ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 3, с. 59–72

УДК 539.3

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ТРЕЩИНОЙ

© 2025 г. Л. А. Алексеева[a], *, Б. Н. Алипова[b, c], **

[a]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[b]*Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
[c]*Университет Кентукки, Лексингтон, США*

***E-mail: alexeeva@math.kz, **e-mail: alipova.bakhyt@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.10.2024 г.
После доработки 06.11.2024 г.
Принята к публикации 17.11.2024 г.

Рассматривается динамика изотропной термоупругой среды при образовании трещин с произвольной геометрией ее поверхности и нераскрывающимися берегами. При таком процессе в среде возникают ударные термоупругие волны. Рассмотрен закон сохранения энергии для термоупругой среды с учетом ударных волн. Для ударных термоупругих волн с использованием метода обобщенных функций получены условия на скачки напряжений, скоростей, тепловых потоков и плотности энергии на их фронтах. Модель трещины определяет взаимосвязь между скачками напряжений и скоростями относительного смещения берегов трещины. Задача поставлена и решена в пространстве обобщенных вектор-функций. Решение представлено в виде тензорно-функциональной свертки тензора Грина уравнений связанной термоупругости с сингулярной массовой силой, содержащей простые и двойные слои, плотности которых определяются скачком скоростей, напряжений, температур и тепловых потоков на берегах трещины. Последние определяют модель трещины и предполагаются известными.

Ключевые слова: уравнения связанной термоупругости, трещина, температура, перемещение, напряжение, тепловой поток, ударные термоупругие волны, тензор Грина, преобразование Лапласа, метод обобщенных функций

DOI: 10.31857/S1026351925030048, **EDN:** AZKGRW

1. Введение. Теория трещин занимает особое место в механике твердого деформируемого тела. Важное практическое значение задач прочности, выяснение причин таких явлений, как разрушение и потеря несущей способности конструкции, усовершенствование материалов, требует изучения механики разрушения. Можно назвать и другие области, где статика и динамика трещин играют важную роль: геология, сейсмология, судоходство в ледовых условиях и т.д. В сейсмологии, например, изучение очагов землетрясений методами математического моделирования приводит к задачам динамики трещин в деформируемых твердых средах. Наиболее изученными являются задачи статики и динамики прямолинейных и плоских трещин в упругих и упругопластических средах в работах Д. Райса, Черепанова Г.П., Гузя А.Н., Слепяна Л.И. и других [1–6]. Однако поверхность трещины может иметь сложную геометрию, поэтому актуальной является задача возникновения таких трещин и динамических процессов, сопровождающих их появление и развитие. Отметим, что число работ в этом направлении весьма ограничено. Разработка эффективных моделей для изучения таких явлений является актуальной научной проблемой.

В работе [7] с использованием метода обобщенных функций разработана модель динамики упругой среды при образовании трещины произвольной геометрии с нераскрывающимися берегами. Здесь рассматривается математическая модель динамики породного массива при образовании трещины с использованием модели связанной термоупругости. Эта модель учитывает как упругие, так и теплопроводные свойства среды. Задача поставлена и решена в пространстве обобщенных функций. С использованием трансформанты Лапласа тензора Грина [8, 9] решение представлено в виде тензорно-функциональной свертки тензора с сингулярной правой частью уравнений термоупругости, содержащей простые и двойные слои, плотности которых определяются скачком скоростей, напряжений, температур и тепловых потоков на берегах трещины.

При возникновении трещин в среде возникают ударные термоупругие волны [10], на фронтах которых происходит скачок напряжений, скоростей и тепловых потоков. С использованием метода обобщенных функций определены условия на фронтах ударных волн.

2. Определяющие соотношения связанной термоупругости. Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом положительных термодинамических параметров: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ и μ, а также термоупругими константами ν, η и $\varkappa$ [11].

Обозначим $u_i(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ $(i,j = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора перемещений $u(x,t)$ и тензора напряжений, $u_4 = \theta(x,t)$ – относительная температура $\theta = T - T_0$, T – абсолютная температура, $x = x_j e_j$ (всюду по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3).

Тензор напряжений связан с перемещениями $u(x,t)$ и температурой $\theta(x,t)$ соотношением Дюамеля–Неймана [11]:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda \operatorname{div} u - \nu\theta\right)\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{2.1}$$

Здесь e_j – базисные векторы, δ_{ij} – символ Кронекера, $u_{i,j} \equiv \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Уравнения движения термоупругой среды в лагранжевой декартовой системе координат описываются системой:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i,$$

$$\dot{\theta} = \kappa\Delta\theta - \eta \operatorname{div} \dot{u} + Q, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

где F_j – компоненты массовой силы; Q – мощность теплового источника; точкой над символом обозначено дифференцирование по времени. С учетом (2.1) система (2.2) приводится к виду:

$$\left(c_1^2 - 2c_2^2\right)u_{j,ji} + c_2^2 u_{i,jj} - \gamma\theta_{,i} + F_i = \ddot{u}_i ,$$

$$\Delta\theta - \kappa^{-1}\dot{\theta} - \tilde{\eta}\dot{u}_{j,j} + \kappa^{-1}Q = 0 , \tag{2.3}$$

где $\gamma = \nu/\rho$, $\tilde{\eta} = \eta/\kappa$, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ – скорости продольных и поперечных упругих волн в упругой среде с теми же упругими параметрами.

