbf{f}'(\mathbf{y}) = \frac{\partial(f_1(\mathbf{y}), \dots, f_m(\mathbf{y}))}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$$

– матрица Якоби размера $m \times n$.

Пример. Пусть цилиндрический резонатор ВТГ с электромагнитными датчиками изготавливается из магнитомягкого железоникелевого сплава элинвар с плотностью $\rho = 8140 \text{ кг}/\text{м}^3$, модулем упругости $E = 190 \text{ ГПа}$ и коэффициентом Пуассона $\nu_p = 0.3$. Принимаем размеры цилиндрического резонатора

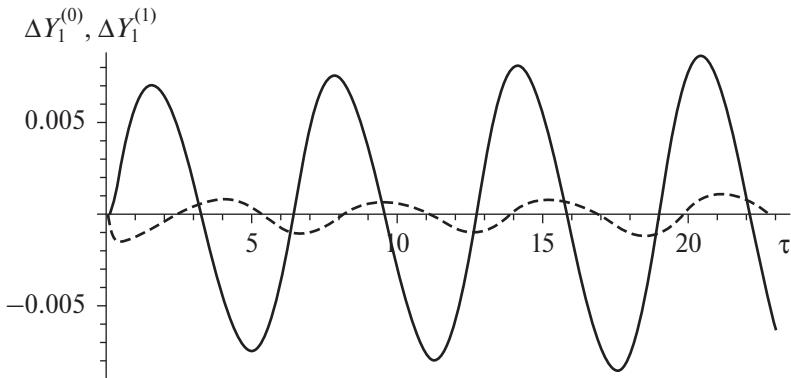


Рис. 2. Графики разности $\Delta Y_1^{(0)} = y_1^* - Y_1^{[0]}$ – сплошная линия, $\Delta Y_1^{(1)} = y_1^* - (Y_1^{[0]} + \varepsilon Y_1^{[1]})$ – пунктирная линия.

$R=20$ мм, $h=1$ мм, $H=R$. Используя формулы приведенной жесткости (2.13) и массы (2.11), рассчитываем $\omega=8637$ с⁻¹. Добротность резонатора $Q=5 \cdot 10^4$, тогда получаем $\tilde{\gamma}=1/Q=2 \cdot 10^{-5}$. Пусть индуктивность равна $L_0=\mu_0 S N^2/d \approx 1 \cdot 10^{-5}$ Гн (площадь полюса $S=1$ мм², расстояние между полюсом и поверхностью резонатора $d=0.2$ мм, количество витков катушки $N=40$). Электрическое сопротивление цепи управления $R_e=3$ Ом. Тогда малый параметр в (2.25)–(2.27), $\varepsilon=L_0\omega/R_e \approx 0.029$. Пусть используется опорное напряжение $U_0=1.5$ В, тогда коэффициент $\eta \approx 2.5 \cdot 10^5$ с⁻², и, соответственно, безразмерный коэффициент $\tilde{\eta}=\eta/\omega^2=3.35 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, показано, что задача (2.25)–(2.27) содержит два малых параметра: $\tilde{\eta}=3.35 \cdot 10^{-3}$ входит регулярным образом в (2.25), а $\varepsilon=0.029$ входит сингулярным образом в (2.26). Заметим, что значения малых параметров в задаче вида (2.25)–(2.27), описывающей динамику ВТГ с электростатическими датчиками управления [16], имеют гораздо меньшие значения, что позволяло в работе [16] в качестве приближения высокой точности использовать решение вырожденной задачи. При рассмотрении ВТГ с электромагнитными датчиками управления мы построим приближение более высокого порядка точности по обоим малым параметрам. Будем рассматривать управляющие нормализованные напряжения $u_1=0$, $u_2=0.01$, $u_3=0$, $u_4=0$, нормализованный начальный прогиб резонатора $x_1^0=0.05$ (чтобы ускорить время готовности прибора) и остальные нулевые начальные значения $x_2^0=0$, $x_3^0=0$, $x_4^0=0$, $y_j^0=0$, $j=1\dots 8$.

Построим приближения к компоненте решения y_1 задачи (2.25)–(2.27): $Y_1^{[0]}$ и $Y_1^{[0]} + \varepsilon Y_1^{[1]}$, которые получены по методу голоморфной регуляризации и определены формулами (4.3), (4.4). Сначала строим приближение к решению вырожденной задачи (3.12), затем используем его в формулах (4.3), (4.4). На рис. 2 построены графики разности высокоточного численного приближения y_1^* и построенных приближений $\Delta Y_1^{[0]} = y_1^* - Y_1^{[0]}$, $\Delta Y_1^{[1]} = y_1^* - (Y_1^{[0]} + \varepsilon Y_1^{[1]})$ из которых видно значительное уменьшение погрешности при использовании уточнённого приближения $Y_1^{[0]} + \varepsilon Y_1^{[1]}$.

5. Осредненная математическая модель динамики резонатора. Для исследования нелинейных эффектов динамики резонатора проводится осреднение

дифференциальных уравнений, описывающих колебания резонатора. Полученные уравнения в новых медленных переменных позволяют, например, определить по дифференциальным уравнениям угловую скорость дрейфа либо построить амплитудно-частотные характеристики [16]. Обычно в таком случае не интересует начальный промежуток времени. Поэтому для данных исследований мы возьмем приближения (4.3), (4.4) без подстановки $\tilde{X}(\tau)$ вдали от начальных условий:

$$Y_j^{[0]} + \varepsilon Y_j^{[1]} \approx -\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_1)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^3(x_1)} x_2 \right), \quad j = 1, 3, 5, 7,$$

$$Y_j^{[0]} + \varepsilon Y_j^{[1]} \approx -\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_3)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_3)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_3)}{d_j^3(x_3)} x_4 \right), \quad j = 2, 4, 6, 9,$$

и подставим их в уравнения (2.25), описывающие колебания резонатора:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - \tilde{\gamma}x_2 + \tilde{v}x_4 + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=1,3,5,7} \left(-\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_1)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^3(x_1)} x_2 \right) \right)^2 \cos 2\theta_j,$$

$$\frac{dx_3}{d\tau} = x_4,$$

$$\frac{dx_4}{d\tau} = -x_3 - \tilde{\gamma}x_4 - \tilde{v}x_2 + \frac{\tilde{\eta}}{8} \sum_{j=2,4,6,9} \left(-\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_3)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_3)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_3)}{d_j^3(x_3)} x_4 \right) \right)^2 \sin 2\theta_j.$$

Далее учтем в уравнениях только слагаемые первого порядка по ε . Положим:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,3,5,7} \left(-\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_1)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^3(x_1)} x_2 \right) \right)^2 \cos 2\theta_j \approx \sum_{j=1,3,5,7} \left(\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} \right)^2 \cos 2\theta_j + \\ & + 2\varepsilon \sum_{j=1,3,5,7} \frac{h_j(\tau)h'_j(\tau)}{d_j^3(x_1)} \cos 2\theta_j - 2\varepsilon \sum_{j=1,3,5,7} \frac{h_j^2(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^4(x_1)} x_2 \cos 2\theta_j. \end{aligned}$$

