

УДК 531.36

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА С ШАРОВЫМ ДЕМПФЕРОМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2025 г. Н. И. Амелькин^{a,*}

^aМосковский физико-технический институт, Москва, Россия

*E-mail: namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 25.12.2024 г.

После доработки 10.01.2024 г.

Принята к публикации 10.01.2024 г.

Для трехосного спутника с шаровым демпфером исследуются резонансные вращения в центральном гравитационном поле. Получены уравнения вращательного движения спутника на эллиптической орбите. Для случая круговой орбиты с использованием метода осреднения исследованы пространственные резонансные вращения 1 : 1 и 2 : 1.

Ключевые слова: гравитационное поле, спутник с шаровым демпфером, метод осреднения, эволюционные уравнения, резонансные вращения

DOI: 10.31857/S1026351925030014, **EDN:** AYYNEC

1. Введение. Для спутника, моделируемого одним абсолютно твердым телом, задача о резонансных движениях в центральном гравитационном поле исследовалась в работах В.В. Белецкого, Ф.Л. Черноусько, А.П. Маркеева и других авторов [1–3]. В рамках такой гамильтоновой модели устойчивые резонансные вращения спутника в гравитационном поле можно наблюдать только в том случае, когда начальные значения фазовых переменных попадают внутрь какой-либо из резонансных зон, вероятность чего невелика, поскольку размеры этих резонансных зон сравнительно малы [1].

Для спутников с внутренней диссипацией, как показано в работах [4–8], вращательные движения как резонансные, так и нерезонансные представляют собой в общем случае эволюционирующие процессы. При этом внутренние диссипативные силы и служат тем механизмом, который обеспечивает захват спутников в резонансные вращения, а наблюдаемые пространственные резонансные движения характеризуются таким свойством, что на протяжении всего резонансного процесса величина угловой скорости спутника остается практически неизменной, кратной угловой скорости орбитального базиса, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

В данной работе, как и ранее [4–8], для описания влияния внутренней диссипации на вращательное движение спутника используется модель М.А. Лаврентьева. В этой модели спутник состоит из несущего твердого

тела (оболочки) и внутреннего однородного шарообразного ядра, при относительных перемещениях которого возникает демпфирующий момент сил. Эта модель может быть использована для исследования эволюции вращательного движения планет в гравитационном поле Солнца [6].

Ранее [8] были исследованы пространственные резонансные вращения “сплюснутого” вдоль оси симметрии динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на круговой орбите. В данной работе исследуются пространственные резонансные вращения трехосного (несимметричного) спутника на круговой орбите.

2. Уравнения движения трехосного спутника на эллиптической орбите. Анализ пространственных резонансных движений трехосного спутника с шаровым демпфером будем проводить по той же схеме, что и для симметричного спутника [8].

Сначала запишем уравнения вращательного движения спутника в безразмерных переменных для общего случая, когда центр масс спутника движется по эллиптической орбите.

Обозначим через $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ связанный с оболочкой базис главных центральных осей инерции всего спутника, через $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ – главный центральный тензор инерции всего спутника, через I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси, а через \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения с центром масс спутника. Тогда действующий на спутник момент гравитационных сил выражается формулой [1]:

$$\mathbf{M}_g = \frac{3k}{R^3} \mathbf{r} \times \mathbf{J} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (2.1)$$

где $k = GM$ – постоянная тяготения, G – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, \mathbf{r} – единичный вектор.

Оси базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ выберем так, чтобы ось \mathbf{i}_3 совпадала с нормалью к плоскости орбиты, а ось \mathbf{i}_1 – с направлением наperiцент орбиты. Тогда вектор \mathbf{r} будет выражаться формулой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 \cos v + \mathbf{i}_2 \sin v, \quad (2.2)$$

где v – истинная аномалия – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{i}_1 (рис. 1а).

В рамках линейной модели вязкого трения действующий на демпфер момент диссипативных сил пропорционален относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой:

$$\mathbf{M}_d = -\tilde{\mu} I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости оболочки, $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости демпфера, $\tilde{\mu}$ – коэффициент вязкого трения между оболочкой и демпфером.

В качестве безразмерного времени возьмем среднюю аномалию $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 – средняя угловая скорость орбитального базиса, определяемая формулой:

$$\omega_0 = \left(\frac{k (1 - e^2)^3}{p^3} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

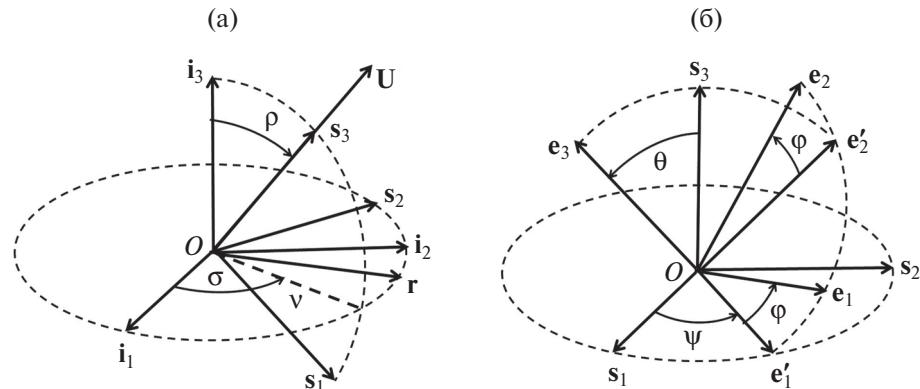


Рис. 1. Переменные Белецкого–Черноуско.