3. Ударные термоупругие волны. Условия на фронтах. Система уравнений (2.3) смешанного гиперболо-параболического типа. Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det\left\{L_{ij}^2(\nu,\nu_t)\right\} = \|\nu\|^2 \det\left\{L_{ij}^e(\nu,\nu_t)\right\}, \quad \|\nu\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 , \tag{3.1}$$

где L_{ij}^e – главная часть оператора $L_{ij}(\partial_x,\partial_t)$, содержащая только старшие производные второго порядка, и является дифференциальным оператором уравнений движения соответствующего упругого тела (λ, μ, ρ), $(\nu, \nu_t) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_t)$ – вектор нормали к характеристической поверхности в $R^4 = \{(x, t)\}$. Из (3.1) следует, что

$$\text{либо } \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 = 0, \text{ либо } \det\left\{L_{ij}^e(\nu,\nu_t)\right\} = 0.$$

Первое уравнение описывает характеристическую поверхность классического параболического уравнения, которая не определяет волновой фронт в R^4. Второе – описывает волновые фронты F_i, движущиеся в R^3 со скоростью

$$c = -\nu_t \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2} , \quad c = c_j, \ j = 1, 2. \tag{3.2}$$

Т.е. волновые фронты (термоударные волны) в термоупругой среде движутся со скоростью продольных ($j = 1$) и поперечных ($j = 2$) упругих волн.

Для вывода условий на фронтах удобно использовать аппарат теории обобщенных функций. В трехмерном пространстве обобщенных функций $D_3'(R^4)$ с учетом правил дифференцирования обобщенных функций [12] обобщенные производные функций с разрывом первого рода имеют вид:

$$\hat{u}_{i,j} = u_{i,j} + \nu_j [u_i]_F \, \delta_F(x,t) ,$$

$$\hat{u}_{i,t} = u_{i,t} + \nu_t [u_i]_F \, \delta_F(x,t) ,$$

$$\hat{u}_{i,jk} = u_{i,jk} + \nu_k \left[u_{i,j}\right]_F \delta_F(x,t) + \left(\nu_j [u_i]_F \, \delta_F(x,t)\right)_{,k} , \tag{3.3}$$

$$\hat{u}_{i,tt} = u_{i,tt} + \nu_t \left[u_{i,t}\right]_F \delta_F(x,t) + \left(\nu_t [u_i]_F \, \delta_F(x,t)\right)_{,t} ,$$

где $[u_{i,j}]_F = [u_{i,j}]_{F_t}$ – скачок частной производной $\partial u_i/\partial x_j$ на фронте ударной волны, $u_{i,jk}$, $u_{i,tt}$ – классические вторые частные производные по соответствующим координатам, $\alpha(x,t)\delta_{Ft}(x,t)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на фронте ударной волны, плотность которого определяется скачком производных на нем и вектором v. Здесь и далее помечаем шапочкой регулярную обобщенную функцию, соответствующую $u_i(x,t)$. С учетом этих равенств уравнения движения в пространстве обобщенных вектор-функций $D'_3(R^4)$ имеют вид:

$$\hat{\sigma}_{ij,j} - \rho\hat{u}_{i,tt} + \hat{F}_i = \left([\sigma_{ij}]_F \nu_j - \rho\nu_t[\dot{u}_i]_{F_t} - \rho\gamma[\theta]_{F_t}\right)\delta_F(x,t) + C_{ij}^{kl}\frac{\partial}{\partial x_j}\left([u_k]_F \nu_l \delta_F\right),$$
$$\Delta\hat{\theta} - \kappa^{-1}\hat{\theta}_{,t} - \eta\hat{u}_{j,jt} + \kappa^{-1}\hat{Q} = \left[\left(\theta_{,j} - \eta\dot{u}_j\right)v_j - \kappa^{-1}\theta v_t\right]_F \delta_F(x,t) +$$
$$+ \partial_j\left(\left[\theta v_j - \eta u_j v_t\right]_F \delta_F(x,t)\right), \tag{3.4}$$

где квадратная скобка означает скачок функции на характеристической поверхности F в R^4, соответствующей волновому фронту в R^3, C_{ij}^{kl} – тензор упругих констант, вообще говоря, анизотропной термоупругой среды. Он удовлетворяет условиям симметрии по перестановке любой пары индексов и положительной определенности соответствующей квадратичной формы [11]:

$$C_{ij}^{kl}\varepsilon_k^i\varepsilon_l^j > 0 \text{ для } \forall\varepsilon_k^i \neq 0, \tag{3.5}$$

$$C_{ij}^{kl} = C_{ji}^{kl} = C_{ij}^{lk} = C_{kl}^{ij}.$$

Для изотропной термоупругой среды он имеет вид:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda\delta_{ij}\delta^{kl} + \mu\left(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_i^l\delta_j^k\right). \tag{3.6}$$

Здесь $\delta_{ij}, \delta^{kl}, \delta_k^l$ – символ Кронеккера.