При рассмотрении вырожденной задачи, с учетом (3.9), было принято в (3.10) приближение:

$$\sum_{j=1,3,5,7} \left(\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} \right)^2 \cos 2\theta_j \approx 8 \left(x_1 + 2x_1^3 + (1 + 3x_1^2)u_A \right).$$

Используя (3.9), а также разложения в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\tilde{w})^3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\tilde{w}^k = 1 + 3\tilde{w} + 6\tilde{w}^2 + 10\tilde{w}^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1-\tilde{w})^4} &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1)\tilde{w}^k = 1 + 4\tilde{w} + 10\tilde{w}^2 + 20\tilde{w}^3 + \dots, \end{aligned} \quad (5.1)$$

с учетом нелинейных слагаемых до третьей степени, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,3,5,7} \frac{h_j(\tau)h'_j(\tau)}{d_j^3(x_1)} \cos 2\theta_j &= -4u'_A (1 + 6x_1^2 + (3x_1 + 10x_1^3)u_A + \dots), \\ \sum_{j=1,3,5,7} \frac{h_j^2(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^4(x_1)} x_2 \cos 2\theta_j &\approx 4x_2 (1 + 10x_1^2 + 8(x_1 + 5x_1^3)u_A + \dots). \end{aligned}$$

Аналогично получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=2,4,6,9} \left(-\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_3)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_3)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_3)}{d_j^3(x_3)} x_4 \right) \right)^2 \sin 2\theta_j &\approx 8(x_3 + 2x_3^3 + (1 + 3x_3^2)u_B) - \\ - 8\varepsilon u'_B (1 + 6x_3^2 + (3x_3 + 10x_3^3)u_B) - 8\varepsilon x_4 (1 + 10x_3^2 + 8(x_3 + 5x_3^3)u_B). \end{aligned}$$

Будем, как и ранее, пренебрегать слагаемыми, вызывающими незначительное параметрическое возбуждение колебаний, в данном случае — содержащими произведения $u'_A u_A$, $u'_B u_B$. В итоге получаем уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - \tilde{\gamma}x_2 + \tilde{\nu}x_4 + \\ + \tilde{\eta}(x_1 + 2x_1^3 - \varepsilon(1 + 10x_1^2)x_2 + (1 + 3x_1^2 - 8\varepsilon x_1 x_2)u_A - \varepsilon(1 + 6x_1^2)u'_A), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -x_3 - \tilde{\gamma}x_4 - \tilde{\nu}x_2 + \\ + \tilde{\eta}(x_3 + 2x_3^3 - \varepsilon(1 + 10x_3^2)x_4 + (1 + 3x_3^2 - \varepsilon x_3 x_4)u_B - \varepsilon(1 + 6x_3^2)u'_B). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для исследования динамики резонатора проведем осреднение [33] полученной системы дифференциальных уравнений (5.2). Рассмотрим методику вывода осредненной нелинейной системы уравнений динамики резонатора ВТГ, основанную на специальном способе приведения системы уравнений (5.2) к стандартной форме метода осреднения [17]. Ее отличительной особенностью являются переход в собственный базис матрицы системы нулевого приближения и после преобразований возвращение в исходный базис, а также введение частотной настройки в матрицу системы. Данная методика делает процедуру осреднения уравнений динамики более алгоритмически простой, не требующей трудоемкого разрешения системы уравнений относительно

новых переменных, что важно для целей исследования различных нелинейных математических моделей динамики резонаторов ВТГ.

Запишем (5.2) в векторно-матричной форме:

$$\frac{dx}{d\tau} = (\mathbf{A}_0 + \tilde{\eta}\mathbf{A}(\tau))\mathbf{x} + \tilde{\eta}(\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) - \varepsilon\mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\tau)), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\gamma_* - \varepsilon & 0 & v_* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_* & 1 & -\gamma_* - \varepsilon \end{pmatrix},$$

где для удобства введены обозначения $\gamma_* = \tilde{\gamma} / \tilde{\eta}$, $v_* = \tilde{v} / \tilde{\eta}$,

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1^3 - 10\varepsilon x_1^2 x_2 \\ 0 \\ 2x_3^3 - 10\varepsilon x_3^2 x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ (3x_1^2 - 8\varepsilon x_1 x_2)u_A - 6\varepsilon x_1^2 u'_A \\ 0 \\ (3x_3^2 - 8\varepsilon x_3 x_4)u_B - 6\varepsilon x_3^2 u'_B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_A - \varepsilon u'_A \\ 0 \\ u_B - \varepsilon u'_B \end{pmatrix}.$$

Для приведения матрицы \mathbf{A}_0 к диагональному виду используем замену $\mathbf{x} = \mathbf{S}_0 \mathbf{z}$, где \mathbf{S}_0 – матрица перехода, составленная из базисных векторов, представляющих собственные векторы матрицы \mathbf{A}_0 . Таким образом, при переходе к собственному базису, матрица \mathbf{A}_0 принимает следующий вид: $\mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{S}_0 = \mathbf{\Lambda}_0 = \text{diag}\{-i, i, -i, i\}$, i – мнимая единица, и из (5.3) получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = (\mathbf{\Lambda}_0 + \tilde{\eta}\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{A}(\tau)\mathbf{S}_0)\mathbf{z} + \tilde{\eta}\mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{N}_1(\mathbf{z}) - \varepsilon\mathbf{N}_2(\mathbf{z}, \tau) + \mathbf{F}(\tau)). \quad (5.4)$$

Содержащуюся в матрице $\mathbf{\Lambda}_0$ безразмерную собственную частоту представляем в виде: $1 = \mu - \tilde{\eta}\lambda_*$ [27]. Тогда $\mathbf{\Lambda}_0 = \mu\mathbf{\Lambda}_0 - \tilde{\eta}\lambda_*\mathbf{\Lambda}_0$ и, как следствие, (5.4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{d\tau} - \mu\mathbf{\Lambda}_0 z = \tilde{\eta}(\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{A}(\tau)\mathbf{S}_0 - \lambda_*\mathbf{\Lambda}_0)z + \tilde{\eta}\mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{N}_1(\mathbf{z}) - \varepsilon\mathbf{N}_2(\mathbf{z}, \tau) + \mathbf{F}(\tau)). \quad (5.5)$$

Правая часть (5.5) в силу своей малости оказывает малое возмущающее воздействие на колебательный процесс. Решением (5.5) при нулевой правой части будет $\mathbf{z}(\tau) = e^{\mu\mathbf{\Lambda}_0\tau}\tilde{\mathbf{r}}$, где $e^{\mu\mathbf{\Lambda}_0\tau}$ – матричная экспонента, $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2)^T$ – обозначение вектора констант. Для приведения (5.3) к стандартной форме, согласно методу вариации произвольных постоянных Лагранжа [26], полагаем константы $\tilde{\mathbf{r}}$ медленными переменными $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$:

$$\mathbf{z}(\tau) = e^{\mu\mathbf{\Lambda}_0\tau}\tilde{\mathbf{r}}(\tau). \quad (5.6)$$

Так как нас интересуют переменные $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ в исходном базисе, используем матрицу перехода и формулу преобразования вектора медленных переменных при переходе в рассматриваемый собственный базис:

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = S_0^{-1} \mathbf{r}(\tau), \quad (5.7)$$

где $\mathbf{r}(\tau) = (q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))^T$ заданы в исходном базисе.