где p – фокальный параметр орбиты спутника, e – эксцентриситет.

Введем переменные \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{L} и \mathbf{K} согласно формулам:

$$\mathbf{U} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \mathbf{W} = \frac{\Omega - \omega}{\omega_0},$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\mathbf{U}, \quad \mathbf{K} = I\mathbf{W}. \quad (2.5)$$

Здесь \mathbf{U} – безразмерная угловая скорость оболочки, \mathbf{W} – безразмерная относительная угловая скорость демпфера, \mathbf{L} – приведенный кинетический момент переносного движения спутника, \mathbf{K} – приведенный кинетический момент относительного движения демпфера.

Применяя теорему об изменении кинетического момента для всего спутника и для демпфера, получим следующую систему динамических уравнений вращательного движения спутника:

$$\mathbf{L}' + I\mathbf{W}' = \mathbf{m}_g, \quad (2.6)$$

$$I(\mathbf{W}' + \mathbf{U}') = -\mu I\mathbf{W}. \quad (2.7)$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная по безразмерному времени τ , $m = \tilde{m}/\omega_0$ – безразмерный коэффициент вязкого трения, а \mathbf{m}_g – приведенный гравитационный момент, который на основании формул (2.1), (2.4) и уравнения конических сечений $R = p/(1 + e \cos v)$ выражается формулой:

$$\mathbf{m}_g = \frac{\mathbf{M}_g}{\omega_0^2} = 3f(v)\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}, \quad f(v) = \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6), (2.7) дополняются до замкнутой системы кинематическими уравнениями, описывающими движение оболочки:

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{U} \times \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

и уравнением для истинной аномалии:

$$v' = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (2.10)$$

Введем безразмерные параметры $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ и γ , характеризующие геометрию масс спутника с демпфером, следующими формулами:

$$\varepsilon_2 = \frac{B - A}{A - I}, \quad \varepsilon_3 = \frac{C - A}{A - I}, \quad \gamma = \frac{I}{A - I}. \quad (2.11)$$

В рассматриваемой задаче вектор \mathbf{L} выражается через вектор \mathbf{U} формулой:

$$\mathbf{L} = A\mathbf{U} + (B - A)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (C - A)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3. \quad (2.12)$$

Дифференцируя эту формулу по τ и учитывая уравнения (2.9), будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= A\mathbf{U}' + (B - A)[(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{U} \times \mathbf{e}_2] + \\ &\quad + (C - A)[(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{U} \times \mathbf{e}_3]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнения (2.6) и (2.7), получим на основании формул (2.11) следующие уравнения:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{m} + \mu\gamma\mathbf{W} - \sum_{k=2}^3 \varepsilon_k [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{U} \times \mathbf{e}_k + g_k \mathbf{e}_k] = \mathbf{M}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{W}' = -\mathbf{m} - \mu(1 + \gamma)\mathbf{W} + \sum_{k=2}^3 \varepsilon_k [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{U} \times \mathbf{e}_k + g_k \mathbf{e}_k] = -\mathbf{M} - \mu\mathbf{W}. \quad (2.14)$$

Здесь \mathbf{m} – безразмерный гравитационный момент, определяемый формулой:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{m}_g}{A - I} = 3f(v) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}}{A - I}. \quad (2.15)$$

Члены g_k в правой части уравнений (2.13) и (2.14) находятся проецированием уравнения (2.13) на оси $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и выражаются формулами:

$$g_2 = (\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}_2) = [\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_2 + \mu\gamma\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_3)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_1)]/(1 + \varepsilon_2), \quad (2.16)$$

$$g_3 = (\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}_3) = [\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 + \mu\gamma\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_3 - \varepsilon_2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_1)]/(1 + \varepsilon_3). \quad (2.17)$$

Ниже будем рассматривать спутник, близкий к сферически симметричному, т.е. положим

$$\varepsilon = \sup_{k=2,3} |\varepsilon_k| \ll 1. \quad (2.18)$$

Безразмерный гравитационный момент \mathbf{m} (2.15) при учете формул (2.11) можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{m} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)r_2 r_3 \mathbf{e}_1 - \varepsilon_3 r_1 r_3 \mathbf{e}_2 + \varepsilon_2 r_1 r_2 \mathbf{e}_3, \quad (2.19)$$

где $r_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$ — проекции единичного вектора \mathbf{r} (2.2) на оси связанных с оболочкой базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ главных осей инерции спутника. Из этой формулы следует, что вектор \mathbf{m} является ограниченной функцией малого параметра ε .