Следовательно, для того чтобы $\hat{u}$ и $\hat{\theta}$ были обобщенными решениями (3.4) и сохранялась сплошность среды, должны выполняться следующие условия на скачки решения на характеристической поверхности:

$$\left[\theta v_j - \eta u_j v_t\right] = 0,$$
$$\left[\sigma_{ij}\right]_F \nu_j - \rho\nu_t\left[\dot{u}_i\right]_{F_t} = 0, \quad \left[\left(\theta_{,j} - \eta\dot{u}_j\right)v_j - \kappa^{-1}\theta v_t\right]_F = 0. \tag{3.7}$$

Если ввести m-волновой вектор – единичный вектор, перпендикулярный F_t, направленный в сторону распространения волны с компонентами

$$m(x) = m_j(x)e_j = v_j(x)e_j / \|v\|, \tag{3.8}$$

тогда с учетом (3.7) из них получим законы сохранения на подвижных волновых фронтах в R^3:

$$[u]_F = 0, \quad [\theta]_F = 0, \tag{3.9}$$

$$m_j\left[\sigma_{ij}\right]_{F_t} = -\rho c_t\left[\dot{u}_i\right]_{F_t}, \tag{3.10}$$

$$\left[\left(\operatorname{grad}\theta, m\right)\right]_{F_l} = \eta\left[\left(\dot{u}, m\right)\right]_{F_l}. \tag{3.11}$$

Первое равенство (3.9) является условием сохранения сплошности среды, второе показывает, что на фронтах термоударных волн температура среды непрерывна. Из (3.10) следует, что скачок напряжений на фронте ударной волны пропорционален скачку скоростей, что наблюдается и для скачка градиента температуры (теплового потока) (3.11).

В силу непрерывности u выполняется условие равенства касательных производных к фронту, которое имеет вид:

$$[v_j \dot{u}_i - v_t u_{i,j}] = 0 \quad i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3, \tag{3.12}$$

поскольку вектора $\tau^i = (\delta_1^i v_t, ..., \delta_N^i v_t, -v_i)$ лежат в касательной плоскости к F:

$$\sum_{j=1}^{4} \tau_j^i v_j = \sum_{j=1}^{3} \delta_j^i v_t v_j - v_i v_t = v_i v_t - v_i v_t = 0.$$

Условие (3.10) дает связь между скачком напряжений и скачком скоростей на фронте ударной волны и совпадает с известным законом сохранения импульса на фронтах ударных волн в упругих средах [14]. Из уравнения (3.11) следует, что на фронтах термоударных волн градиент температуры терпит скачок, пропорциональный скачку нормальной составляющей к фронту скорости перемещений среды.

4. Закон сохранения энергии. Рассмотрим закон сохранения энергии для термоупругой среды с учетом ударных волн. Для удобства выкладок удобно представить тензор напряжений σ_{ij} в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l} - \gamma\delta_{ij}\theta. \tag{4.1}$$

Введем плотность энергии термоупругой среды:

$$W(u,\theta,t) = 0.5\left\{\sigma_{ij}u_{i,j} + \rho\|\dot{u}\|^2 + \gamma\theta u_{j,j} + \gamma(\eta\kappa)^{-1}\theta^2\right\} =$$

$$0{,}5\left\{C_{ij}^{kl} u_{i,j} u_{k,l} + \rho\|\dot{u}\|^2 + \gamma(\eta\kappa)^{-1}\theta^2\right\},\ i,j = 1,2,3. \tag{4.2}$$

Рассмотрим область $S^- \subset R^3$, ограниченную поверхностью S.

Т е о р е м а. Закон сохранения энергии для термоупругой среды имеет вид:

$$\int_{S^-} \left(W(u,\theta,t) - W(u,\theta,0)\right) dV(x) + \int_0^t dt \int_{S^-} \|grad\,\theta\|^2\, dV(x) =$$

$$\int_0^t dt \int_S \left(\left(\dot{u}^S, g^S\right) + \frac{\gamma}{\eta}\theta^S q^S\right) dS(y) + \int_0^t dt \int_{S^-} \left(\left(F,\dot{u}\right) + \frac{\kappa\gamma}{\eta}\theta F_{N+1}\right) dV(x), \tag{4.3}$$

где $dV(x) = dx_1 ... dx_3$.

Доказательство. В областях дифференцируемости решений умножим первое уравнение системы (3.4) скалярно на $\dot{u}_i$, а второе – на $\gamma\eta^{-1}\theta$ и просуммируем по *i* от *1* до *3*. Группируя члены, получим:

$$\left(\dot{u}_i\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta,_j\right),_j-\dot{u}_i,_j\sigma_{ij}-\gamma\eta^{-1}\theta,_j\theta,_j-0.5\rho\partial_t\left\|\dot{u}\right\|^2-$$

$$-0.5\gamma\left(\eta\kappa\right)^{-1}\partial_t\theta^2-\gamma\theta\dot{u}_j,_j+\dot{u}_iF_i+\gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1}=0.$$

Поскольку

$$\dot{u}_i,_j\sigma_{ij}=0.5\left(C_{ij}^{kl}u_i,_ju_k,_l\right),_t-\gamma\theta\dot{u}_i,_j,$$

равенство преобразуется к виду:

$$\left(\dot{u}_i\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta,_j\right),_j-W,_t-\gamma\eta^{-1}\left\|\operatorname{grad}\theta\right\|^2+\dot{u}_jF_j+\gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_4=0.$$