Подставляя (5.7) в (5.6), а (5.6) в (5.5), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \tilde{\eta} \left(\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{N}}_1(\mathbf{r}) - \varepsilon \tilde{\mathbf{N}}_2(\mathbf{r}, \tau) + \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \right), \\ \mathbf{Q}(\tau) &= \mathbf{S}_0 e^{-\mu E_0 \tau} \left(\mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{A}(\tau) \mathbf{S}_0 - \lambda_* \boldsymbol{\Lambda}_0 \right) e^{\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{N}}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{S}_0 e^{-\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{N}_1 \left(\mathbf{S}_0 e^{\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{r}(\tau) \right), \\ \tilde{\mathbf{N}}_2(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{S}_0 e^{-\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{N}_2 \left(\mathbf{S}_0 e^{\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{r}(\tau), \tau \right), \\ \tilde{\mathbf{F}}(\tau) &= \mathbf{S}_0 e^{-\mu \boldsymbol{\Lambda}_0 \tau} \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{F}(\tau). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, система (5.3) сведена к системе (5.8) в стандартной форме метода осреднения [33]. Следующим этапом метода осреднения является замена системы (5.8) осредненной, полученной интегрированием по общему периоду $T_\tau = 2\pi/\mu$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \tilde{\eta} (\mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{N}_1(\mathbf{r}) - \varepsilon \mathbf{N}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{F}), \\ \mathbf{C} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu} \mathbf{Q}(\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma_* - \varepsilon & -2(1 + \lambda_*) & \nu_* & 0 \\ 2(1 + \lambda_*) & -\gamma_* - \varepsilon & 0 & \nu_* \\ -\nu_* & 0 & -\gamma_* - \varepsilon & -2(1 + \lambda_*) \\ 0 & -\nu_* & 2(1 + \lambda_*) & -\gamma_* - \varepsilon \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}_1(z) = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu} \tilde{\mathbf{N}}_1(z) d\tau &= \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2p_1(p_1^2 + q_1^2) + (3p_1^2 + q_1^2)u_1 - 2p_1q_1u_2 \\ 2q_1(p_1^2 + q_1^2) + (p_1^2 + 3q_1^2)u_2 - 2p_1q_1u_1 \\ -2p_2(p_2^2 + q_2^2) + (3p_2^2 + q_2^2)u_3 - 2p_2q_2u_4 \\ 2q_2(p_2^2 + q_2^2) + (p_2^2 + 3q_2^2)u_4 - 2p_2q_2u_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}_2(z) = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu} \tilde{\mathbf{N}}_2(z, \tau) d\tau &= \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5q_1(p_1^2 + q_1^2) - 2p_1q_1u_1(4 - 3\mu) + (4(q_1^2 - p_1^2) + 3\mu(3p_1^2 + q_1^2))u_2 \\ 5p_1(p_1^2 + q_1^2) - 2p_1q_1u_2(4 - 3\mu) + (4(p_1^2 - q_1^2) + 3\mu(3q_1^2 + p_1^2))u_1 \\ 5q_2(p_2^2 + q_2^2) - 2p_2q_2u_3(4 - 3\mu) + (4(q_2^2 - p_2^2) + 3\mu(3p_2^2 + q_2^2))u_4 \\ 5p_2(p_2^2 + q_2^2) - 2p_2q_2u_4(4 - 3\mu) + (4(p_2^2 - q_2^2) + 3\mu(3q_2^2 + p_2^2))u_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu} \tilde{\mathbf{F}}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} (u_1 - \mu \varepsilon u_2, u_2 + \mu \varepsilon u_1, u_3 - \mu \varepsilon u_4, u_4 + \mu \varepsilon u_3)^T.$$

Таким образом, получена нелинейная математическая модель в медленных переменных (5.9), которая учитывает сопротивление электрической цепи управления колебаниями ВТГ и все рассмотренные нелинейности до третьего порядка. Далее будем использовать нелинейную систему (5.9) для исследования угловой скорости дрейфа ВТГ.

6. Угловая скорость дрейфа гироскопа при нелинейных колебаниях. Рассмотрим динамику резонатора ВТГ с электромагнитными датчиками управления при наличии только постоянного опорного напряжения: $U_0 \neq 0$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$. Исследование угловой скорости дрейфа ВТГ будем проводить с помощью переменных, называемых элементами орбиты [9]: $r(\tau)$ и $k(\tau)$ – амплитуды основной и квадратурной волн колебаний, $\theta(\tau)$ – угол прецессии, $\chi(\tau)$ – временная фаза,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\tau + \chi) \cos 2\theta - k \sin(\tau + \chi) \sin 2\theta, \\ x_3 &= r \cos(\tau + \chi) \sin 2\theta + k \sin(\tau + \chi) \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Чтобы перейти от $q_1(\tau)$, $p_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, $p_2(\tau)$, определяемых (4.5), к новым переменным $r(\tau)$, $k(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\chi(\tau)$, будем использовать в (5.9) замену переменных [34]:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos 2\theta \cos \chi - k \sin 2\theta \sin \chi, & p_1 &= -r \cos 2\theta \sin \chi - k \sin 2\theta \cos \chi, \\ q_2 &= r \sin 2\theta \cos \chi + k \cos 2\theta \sin \chi, & p_2 &= -r \sin 2\theta \sin \chi + k \cos 2\theta \cos \chi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

а также подстановку $\lambda = 0$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.

В результате выполненных преобразований получаем систему:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{\gamma_*}{2} + \varepsilon \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2) \right) \right) r - \frac{\tilde{\eta}}{16} (r^2 - k^2) (3k \sin 8\theta - 5\varepsilon r \cos 8\theta), \quad (6.2)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{\gamma_*}{2} + \varepsilon \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2) \right) \right) k + \frac{\tilde{\eta}}{16} (r^2 - k^2) (3r \sin 8\theta - 5\varepsilon k \cos 8\theta), \quad (6.3)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{1}{4} v_* - \frac{3}{16} kr (1 + \cos 8\theta) - \frac{5}{32} \varepsilon (k^2 + r^2) \sin 8\theta \right), \quad (6.4)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(1 + \frac{3}{16} (k^2 + r^2) (3 + \cos 8\theta) + 10\varepsilon kr \sin 8\theta \right). \quad (6.5)$$

В уравнениях (6.2)–(6.5) все величины оказываются зависимыми от угла прецессии $\theta(t)$, что является следствием использования восьми датчиков управления. Данный эффект зависит от количества датчиков управления, а не их типа, и справедлив как для электромагнитных, так и для электростатических датчиков управления. Поэтому уравнения (6.2)–(6.5) не допускают столь простого анализа, как было описано в работах с шестнадцатью электростатическими датчиками управления [16, 17]. Можно заметить, что уравнения (6.2),

(6.3) указывают на уменьшение амплитуды колебаний в результате демпфирования. Уравнение (6.5) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Наибольший интерес представляет уравнение (6.4), из которого следует оценка модуля угловой скорости дрейфа ВТГ:

$$\left| \frac{d\theta_*}{dt} \right| \leq \tilde{\eta} \left(\frac{3}{8} kr + \frac{5}{32} \varepsilon (k^2 + r^2) \right). \quad (6.6)$$

Согласно (6.6), угловая скорость дрейфа ВТГ оценивается двумя принципиально разными слагаемыми. Первое слагаемое оценки (6.6) зависит прямо пропорционально от амплитуд основной и квадратурной волн колебаний r, k , что согласуется с работами [9, 16, 17]. Для устранения угловой скорости дрейфа, вызываемой нелинейностью, в гироскопах данного класса амплитуду колебаний r поддерживают постоянной, а квадратуру k – стремятся уменьшить до нуля [9]. Однако при таком стандартном способе компенсации угловой скорости дрейфа ВТГ не будет компенсироваться угловая скорость дрейфа, оцениваемая вторым слагаемым (6.6).

Таким образом, формула (6.6) устанавливает наличие неустранимого дрейфа ВТГ при использовании схемы ВТГ с восьмью датчиками управления. В силу общности вида исследуемых нелинейных дифференциальных уравнений, данный факт справедлив не только для ВТГ с электромагнитными датчиками управления, но и для широко используемых ВТГ с электростатическими датчиками управления. Малый параметр ε характеризует электрическую цепь управления колебаниями: для цепи с электростатическими датчиками управления значение $\varepsilon \sim 10^{-8}$ экстремально мало [16], что позволяет пренебречь вторым слагаемым оценки типа (6.6), но для цепи с электромагнитными датчиками управления значение $\varepsilon \sim 0.1$ приводит к огромным значениям дрейфа ВТГ. Чтобы уменьшить значения параметров $\tilde{\eta}, \varepsilon$, влияющих на точность ВТГ, для схем с электромагнитными датчиками управления используется добавочное сопротивление. Однако следует отметить, что для схемы с шестнадцатью датчиками управления как электростатическими [17], так и электромагнитными угловая скорость дрейфа полностью компенсируется, если квадратура k обращается в ноль.

Пример. Вычислим оценку угловой скорости дрейфа ВТГ с цилиндрическим резонатором и восьмью электромагнитными датчиками управления. Как рассматривали в примере ранее, $\omega = 8637 \text{ c}^{-1}$, безразмерные малые параметры $\tilde{\eta} = 3.35 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 0.029$. Сначала примем относительные амплитуды основной и квадратурной волн колебаний $r = 0.05$ и $k = 0.0005$ (соответственно 10 мкм и 0.1 мкм). Тогда оценка угловой скорости дрейфа, вычисляемая по формуле (6.6), складывается из

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{3}{8} \tilde{\eta} kr \approx 3.1 \cdot 10^{-8}, \quad \tilde{\Delta}_2 = \frac{5}{32} \tilde{\eta} \varepsilon (k^2 + r^2) \approx 3.8 \cdot 10^{-8}.$$

В размерном времени $\Delta_1 = \tilde{\Delta}_1 \omega \approx 2.7 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, $\Delta_2 = \tilde{\Delta}_2 \omega \approx 3.28 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, что соответствует $111^\circ/\text{ч}$ и $135^\circ/\text{ч}$. Тогда пусть в электрическую цепь добавлено специальное добавочное сопротивление так, что $R_e = 200 \text{ Ом}$, при этом, чтобы

поддерживать то же значение тока, подается опорное напряжение $U_0 = 100$ В. Тогда малый параметр $\varepsilon = L_0\omega / R_e \approx 4.4 \cdot 10^{-4}$ и некомпенсируемая угловая скорость дрейфа оценивается величиной $\Delta_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹, что соответствует 2 °/ч и также является неприемлемым для гироскопов, применяемых в навигационных системах.

Полученные расчеты позволяют сделать вывод о неприменимости схемы ВТГ с восьмью электромагнитными датчиками управления.

7. Нелинейные эффекты динамики резонатора в случае шестнадцати электромагнитных датчиков управления. В разделе 2 данной работы была выведена наиболее общая исходная математическая модель (2.25)–(2.27), которая объединяет уравнения колебаний резонатора с нелинейностью, вызванной произвольным количеством электромагнитных датчиков управления, и сингулярно возмущенные уравнения электромагнитных колебаний в цепях датчиков управления. В разделах 3–6 данной работы для математической модели (2.25)–(2.27) строились приближенные математические модели в случае восьми датчиков управления. В итоге был сделан важный вывод о неприменимости данной схемы управления колебаниями резонатора из-за наличия неустранимой угловой скорости дрейфа, вызванной использованием восьми датчиков управления. В данном разделе мы повторим действия, проделанные в разделах 3–5 для схемы ВТГ с шестнадцатью электромагнитными датчиками управления. Во многом данные действия будут также повторять работу [17], где рассматривался ВТГ с шестнадцатью электростатическими датчиками управления, поэтому далее опустим проводимые преобразования.

Напряжения $U_j, j=1, \dots, 16$, подаваемые на $n=16$ электромагнитов управления, имеют в данном случае вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_9 = 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu \tau + u_2 \cos \mu \tau, \\ U_5 &= U_{13} = 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu \tau - u_2 \cos \mu \tau, \\ U_3 &= U_{11} = 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu \tau + u_4 \cos \mu \tau, \\ U_7 &= U_{15} = 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu \tau - u_4 \cos \mu \tau, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $u_A(\tau)$, $u_B(\tau)$ – нормализованные управляющие напряжения, подаваемые, соответственно, на группу электродов № 1, 5, 9, 13 и смешенную относительно них на угол 45° группу электродов № 3, 7, 11, 15. На остальных электродах (с четными номерами) разность потенциалов задается равной опорному напряжению: $U_{2k} = U_0$, $k=1\dots8$.