Проинтегрируем по $S^-\times(0,t)$, используя формулу Остроградского–Гаусса [13] для каждой из подобластей, разделенных фронтами термоударных волн:

$$\int_0^t dt\int_S\left(\dot{u}_i,_j\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta,_j\right)n_jdS(y)-\int_{S^-}\left(W\left(u,\theta,t\right)-W\left(u,\theta,0\right)\right)dV(x)-$$

$$-\gamma\eta^{-1}\int_0^t dt\int_{S^-}\left\|\operatorname{grad}\theta\right\|^2dV(x)+\sum_F\int_F\left[\left(\dot{u}_i\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta,_j\right)\nu_j-W(u,\theta,t)\nu_t\right]_F dF(x)+$$

$$+\int_0^t dt\int_{S^-}\left(\dot{u}_jF_j+\gamma\eta^{-1}\theta Q\right)dV(x)=0.$$

Здесь dF – дифференциал площади характеристической поверхности F, соответствующей волновому фронту F_l. Поскольку внешняя нормаль ограничивающей подобласти поверхности волнового фронта отличается только знаком, при интегрировании по граничным поверхностям в смежных областях в подынтегральных выражениях стоят скачки соответствующих функций на фронтах.

Вычислим эти скачки. Для этого используем условия на фронтах (3.7)–(3.11):

$$\left[\left(\dot{u}_i\sigma_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\theta,_j\right)\nu_j-W(u,\theta,t)\nu_t\right]=$$

$$=0.5\dot{u}_i(\sigma_{ij}\nu_j-\rho\dot{u}_i\nu_t)-0.5\sigma_{ij}(\nu_tu_i,_j-\dot{u}_i\nu_j)+\gamma\eta^{-1}\left[\theta\theta,_j\nu_j-0.5\nu_t(\eta\theta u_j,_j+\kappa^{-1}\theta^2)\right]=$$

$$=0.5\dot{u}_i-\left[\sigma_{ij}\nu_j-\rho\dot{u}_i\nu_t\right]\dot{u}_i^-+0.5\sigma_{ij}^-\nu_j\left[\dot{u}_i\right]-0.5\nu_tu_{i,j}^-C_{ij}^{kl}\left[u_k,_l\right]+$$

$$+0.5\nu_tu_{i,j}^-\gamma\left[\theta\right]\delta_{ij}+\gamma\eta^{-1}\theta\left[\theta,_j\nu_j\right]-0.5\gamma\theta\nu_t\left[u_j,_j\right]=$$

$$=0.5\sigma_{ij}^-\left[\nu_j\dot{u}_i-\nu_tu_i,_j\right]-0.5\gamma\nu_t\theta\left[u_j,_j\right]+\gamma\eta^{-1}\theta\left[\theta,_j\nu_j\right]-0.5\gamma\theta\nu_t\left[u_j,_j\right]=$$

$$\gamma\eta^{-1}\theta\left[\left(\theta,_j-\eta\dot{u}_j\right)\nu_j+\eta\left(\dot{u}_j\nu_j-\nu_tu_j,_j\right)\right]=0. \qquad (4.4)$$

Здесь верхние индексы “+” и “–“ обозначают предельные значения соответствующих функций с одной и другой стороны волнового фронта.

Интегрируем по поверхностям всех волновых фронтов в области интегрирования. Окончательно получим:

$$\int_0^t dt \int_S \left(\dot{u}_{i,j}\, \sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j}\right) n_j dS(y) + \int_0^t dt \int_{S^-} \left(F_j \dot{u}_j + \gamma\eta^{-1}\kappa\theta F_{N+1}\right) dV(x) =$$

$$-\int_{S^-} \left(W(u,\theta,t) - W(u,\theta,0)\right) dV(x) + \int_0^t dt \int_{S^-} \left\|\operatorname{grad}\theta\right\|^2 dV(x)\,. \tag{4.5}$$

Используя введенные обозначения для граничных функций, отсюда получим закон сохранения энергии.

Из этой теоремы следует:

Следствие. Скачок плотности энергии на фронтах термоударных волн равен

$$\left[W(u,\theta,t)\right]_F = -c^{-1}\left[u_{,i}\, \sigma_{ij} n_i e_j + \gamma\eta^{-1}\theta\left(\operatorname{grad}\theta\, n\right)\right]_F . \tag{4.6}$$

Эти соотношения можно использовать для тестирования результатов расчетов процессов, сопровождаемых ударными волнами.

5. Постановка задачи для термоупругой среды с трещиной. Рассмотрим неразвивающуюся трещину в термоупругой среде, которую будем моделировать поверхностью Ляпунова F в R^3 с краем. До начального момента времени $t=0$ среда находилась в статическом термонапряженном состоянии $u^S(x)$, $\sigma^S_{ij}(x)$, $\theta^S(x)$, в ней не было трещин. В момент $t = +0$ в среде возникает трещина (условия возникновения трещины здесь не обсуждаются). При этом на ее поверхности F происходит подвижка берегов трещины и сброс напряжений, который характеризуется скачком (3.10):

$$P(x,t) = \left[\sigma_{ij}(x,t)\right]_F n_j(x) e_i\,. \tag{5.1}$$

При этом статическое состояние среды нарушается, возникают термоупругие ударные волны, которые распространяются в среде. Ее динамическое состояние можно описать в рамках линейной теории термоупругости величинами:

$$\partial u(x,t)/\partial t\,,\ \sigma_{ij}(x,t) + \sigma^S_{ij}(x)\,,\ \theta(x,t) + \theta^S(x)\,, \tag{5.2}$$