Для компоненты Y решения (2.25)–(2.27) возьмем приближения (4.3), (4.4) без подстановки $\tilde{X}(\tau)$ вдали от начальных условий:

$$\begin{aligned} Y_j^{[0]} + \varepsilon Y_j^{[1]} &\approx -\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_1)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_1)}{d_j^3(x_1)} x_2 \right), \quad j=1, 5, 9, 13, \\ Y_j^{[0]} + \varepsilon Y_j^{[1]} &\approx -\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_3)} - \varepsilon \left(\frac{h'_j(\tau)}{d_j^2(x_3)} - \frac{h_j(\tau)d'_j(x_3)}{d_j^3(x_3)} x_4 \right), \quad j=3, 7, 11, 15, \end{aligned}$$

$$Y_j^{[0]} + \varepsilon Y_j^{[1]} \approx -\frac{h_j(\tau)}{d_j(x_1, x_3)} + \varepsilon h_j(\tau) \left(\frac{d'_{j,x_1}(x_1, x_3)}{d_j^3(x_1, x_3)} x_2 + \frac{d'_{j,x_3}(x_1, x_3)}{d_j^3(x_1, x_3)} x_4 \right),$$

$$j = 2k, k = 1\dots 8$$

подставим их в уравнения (2.25), описывающие колебания резонатора. Используя (3.9) и разложения в ряд (5.1), с учетом нелинейных слагаемых до третьей степени, примем приближения в уравнениях, описывающих динамику резонатора ВТГ:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - \tilde{\gamma}x_2 + \tilde{\nu}x_4 + \tilde{\eta} \left(2x_1 + 3(x_1^2 + x_3^2)x_1 - 2\varepsilon x_2 - 5\varepsilon(x_1^2 + x_3^2)x_2 - \right. \\ &\quad \left. - 10\varepsilon(x_1x_2 + x_3x_4)x_1 + (1 + 3x_1^2 - 8\varepsilon x_1 x_2)u_A - 3\varepsilon x_1 u'_A \right), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -x_3 - \tilde{\gamma}x_4 - \tilde{\nu}x_2 + \tilde{\eta} \left(2x_3 + 3(x_1^2 + x_3^2)x_3 - 2\varepsilon x_4 - 5\varepsilon(x_1^2 + x_3^2)x_4 - \right. \\ &\quad \left. - 10\varepsilon(x_1x_2 + x_3x_4)x_3 + (1 + 3x_3^2 - 8\varepsilon x_3 x_4)u_B - 3\varepsilon x_3 u'_B \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

В выведенной системе дифференциальных уравнений (7.2) видно существенное отличие нелинейных слагаемых от системы уравнений (5.2), за исключением слагаемых, содержащих управляющие напряжения. Заметим, что по системе дифференциальных уравнений (7.2) виден четкий физический смысл линейных и нелинейных слагаемых. Величина $\tilde{\eta}(2 + 3(x_1^2 + x_3^2) - 10\varepsilon(x_1x_2 + x_3x_4))$ представляет изменение жесткости в случае применения электромагнитных датчиков управления, соответствующее “отрицательной электростатической жесткости” [16]. Величина $\tilde{\eta}\varepsilon(2 + 5(x_1^2 + x_3^2))$ соответствует усилию демпфирования при учете электрического сопротивления цепи управления колебаний.

Запишем (7.2) в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (\mathbf{A}_0 + \tilde{\eta}\mathbf{A}(\tau))\mathbf{x} + \tilde{\eta}(\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) - \varepsilon\mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\tau)), \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\gamma_* - 2\varepsilon & 0 & \nu_* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_* & 1 & -\gamma_* - 2\varepsilon \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где обозначены $\gamma_* = \tilde{\gamma} / \tilde{\eta}$, $\nu_* = \tilde{\nu} / \tilde{\eta}$,

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ (x_1^2 + x_3^2)x_1 + x_1^2 u_A \\ 0 \\ (x_1^2 + x_3^2)x_3 + x_3^2 u_B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_A \\ 0 \\ u_B \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5(x_1^2 + x_3^2)x_2 + 10(x_1x_2 + x_3x_4)x_1 + 8x_1x_2u_A + 3x_1u'_A \\ 0 \\ 5(x_1^2 + x_3^2)x_4 + 10(x_1x_2 + x_3x_4)x_3 + 8x_3x_4u_B + 3x_3u'_B \end{pmatrix}.$$

Следуя алгоритму, описанному в разделе 5 данной статьи, проводя преобразования, аналогичные (5.3)–(5.9), получаем стандартную форму системы дифференциальных уравнений для метода осреднения [17]. Проведя осреднение, получим нелинейную математическую модель в медленных переменных, которая учитывает сопротивление электрической цепи управления колебаниями резонатора ВТГ с шестнадцатью датчиками управления:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \tilde{\eta}(\mathbf{Cr} + \mathbf{N}_1(\mathbf{r}) - \varepsilon\mathbf{N}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{F}), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma_* - 2\varepsilon & -2(1 + \lambda_*) & v_* & 0 \\ 2(1 + \lambda_*) & -\gamma_* - 2\varepsilon & 0 & v_* \\ -v_* & 0 & -\gamma_* - 2\varepsilon & -2(1 + \lambda_*) \\ 0 & -v_* & 2(1 + \lambda_*) & -\gamma_* - 2\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(z) = \frac{3}{8} \cdot & \begin{pmatrix} -3(p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1q_1^2) - 2q_1q_2p_2 - p_1q_2^2 + (3p_1^2 + q_1^2)u_1 - 2q_1p_1u_2 \\ 3(q_1^3 + q_1q_2^2 + q_1p_1^2) + 2p_1p_2q_2 + q_1p_2^2 + (p_1^2 + 3q_1^2)u_2 - 2q_1p_1u_1 \\ -3(p_2^3 + p_1^2p_2 + q_2^2p_2) - 2q_1p_1q_2 - q_1^2p_2 + (3p_2^2 + q_2^2)u_3 - 2q_2p_2u_4 \\ 3(q_2^3 + q_1^2q_2 + q_2p_2^2) + 2p_1p_2q_1 + q_2p_1^2 + (p_2^2 + 3q_2^2)u_4 - 2q_2p_2u_3 \end{pmatrix}, \\ N_2(z) = \frac{5}{8} \cdot & \begin{pmatrix} 3q_1(p_1^2 + q_1^2 + q_2^2) + 2p_1p_2q_2 + q_1p_2^2 + (q_1^2 - p_1^2)u_2 - 2q_1p_1u_1 \\ 3p_1(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2) + 2q_1q_2p_2 + p_1q_2^2 + (q_1^2 - p_1^2)u_1 + 2q_1p_1u_2 \\ 3q_2(q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + 2p_1p_2q_1 + q_2p_1^2 + (q_2^2 - p_2^2)u_4 - 2q_2p_2u_3 \\ 3p_2(p_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + 2q_1p_1q_2 + q_1^2p_2 + (q_2^2 - p_2^2)u_3 + 2q_2p_2u_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Будем исследовать угловую скорость дрейфа ВТГ с шестнадцатью электромагнитными датчиками управления при наличии постоянного опорного напряжения: $U_0 \neq 0$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, с использованием замены переменных (6.1) в системе (7.3). В результате выполненных преобразований получена система:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{\gamma_*}{2} + \varepsilon \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2) \right) \right) r, \quad \frac{dk}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{\gamma_*}{2} + \varepsilon \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2) \right) \right) k, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(\frac{1}{4}v_* - \frac{3}{8}kr \right), \quad \frac{d\chi}{d\tau} = -\tilde{\eta} \left(1 + \frac{9}{8}(k^2 + r^2) \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

В отличие от уравнений (6.2)–(6.5), полученные уравнения (7.4) допускают достаточно простой анализ. Первые два уравнения системы (7.4) указывают на то, что амплитуда колебаний уменьшается в результате демпфирования. Из третьей формулы (7.4) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ задается формулой:

$$\frac{d\theta_*}{d\tau} = \frac{3}{8} \tilde{\eta} kr, \quad (7.5)$$

в которой нет зависимости от параметра ε . Четвертое уравнение системы (7.4) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Из полученной формулы угловой скорости дрейфа ВТГ следует возможность полной компенсации дрейфа стандартной методикой, при которой амплитуду колебаний r поддерживают постоянной, а k уменьшают до нуля [9]. Таким образом, показано, что для ВТГ с электромагнитными датчиками управления приемлемой является только схема с шестнадцатью датчиками управления.