где динамические составляющие $u(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, $\theta(x,t)$ удовлетворяют уравнениям (3.7) (но уже в отсутствии статических массовых сил и тепловых источников) и начальным условиям:

$$u(x,0) = 0\,,\ \dot{u}(x,0) = 0\,,\ \theta(x,0) = 0\,,\ x \notin F\,. \tag{5.3}$$

Скачок напряжений на трещинах в реальных материалах и средах определяется их физико-механическими свойствами и зависит прежде всего от скачка скоростей относительного смещения берегов трещины. Точнее, они взаимосвязаны и связаны с пределами прочности материалов на растяжение и сдвиг. Здесь полагаем

$$n_j\left[\sigma_{ij}\right]_F = \chi_i\left(\left[(\dot{u},n)\right]_F,[\theta]_F,\left[(\kappa\,\mathrm{grad}\,\theta,n)\right]_F\right),\ i=1,2,3, \tag{5.4}$$

где χ_i – известные функции, а скачки $[(\dot{u},n)]_F$, $[\theta]_F$, $[(\mathrm{grad}\,\theta,n)]_F$ известны либо связаны какими-то соотношениями, которые определяют модель трещины (свободная трещина, вязкий контакт берегов и т.п.). Эти связи позволяют моделировать различный тип взаимодействия берегов трещины, которая здесь является нераскрывающейся (берега трещины в процессе взаимодействия не отходят друг от друга).

Требуется определить $u(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, $\theta(x,t)$ как решение уравнений (2.3), удовлетворяющих начальным условиям (5.3), граничным условиям на скачки на берегах трещины (5.4) и условиям излучения на бесконечности:

$$u(x,t)=0,\ \theta(x,t)=0 \ \text{при}\ \|x\| > c_1 t + d, \tag{5.5}$$

где $d=\max\|x-y\|$, $x\in F$, $y\in F$. Последнее условие связано с конечностью скорости распространения термоупругих волн.

6. Построение решения задачи в пространстве обобщенных функций. Для решения поставленной задачи воспользуемся аппаратом теории обобщенных функций по методу, разработанному в работе [7] для исследования динамики упругой среды с трещиной. Запишем соотношение Дюамеля–Неймана и уравнение движения термоупругой среды в более общем и удобном для выкладок виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}u_{k,l} - \gamma\theta\delta_{ij} \quad i,j=1,2,3, \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} C_{ij}^{kl}u_{k,lj} - \gamma\theta_{,i} + \rho F_i = \rho u_{i,tt}, \\ \Delta\theta - \frac{1}{\kappa}\theta_{,t} - \eta\dot{u}_{j,j} + \frac{1}{\kappa}Q = 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь тензор упругих констант C_{ij}^{kl} имеет вид (3.6).

А теперь рассмотрим решение поставленной задачи как обобщенную вектор-функцию на пространстве обобщенных вектор-функций медленного роста:

$$\hat{u}(x,t) = \left(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t),u_4(x,t)\right)H(t),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Используя свойство производных регулярных обобщенных функций со скачком на S:

$$\partial_k\hat{u}_j = \partial_k u_j + \left[u_j\right]_S n_k\delta_S(x). \tag{6.3}$$

Здесь первое слагаемое справа – классическая производная, сингулярная обобщенная функция $\delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на S [12, 13].

Согласно (6.2) и (6.3), обобщенное решение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\hat{\sigma}_{ij,j} - \rho \hat{u}_{i,tt} = -F_i + \left[\sigma_{ij}\right]_S n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[u_k\right]_S n_l \delta_S(x)\right) - \gamma n_i \left[\theta\right]_S,$$
$$\Delta\hat{\theta} - \frac{1}{\kappa}\hat{\theta}_{,t} - \eta \hat{u}_{j,jt} = -\frac{1}{\kappa}Q + \partial_j\left(n_j\left[\theta\right]_S \delta_S(x)\right) - \left[\operatorname{grad}\theta - \eta \dot{u}_{,j}\, n\right]_S \delta_S(x). \quad (6.4)$$

Здесь в правой части уравнений появляются сингулярные обобщенные функции – простые и двойные слои на S с плотностями, зависящими от скачка напряжений, перемещений, температуры и ее градиента на трещине.

Для построения обобщенного решения полученного уравнения воспользуемся его фундаментальным решением $\hat{U}_m^i(x,t)$ – тензором Грина системы уравнений термоупругости [8, 9]. Согласно его свойству, решение уравнения (6.2) можно представить в виде тензорно-функциональной свертки тензора Грина с правой частью уравнений (6.4). Используя правила дифференцирования сверток обобщенных функций в результате, получим обобщенное решение поставленной задачи в следующем виде:

$$\hat{u}_m = \hat{U}_m^i * \left[\sigma_{ij}\right]_S n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} \hat{U}_{m,j}^i * \left[u_k\right]_S n_l \delta_S(x) H(t) - \gamma n_i \left[\theta\right]_S \delta_S(x) * \hat{U}_{m,i}^4 +$$
$$+ \left(n_j\left[\theta\right]_S \delta_S(x)\right) * \partial_j \hat{U}_m^4 - \left[\operatorname{grad}\theta - \eta \dot{u}_{,t}\, n\right]_S \delta_S(x) * \hat{U}_m^4$$

$$\hat{\theta} = \left[\sigma_{ij}\right]_S n_j \delta_S(x) * \hat{U}_4^i + \left(\left[u_k\right]_S n_l \delta_S(x)\right) * C_{ij}^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{U}_4^i - \gamma\eta\left[\theta\right]_S \delta_S(x) * \hat{U}_4^i +$$
$$+ \hat{U}_4^4 * \left[\left(\operatorname{grad}\theta - \eta \dot{u}_{,t}\, n\right)\right]_S \delta_S(x) - \partial_j \hat{U}_4^4 * \left(n_j\left[\theta\right]_S \delta_S(x)\right) \qquad m,i,j = 1,2,3, \quad (6.5)$$

и оно единственно в классе функций, допускающих свертку с $\hat{U}$.

7. Тензор Грина уравнений движения термоупругой среды и его преобразование Лапласа. Используем свойства фундаментальных решений для построения решений системы (6.5). Фундаментальные решения – это решения при действии импульсных сосредоточенных источников типа:

$$F_i = \delta_i^j \delta(x)\delta(t), \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (7.1)$$

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородной системы уравнений. Среди всех таких решений мы выделяем тензор Грина $U_{ij}(x,t)$, который удовлетворяет условиям излучения и затухания решения на бесконечности:

$$U_i^j(x,t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (7.2)$$

$$U_i^j(x,t) \to 0 \text{ при } t > 0, \quad \|x\| \to \infty \text{ либо } t > 0, \quad t \to \infty.$$

Он описывает перемещения и температуру среды при действии импульсных источников, сосредоточенных в точке $x = 0$ и порождающих термоупругие волны, распространяющиеся от источника на бесконечность. Значения его компонент зависят от направления действующей импульсной сосредоточенной силы ($j = 1,2,3$) или действия сосредоточенного импульсного теплового источника ($j = 4$).

Аналитически с использованием преобразования Фурье по координатам и преобразования Лапласа по времени возможно построение только трансформанты Лапласа по времени тензора Грина $\bar{U}_j^k(x,p)$. Эта трансформанта была построена ранее в работе [12].

Для $N = 3$ эти компоненты имеют следующий вид:

$$4\pi\mu\bar{U}_i^k = \frac{1}{r^3\beta^2}\left\{r_{,i}\, r_{,k}\, \bar{Y}_1(r,p) + \delta_i^k \bar{Y}_2(r,p)\right\},\ 4\pi\kappa\bar{U}_i^4 = \frac{r_{,i}\, m}{r^2\left(\zeta_2^2 - \zeta_1^2\right)}\bar{Y}_3(r,p), \tag{7.3}$$

$$4\pi\bar{U}_4^k = \frac{\eta p r_{,k}}{r^2(\lambda + 2\mu)\left(\zeta_2^2 - \zeta_1^2\right)}\bar{Y}_3(r,p),\ 4\pi\kappa\bar{U}_4^4 = \frac{1}{r\left(\zeta_2^2 - \zeta_1^2\right)}\bar{Y}_4(r,p),\ i, k = 1, 2, 3.$$

Здесь введены динамические функции $\bar{Y}_k(r,p)$:

$$\bar{Y}_1(r,p) = \frac{q(1+\varepsilon) - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\left(3\left(1 + \zeta_1 r\right) + \zeta_1^2 r^2\right)e^{-\zeta_1 r} -$$
$$- \frac{q(1+\varepsilon) - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\frac{3\left(1 + \zeta_2 r\right) + \zeta_2^2 r^2}{e^{\zeta_2 r}} - \frac{3\left(1 + \beta r\right) + \beta^2 r^2}{e^{\beta r}}, \tag{7.4}$$

$$\bar{Y}_2(r,p) = \frac{q\left(1+\varepsilon\right) - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\left(1 + \zeta_1 r\right)e^{-\zeta_1 r} + \frac{q\left(1+\varepsilon\right) - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\left(1 + \zeta_2 r\right)e^{-\zeta_2 r} +$$
$$+ \left[1 + \beta r\left(1 + \beta r\right)\right]e^{-\beta r},$$

$$\bar{Y}_3(r,p) = \frac{1 + \zeta_1 r}{e^{\zeta_1 r}} - \frac{1 + \zeta_2 r}{e^{\zeta_2 r}},\ \bar{Y}_4(r,p) = \left(\alpha^2 - \zeta_1^2\right)e^{-\zeta_1 r} - \left(\alpha^2 - \zeta_2^2\right)e^{-\zeta_2 r},$$

где $r = \|x\|$, $r_{,i} = x_j/r$, $\alpha = p/c_1$, $\beta = p/c_2$, $q = p/\kappa$, $m = \gamma/(1 + 2\mu)$, $\varepsilon = \gamma\eta\kappa/(\lambda + 2\mu)$.