Исследуем режим вынужденных колебаний резонатора ВТГ с шестнадцатью электромагнитными датчиками управления при подаче управляющих напряжений $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, $u_2 = u$, то есть $u_A(\tau) = u \cos \mu \tau$, $u_B(\tau) = 0$. Вынужденные колебания резонатора исследуем в медленных переменных $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, которые являются амплитудами и фазами колебаний:

$$x_1 = A \sin(\mu \tau + \varphi), \quad x_3 = B \sin(\mu \tau + \psi),$$

и будем использовать замену переменных

$$q_1 = A \sin \varphi, \quad p_1 = A \cos \varphi, \quad q_2 = B \sin \psi, \quad p_2 = B \cos \psi$$

в осредненной системе (7.3) с медленными переменными $q_1(\tau)$, $p_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, $p_2(\tau)$. Одним из стационарных режимов колебаний является режим [34] с нулевой амплитудой $B = 0$. Тогда, используя систему осредненных уравнений в новых переменных $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, запишем уравнения для определения амплитуды A и фазы колебаний φ :

$$\begin{aligned} -4A \left(\gamma_* + 2\varepsilon + \frac{15}{4} A^2 \varepsilon \right) + (4 + 3A^2) u \cos \varphi - 8A^2 u \varepsilon \sin \varphi &= 0, \\ A \left(8 + 8\lambda_* + 9A^2 \right) + (4 + 9A^2) u \sin \varphi - 8A^2 u \varepsilon \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

Далее принимаем, что

$$\frac{4A \left(\gamma_* + 2\varepsilon + \frac{15}{4} A^2 \varepsilon \right)}{u \sqrt{(4 + 3A^2)^2 + (8A^2 \varepsilon)^2}} = \cos(\varphi + \vartheta_1), \quad -\frac{A(8 + 8\lambda_* + 9A^2)}{u \sqrt{(4 + 9A^2)^2 + (8A^2 \varepsilon)^2}} = \sin(\varphi - \vartheta_2),$$

где

$$\cos \vartheta_1 = \frac{(4 + 3A^2)^2}{\sqrt{(4 + 3A^2)^2 + (8A^2 \varepsilon)^2}}, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{(8A^2 \varepsilon)^2}{\sqrt{(4 + 3A^2)^2 + (8A^2 \varepsilon)^2}},$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{(4 + 9A^2)^2}{\sqrt{(4 + 9A^2)^2 + (8A^2\varepsilon)^2}}, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{(8A^2\varepsilon)^2}{\sqrt{(4 + 9A^2)^2 + (8A^2\varepsilon)^2}},$$

$$\cos \vartheta_1 \approx 1, \quad 0 < \sin \vartheta_1 \ll 1, \quad \cos \vartheta_2 \approx 1, \quad 0 < \sin \vartheta_2 \ll 1,$$

поэтому считаем, что

$$\cos^2(\varphi + \vartheta_1) + \sin^2(\varphi - \vartheta_2) \approx 1,$$

и получаем из (7.6) выражение для резонансной кривой:

$$\frac{16A^2 \left(\gamma_* + 2\varepsilon + \frac{15}{4}A^2\varepsilon \right)^2}{\left((4 + 3A^2)^2 + (8A^2\varepsilon)^2 \right)} + \frac{A^2(8 + 8\lambda_* + 9A^2)^2}{\left((4 + 9A^2)^2 + (8A^2\varepsilon)^2 \right)} = u^2. \quad (7.7)$$

Таким образом, полученное аналитическое выражение (7.7) приближенно описывает амплитудно-частотные характеристики колебаний, учитывая, помимо кубической нелинейности и квадратичной нелинейности при управлении, также и электрическое сопротивление цепи управления колебаниями.

Применяя к (7.7) формулу дифференцирования неявной функции, получаем условие экстремума $A(\lambda)$, из которого следует, что $A(\lambda)$ имеет экстремум в точке

$$\lambda_* = -\frac{9}{8}A^2.$$

Для определения максимального значения амплитуды подставляем полученное значение частотной настройки в выражение (7.7) и получаем нелинейное уравнение относительно амплитуды A :

$$A_{\max}^2 \left(4\gamma_* + (8 + 15A_{\max}^2)\varepsilon \right)^2 - u^2 \left((4 + 3A_{\max}^2)^2 + 64A_{\max}^4\varepsilon^2 \right) = 0, \quad (7.8)$$

из которого определяется A_{\max} . Тогда можно рассчитать:

$$\lambda_{\max} = -\frac{9}{8}\tilde{\eta}\omega A_{\max}^2, \quad (7.9)$$

При $\varepsilon > 0$ A_{\max} определяется из нелинейного уравнения (7.8) численно. При $\varepsilon = 0$ уравнение (7.8) имеет решение, задающее максимальную амплитуду при $\varepsilon = 0$:

$$A_{\max}^{(\varepsilon=0)} = \frac{2}{3u} \left(\gamma_* - \sqrt{\gamma_*^2 - 3u^2} \right) = \frac{2}{3\tilde{\eta}u} \left(\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 3\tilde{\eta}^2u^2} \right). \quad (7.10)$$

Из вычислительных экспериментов следует, что коррекция максимальной амплитуды при учете $\varepsilon > 0$ происходит в сторону уменьшения, что соответствует дополнительному демпфированию колебаний при учете электрического сопротивления цепи управления. Из формулы следует незначительная коррекция резонансной частоты при коррекции максимальной амплитуды колебаний в связи с учетом электрического сопротивления.