Значения $\varkappa_i$ ($i = 1, 2, 3$) – это корни характеристического уравнения системы (2.3):

$$\det\left\{L_{kj}\left(-i\xi, p\right)\right\} = 0,\ \xi = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right). \tag{7.5}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$c_2^2\left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)\left\{\left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right) - \xi^2\frac{p\varepsilon}{\kappa}\right\} = 0,\ \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

имеет 6 корней, квадраты которых равны:

$$\zeta_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{p\left(1+\varepsilon\right)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2} + \sqrt{\left(\frac{p\left(1+\varepsilon\right)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2}\right)^2 + \frac{4ip^3}{\kappa c_1^2}}\right]$$

$$\zeta_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2} - \sqrt{\left(\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2}\right)^2 + \frac{4ip^3}{\kappa c_1^2}}\right]$$

$$\zeta_3^2 = -\frac{p^2}{c_2^2}$$

При этом при выборе корней необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re}\zeta_j \geq 0,\ \operatorname{Im}\zeta_j \geq 0. \tag{7.6}$$

Первое условие обеспечивает затухание решения при удалении от трещины. Второе условие описывает волны, движущиеся от поверхности трещины. Эти условия являются условиями излучения для поставленной краевой задачи.

Тензор Грина имеет следующие свойства симметрии:

$$\overline{U}_i^j(x,p) = \overline{U}_j^i(x,p),\ \overline{U}_i^j(-x,p) = \overline{U}_i^j(x,p),\ i,j = 1,2,3,$$

$$\overline{U}_i^4(x,p) = \frac{m(\lambda+2\mu)}{\eta p\kappa}\overline{U}_4^i(x,p),\ \overline{U}_i^4(-x,p) = -\overline{U}_i^4(x,p),$$

$$\overline{U}_4^i(-x,p) = -\overline{U}_4^i(x,p),\ \overline{U}_4^4(-x,p) = \overline{U}_4^4(x,p).$$

8. Преобразование Лапласа обобщенного решения задачи. Если использовать свойства преобразования Лапласа свертки и регулярность трансформанты тензора Грина, тогда интегральное представление перемещений и температуры (6.5) в пространстве преобразования Лапласа по времени выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
\overline{u}_m(x,p) = -\int_{R^3}\overline{U}_m^i(x-y,p)\overline{F}_i(y,p)dV(y) - \frac{1}{\kappa}\int_{R^3}\overline{U}_m^4(x-y,p)\overline{Q}(y,p)dV(y) + \\
+\int_S \overline{U}_m^i(x-y,p)\left[\overline{\sigma}_{ij}(y,p)\right]_S n_j(y)dS(y) - \\
-C_{ij}^{kl}\int_S \frac{\partial\overline{U}_m^i(x-y,p)}{\partial y_j}\left[\overline{u}_k(y,p)\right]_S n_l(y)dS(y) + \\
+\gamma\int_S n_i(y)\frac{\partial\overline{U}_m^4(y-x,p)}{\partial y_i}\left[\overline{\theta}(y,p)\right]_S dS(y) - \int_S \frac{\partial\overline{U}_m^4(y-x,p)}{\partial n(y)}\left[\overline{\theta}(y,p)\right]_S dS(y) - \\
-\int_S\left[\frac{\partial\overline{\theta}(y,p)}{\partial n(y)} - p\eta\left(\overline{u}(y,p),n(y)\right)\right]_S \overline{U}_m^4(y-x,p)dS(y),\ m = 1,2,3,
\end{gathered} \tag{8.1}$$

$$\overline{\theta}(x,p) = -\int_{R^3}\overline{U}_4^i(x-y,p)\overline{F}_i(y,p)dV(y) - \frac{1}{\kappa}\int_{R^3}\overline{U}_4^4(x-y,p)\overline{Q}(y,p)dV(y) +$$

$$+\int_S \bar{U}_4^i(x-y,p)\left[\bar{\sigma}_{ij}(y,p)\right]_S n_j(y)dS(y)$$

$$-C_{ij}^{kl}\int_S \frac{\partial \bar{U}_4^i(y-x,p)}{\partial y_j}\left[\bar{u}_k(y,p)\right]_S n_l(y)dS(y)+$$

$$+\int_S \left[\bar{\theta}(y,p)\right]_S \left(\frac{\partial \bar{U}_4^4(y-x,p)}{\partial n(y)}-\gamma n_i(y)\bar{U}_4^i(y-x,p)\right)dS(y)-$$

$$-\int_S \left[\frac{\partial \bar{\theta}(y,p)}{\partial n(y)}-p\eta\left(\bar{u}(y,p),n(y)\right)\right]_S \bar{U}_4^4(y-x,p)dS(y)\,. \tag{8.2}$$

Таким образом, при известных значениях скачка скоростей берегов трещины, скачка температуры и теплового потока на берегах трещины все входящие функции в правую часть перемещений (8.2) известны. Трансформанта Лапласа решения построена. Для построения оригинала решения в пространстве-времени используем обратное преобразование Лапласа:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{p_0-i\omega}^{p_0+i\omega}\bar{u}(x,p)e^{pt}dp,\quad p_0>0.\quad p_0>0\,,\quad p=p_0+i\omega\,.$$

Решение задачи построено.