Пример. Рассмотрим смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, обусловленное нелинейностью колебаний цилиндрического резонатора ВТГ с шестнадцатью электромагнитными датчиками управления. Как в предыдущем примере, примем, $\omega = 8637 \text{ с}^{-1}$, безразмерный параметр $\tilde{\eta} = 3.35 \cdot 10^{-3}$. Управляющее напряжение $u = 0.01$. Будем рассматривать ситуации, когда учитывается параметр ε в двух случаях: $\varepsilon = 0.029$ и $\varepsilon = 4.4 \cdot 10^{-4}$ (при подключении добавочного сопротивления, см. пример в разделе 6), а также когда пренебрегаем ε , то есть $\varepsilon = 0$. Пусть $\varepsilon = 0$, тогда по формуле (7.10) получим $A_{\max}^{(\varepsilon=0)} = 0.171$, $\lambda_{\max} = -0.95 \text{ с}^{-1}$. Если $\varepsilon = 0.029$, то при численном решении (7.8) получим $A_{\max} = 0.168$, $\lambda_{\max} = -0.92 \text{ с}^{-1}$. Если $\varepsilon = 0.029$, то при численном решении (7.8) получим $A_{\max} = 0.085$, $\lambda_{\max} = -0.24 \text{ с}^{-1}$. То есть если используется в схеме ВТГ с электромагнитными датчиками добавочное сопротивление, то параметр ε мал и его влияние на нелинейные свойства колебаний невелико. Если используется ВТГ с электромагнитными датчиками без добавочного сопротивления либо если оно мало, то необходим учет параметра ε , поскольку при математическом моделировании колебаний резонатора без учета ε наблюдается существенное искажение результатов.

Заключение. Выведена математическая модель нелинейной динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электромагнитными датчиками управления, которая во взаимосвязанной форме описывает нелинейные колебания резонатора и электрические процессы контура управления колебаниями. Полученная математическая модель представляет нелинейную систему дифференциальных уравнений, которая содержит сингулярно возмущенные уравнения, причем сингулярно возмущенными являются уравнения электрических процессов. Учитывалась нелинейность, вызванная конечным отношением малого прогиба к малому зазору датчика управления. Предложены способы построения приближенных решений.

Показано принципиальное отличие нелинейных слагаемых уравнений динамики резонатора ВТГ при использовании восьми и шестнадцати датчиков управления. Показано, что при использовании электромагнитных датчиков управления необходимо учитывать малый параметр, сингулярно входящий в дифференциальные уравнения электрических процессов. Данный параметр экстремально мал в случае ВТГ с электростатическими датчиками, однако для ВТГ с электромагнитными датчиками его пренебрежение может приводить к неадекватным результатам математического моделирования. Показано, что использование добавочного сопротивления совместно с увеличением напряжения в цепи управления колебаниями приводит к уменьшению сингулярно входящего в математическую модель малого параметра и, следовательно, к повышению точностных характеристик прибора. По оценке угловой скорости дрейфа сделан вывод о неприменимости схемы гироскопа с восьмью электромагнитными датчиками управления из-за полученного значения некомпенсируемой угловой скорости дрейфа. Для ВТГ с шестнадцатью датчиками управления выведена формула угловой скорости дрейфа, которую можно скомпенсировать, а также предложен способ вычисления смещения резонансного пика амплитудно-частотной характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00546).

Замечание редакции. Утверждение о 8 датчиках требует дополнительного обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Переляев С.Е.* Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // Новости навигации. 2018. № 2. С. 21–27.
2. *Переляев С.Е.* Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии // Сборник материалов юбилейной XXX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. 2023. С. 431–435.
3. *Пешехонов В.Г.* Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. № 2 (109). С. 3–10.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.0028>
4. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркульев И.В., Ниналов И.Г.* Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. № 1. С. 3–25.
5. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017. 194 с.
6. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
7. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
8. *Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
9. *Журавлёв В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
10. *Журавлёв В.Ф.* Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 186–192.
11. *Жбанов Ю. К., Журавлев В.Ф.* О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 4–16.
12. *Журавлёв В.Ф.* Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 19–23.
13. *Климов Д.М.* О движении упругого нерастяжимого кольца // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 55–56.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060052>
14. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркульев И.В.* Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. № 2 (89). С. 71–80.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.2015.23.1.071-080>
15. *Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Increase in the accuracy of the parameters identification for a vibrating ring microgyroscope operating in the forced oscillation mode with nonlinearity taken into account // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 3. P. 377–386.
<https://doi.org/10.20537/nd180308>
16. *Маслов Д.А. Меркульев И.В.* Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 88–110.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050068>

-
17. *Maslov D.A.* Nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope taking into account the electrical resistance of an oscillation control circuit // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2023. V. 19. № 3. P. 409–435.
<https://doi.org/10.20537/nd230602>
 18. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркульев И.В.* Исследование стационарных режимов колебаний резонатора гироскопа при наличии позиционного и сопутствующего ему параметрического возбуждения // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 61–69.
 19. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркульев И.В.* Учет нелинейности колебаний резонаторов при идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов разных типов // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 6. С. 28–40.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050099>
 20. *Денисов Р.А., Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркульев И.В.* Влияние опорного напряжения электромагнитных датчиков управления на дрейф волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 60–71.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.2016.24.1.060-071>
 21. *Рогинский В.Д., Юрманов С.Ю., Денисов Р.А.* Способ возбуждения колебаний в чувствительном элементе твердотельного волнового гироскопа устройство для его осуществления. Пат. 2518632 Российская Федерация, 2014, бул. № 16.
 22. *Salaberry de B.* Vibrating Gyroscope with Electromagnetic Excitation and Detection. Pat. 6443009 USA, 2002.
 23. *Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А.* Статическая балансировка цилиндрических резонаторов волновых твердотельных гироскопов // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 43–51.
 24. *Распопов В.Я., Лихошерст В.В.* Волновые твердотельные гироскопы с металлическим резонатором // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. № 1. С. 26–44.
 25. *Качалов В.И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 654–661.
<https://doi.org/10.7868/S0044466917040056>
 26. *Качалов В.И.* Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа // Изв. Вузов. Математика. 2018. № 6. С. 25–30.
 27. *Besova M.I., Kachalov V.I.* Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 1. P. 72.
<https://doi.org/10.3390/math10010072>
 28. *Maslov D.A.* The holomorphic regularization method of Tikhonov differential equations system for mathematical modelling of the wave solid-state gyroscope dynamics // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21. № 2. P. 233–248.
<https://doi.org/10.20537/nd241106>
 29. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. Ленингр. отделение, 1975. 256 с.
 30. *Власов В.З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
 31. *Егормин Н.Е.* О прецессии стоячих волн колебаний врачающейся осесимметричной оболочки // Изв. РАН. МТТ. 1986. № 1. С. 142–148.
 32. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

33. Журавлёв В.Ф., Клинов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
34. Меркульев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.

NONLINEAR DYNAMICS OF CYLINDRICAL RESONATOR OF WAVE SOLID-STATE GYROSCOPE WITH ELECTROMAGNETIC CONTROL SENSORS

D. A. Maslov ^{a, *}

^a*National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI), Moscow,
Russia*

**e-mail: MaslovDmA@mpei.ru*

Abstract – The article considers the nonlinear dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope with electromagnetic control sensors. A mathematical model that describes nonlinear resonator oscillations and electrical processes of the oscillation control circuit in an interconnected form is deduced. The resulting mathematical model represents a nonlinear system of differential equations, which contains singularly perturbed equations, and the equations of electrical processes are singularly perturbed. The nonlinearity caused by the finite ratio of the small deflection to the small gap of the control sensor is taken into account. The methods of constructing approximate solutions are proposed. The fundamental difference between the nonlinear terms of the equations of resonator dynamics using eight and sixteen control sensors is shown. It is shown that by using electromagnetic control sensors it is necessary to take into account a small parameter singularly included in the differential equations of electrical processes. According to the estimation of the angular drift velocity, it is concluded that the gyroscope circuit with eight electromagnetic control sensors is inapplicable due to the obtained value of the uncompensated angular drift velocity. In the case of a gyroscope with sixteen control sensors, a formula for the angular drift velocity which can be compensated is derived and a method for calculating the displacement of the resonant peak of the amplitude-frequency response is proposed.