9. Заключение. Построенное решение позволяет моделировать динамические процессы в породном массиве при образовании неразвивающейся трещины, поверхность которой может быть любой формы. Кроме того, оно дает возможность определить влияние по отдельности скачка перемещений, скоростей, напряжений, температур и тепловых потоков на ее берегах на термоударные волны и поэтому очень удобно для исследования сейсмических процессов в земной коре при реальных землетрясениях, причиной которых является именно возникновение трещин.

Заметим также, что замена параметра Лапласа p на $-i\omega$ дает решение задачи стационарных колебаний с частотой ω скачков скоростей и напряжений на трещинах, что можно использовать в материаловедении при дефектоскопии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан в рамках программы BR20281002 “Фундаментальные исследования в математике и математическом моделировании” и грантового проекта AP23488145 “Моделирование тепловых и волновых процессов в термоупругих стержневых конструкций на графах”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райс Д.* Механика очага землятрясения. М.: Мир, 1982. 217 с.
2. *Cherepanov G.P.* Methods of fracture mechanics. Solid matter physics. Dordrecht: Kluwer, 1997. 314 p.

3. *Guz A.N., Kaminskyi A.A., Gavrilov D.A., Zozulya V.V.* Nonclassical problems of fracture mechanics. Kiev: Naukova Dumka, 4 vol. 1990–1994.
4. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 295 с.
5. *Lykotrafitis G., Georgiadis H.G., Brock L.M.* Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. P. 4857–4878. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00311-5
6. *Naeeni M.R.,. Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Sture S., Rahimian M.* Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources // ZAMM. 2015. V. 95. № 4. P. 354–376. https://doi.org/10.1002/zamm.201300055
7. *Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш.* Обобщенные решения уравнений динамики упругой среды с трещиной // Математический журнал. 2007. Т. 8. № 3. С. 11–20.
8. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О,. Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М: Наука, 1976. 664 с.
9. *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 334–345.
10. *Alipova B.N., Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N.* Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1798. № 1. P. 020003. https://doi.org/10.1063/1.4972595
11. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
12. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1984. 464 с.
14. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.

GENERALIZED SOLUTION OF EQUATIONS OF DYNAMICS OF THERMOELASTIC MEDIUM WITH CRACK

L. A. Alexeyeva[a, *], B. N. Alipova[b, c, **]

[a]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[b]*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[c]*University of Kentucky, Lexington, KY, USA*

***e-mail: alexeeva@math.kz, **e-mail: alipova.bakhyt@gmail.com*

Abstract – The dynamics of an isotropic thermoelastic medium during the formation of cracks with an arbitrary surface geometry and non-opening edges is considered. The shock thermoelastic waves arise in the medium during such a process. The energy conservation law for a thermoelastic medium is considered considering shock waves. For shock thermoelastic waves, using the method of generalized functions, conditions are obtained for jumps in stresses, velocities, heat fluxes and energy density on their fronts. The crack model determines the relationship between jumps in stresses and velocities of relative displacement of the crack edges. The problem is posed and solved in the space of generalized vector functions. The solution is presented as a tensor-functional convolution of the Green's tensor of the equations of coupled thermoelasticity with a singular mass forces containing simple and double layers whose densities are determined by the jump in velocities, stresses, temperatures and heat fluxes on the crack edges. The latter determine the crack model and are assumed to be known.

Keywords: equations of coupled thermoelasticity, crack, temperature, displacement, stress, heat flow, shock thermoelastic waves, Green's tensor, Laplace transform, generalized function method

REFERENCES

1. *Rice J.* Mechanics of the earthquake focus. M.: Mir, 1982. 217 p.
2. *Cherepanov G.P.* Methods of Fracture Mechanics. Solid Matter Physics. Dordrecht: "Kluwer", 1997. 314 p.
3. *Guz A.N., Kaminskyi A.A., Gavrilov D.A., Zozulya V.V.* Nonclassical problems of fracturemechanics. Kiev: Naukova Dumka. 4 vol. 1990–1994.
4. *Slepian L.I.* Mechanics of cracks. Shipbuilding. 1990. 295 p.
5. *Lykotrafitis G., Georgiadis H.G., Brock L.M.* Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. P. 4857–4878.
https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00311-5
6. *Naeeni M.R.,. Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Sture S., Rahimian M..* Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources // ZAMM. 2015. V. 95. № 4. P. 354–376.
https://doi.org/10.1002/zamm.201300055
7. *Alexeyeva L.A., Dildabayeva I.Sh.* Generalized solutions of the equations of the dynamics of an elastic medium with a crack // Mathematical J. 2007. V. 8. № 3. P. 11–20.
8. *Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleshvili M.O., Burchuladze T.V.* Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. M: Nauka, 1976. 664 p.
9. *Alexeyeva L.A., Kupesova B.N.* The method of generalized functions in boundary value problems of coupled thermoelastodynamics // Applied Mathematics and Mechanics. 2001. V. 65. № 2. P. 334–345.
10. *Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadaeva A.N.* Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1798. P. 020003.
https://doi.org/10.1063/1.4972595
11. *Nowacki W.* Dynamic problems of thermoelasticity. M.: Mir, 1970. 256 p.
12. *Vladimirov V.S.* Generalized functions in mathematical physics. M.: Nauka, 1976.
13. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1976.
14. *Petrashen G.I.* Propagation of waves in anisotropic elastic media. M.: Nauka. 1980. 280 p.