Keywords: wave solid-state gyroscope, electromagnetic sensors, cylindrical resonator, nonlinear differential equations, singularly perturbed equations, nonlinear oscillations, drift angular velocity

REFERENCES

1. Pereleyaev S.E. Review and analysis of the lines of development of strapdown inertial navigation systems on the basis of hemispherical resonator gyroscopes // Novosti Navig. 2018. № 2. P. 21–27.

-
2. *Pereleyaev S.E.* Current State of Wave Solid-State Gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy // Proc. of 2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS) (Kontsern TsNII Elektropribor, St. Petersburg, 2023). P. 500–505.
<https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168310>
 3. *Peshekhonov V.G.* The outlook for gyroscopy // Gyroscopy Navig. 2020. V. 11. № 3. P. 193–197.
<https://doi.org/10.1134/S2075108720030062>
 4. *Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V., Ninalalov I.G.* Hemispherical Resonator Gyros (An Overview of Publications) // Gyroscopy Navig. 2023. V. 14. № 1. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1134/S2075108723010054>
 5. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph., Zbanov Yu.K.* Quartz Hemispherical Resonator (Wave-Based Solid-State Gyroscope). M.: “Kim L.A., 2017 [in Russian].
 6. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Wave Solid-State Gyroscope. M.: Nauka, 1985 [in Russian].
 7. *Zhuravlev V.Ph.* Theoretical foundations of solid-state wave gyroscopes // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 3. P. 3–15.
 8. *Zhuravlev V.Ph., Lynch D.D.* Electric model of a hemispherical resonator gyro // Mech. Solids. 1995. V. 30. № 5. P. 10–21.
 9. *Zhuravlev V.Ph.* Global evolution of state of the generalized Foucault pendulum // Mech. Solids. 1998. V. 33. № 6. P. 3–8.
 10. *Zhuravlev V.Ph.* Identification of errors of the generalized Foucault pendulum // Mech. Solids. 2000. V. 35. № 5. P. 155–160.
 11. *Zbanov Yu.K., Zhuravlev V.Ph.* On the balancing of a hemispherical resonator gyro // Mech. Solids. 1998. V. 33. № 4. P. 2–13.
 12. *Zhuravlev V.Ph.* Drift of an imperfect hemispherical resonator gyro // Mech. Solids. 2004. V. 39. № 4. P. 15–18.
 13. *Klimov D.M.* On the motion of an elastic inextensible ring // Mech. Solids. 2021. V. 56. P. 930–931.
<https://doi.org/10.3103/S002565442106008X>
 14. *Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Nonlinear effects in dynamics of cylindrical resonator of wave solid-state gyro with electrostatic control system // Gyroscopy Navig. 2015. V. 6. P. 224–229.
<https://doi.org/10.1134/S2075108715030104>
 15. *Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Increase in the accuracy of the parameters identification for a vibrating ring microgyroscope operating in the forced oscillation mode with nonlinearity taken into account // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 3. P. 377–386.
<https://doi.org/10.20537/nd180308>
 16. *Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Impact of nonlinear properties of electrostatic control sensors on the dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope // Mech. Solids. 2021. V. 56. P. 960–979.
<https://doi.org/10.3103/S002565442106011X>
 17. *Maslov D.A.* Nonlinear Dynamics of a Wave Solid-State Gyroscope Taking into Account the Electrical Resistance of an Oscillation Control Circuit // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2023. V. 19. № 3. P. 409–435.
<https://doi.org/10.20537/nd230602>

18. *Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Studying stationary oscillation modes of the gyro resonator in the presence of positional and parametric excitations // *Gyroscopy Navig.* 2014. V. 5. P. 224–228.
<https://doi.org/10.1134/S2075108714040099>
19. *Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Accounting for Nonlinearity of Resonator Oscillations in the Identification of Parameters of Solid-State Wave Gyroscopes of Different Types // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. P. 1300–1310.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422060073>
20. *Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V.* How the reference voltage of electromagnetic control sensors affects the drift of wave solid-state gyroscopes // *Gyroscopy Navig.* 2016. V. 7. P. 231–238.
<https://doi.org/10.1134/S2075108716030032>
21. *Roginskii V.D., Yurmanov S.Yu., Denisov R.A.* The method for exciting oscillations in the HRG sensor and the device to implement it. Patent 2518632 RF, Byull. no. 16, 2014.
22. *Salaberry B.* Vibrating Gyroscope with Electromagnetic Excitation and Detection. Pat. 6443009 USA, 2002.
23. *Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A.* Static balancing of metal resonators of cylindrical resonator gyroscopes // *Gyroscopy Navig.* 2014. V. 5. P. 213–218.
<https://doi.org/10.1134/S2075108714040038>
24. *Raspopov V.Y., Likhoshverst V.V.* HRG with a Metal Resonator // *Gyroscopy Navig.* 2023. V. 14. № 1. P. 14–26.
<https://doi.org/10.1134/S2075108723010066>
25. *Kachalov V.I.* On the holomorphic regularization of singularly perturbed systems of differential equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2017. V. 57. № 4. P. 653–660.
<https://doi.org/10.1134/S0965542517040054>
26. *Kachalov V.I.* On One Method of Solving Singularly Perturbed Systems of Tikhonov's Type // *Russian Mathematics.* 2018. V. 62. № 6. P. 21–26.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X18060038>
27. *Besova M.I., Kachalov V.I.* Analytical Aspects of the Theory of Tikhonov Systems // *Mathematics.* 2022. V. 10. № 1. P. 72.
<https://doi.org/10.3390/math10010072>
28. *Maslov D.A.* The holomorphic regularization method of Tikhonov differential equations system for mathematical modelling of the wave solid-state gyroscope dynamics // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025. Vol. 21. № 2. P. 233–248.
<https://doi.org/10.20537/nd241106>
29. *Filin A.P.* Elements of the Theory of Shells. Leningrad: Stroyizdat, 1975 [in Russian].
30. *Vlasov V.Z.* Selected Works, V. 1: The General Theory of Shells. M.: AN SSSR, 1962 [in Russian].
31. *Egarmin N.E.* On precession of standing waves of vibrations of a rotating axisymmetric shell // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela.* 1986. № 1. P. 142–148.
32. *Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G.* Differential Equations. M.: Fizmatlit, 2005 [in Russian].
33. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods in Vibration Theory. M.: Nauka, 1988 [in Russian].
34. *Merkuryev I.V., Podalkov V.V.* Dynamics of Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscopes. M.: Fizmatlit, 2009 [in Russian].