В свою очередь, на основании уравнения (2.14) для производной по τ от функции $W^2/2$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{W^2}{2} \right)' &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}' = -\mu(1 + \gamma)W^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}) + \\ &+ \mathbf{W} \cdot \left(\sum_{k=2}^3 \varepsilon_k [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{U} \times \mathbf{e}_k + g_k \mathbf{e}_k] \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из него следует, что при $\mu(1 + \gamma) \gg \varepsilon$ движение спутника сравнительно быстро приходит в режим медленной эволюции, в процессе которой вектор \mathbf{W} тоже будет ограниченной функцией малого параметра ε .

Таким образом, в режиме медленной эволюции будут выполняться условия:

$$|\mathbf{m}| = O(\varepsilon), |\mathbf{W}| = O(\varepsilon), |\mathbf{M}| = O(\varepsilon), \quad (2.21)$$

в силу которых функции g_k (2.16) и (2.17) будут ограниченными функциями малого параметра ε . А поскольку в выражение для вектора \mathbf{M} (2.13) входят произведения $\varepsilon_k g_k$, то этот вектор можно описать следующей формулой:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + \mu \gamma \mathbf{W} - \sum_{k=2}^3 \varepsilon_k (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{U} \times \mathbf{e}_k + O(\varepsilon^2). \quad (2.22)$$

3. Уравнения движения трехосного спутника с демпфером в переменных Белецкого–Черноуско. При решении различных задач о вращательном движении спутника важное значение имеет выбор переменных.

В работе [5] для исследования нерезонансных движений трехосного спутника с шаровым демпфером на круговой орбите использовались уравнения, записанные в переменных $w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3, \psi, \theta, \varphi$, где u_k и w_k — проекции векторов \mathbf{U} и \mathbf{W} на оси базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, а ψ, θ, φ — углы Эйлера, задающие ориентацию базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. На основе этих уравнений были получены осредненные уравнения второго приближения, адекватно описывающие эволюцию переменных $U = u_3$ и θ в нерезонансных случаях, когда значения U лежат вне малых окрестностей точек $U^* = 0, U^* = 1, U^* = 2$. Но для анализа резонансных вращений спутника уравнения в указанных переменных оказываются непригодными. Поэтому, как и в задаче для динамически симметричного спутника [8], будем использовать уравнения, в которых состояние оболочки спутника описывается переменными Белецкого–Черноуско [1].

В переменных Белецкого–Черноуско положение вектора \mathbf{U} относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ задается величиной U , углом нутации ρ и углом прецессии σ (рис. 1а), а положение связанного с оболочкой базиса главных центральных осей инерции спутника $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ задается

углами Эйлера θ , ψ и φ (рис. 1б). В качестве остальных переменных используются проекции W_1 , W_2 , W_3 вектора \mathbf{W} на оси базиса $Os_1s_2s_3$.

Согласно рис. 1а, все возможные состояния системы можно описать, рассматривая значения переменных U и ρ в интервалах

$$U \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq \pi. \quad (3.1)$$

Базис $Os_1s_2s_3$ вращается относительно базиса Кенига $Oi_1i_2i_3$ с угловой скоростью

$$\Omega_s = \sigma'i_3 + \rho's_2 = \sigma'(s_3 \cos \rho - s_1 \sin \rho) + \rho's_2.$$

Записывая уравнение (2.13) в проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$

$$\mathbf{U}' = U's_3 + \Omega_s \times Us_3 = U's_3 + U(s_2\sigma' \sin \rho + s_1\rho') = \mathbf{M},$$

получим следующие уравнения, описывающие поведение переменных ρ , σ и U :

$$\begin{aligned} \rho' &= M_1/U, \\ \sigma' &= M_2/(U \sin \rho), \\ U' &= M_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь M_k – проекции вектора \mathbf{M} (2.22) на оси базиса $Os_1s_2s_3$. При учете уравнений (3.2) вектор Ω_s выразится формулой:

$$\Omega_s = \frac{M_1 s_2 + M_2 (s_3 \operatorname{ctg} \rho - s_1)}{U}. \quad (3.3)$$

Уравнение (2.14) в осях базиса $Os_1s_2s_3$ записывается с точностью до $O(\varepsilon^2)$ в виде:

$$\mathbf{W}'_s + \Omega_s \times \mathbf{W} = -\mu(1 + \gamma)\mathbf{W} - \mathbf{m} + \sum_{k=2}^3 \varepsilon_k (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{U} \times \mathbf{e}_k.$$

Здесь \mathbf{W}'_s – вектор-столбец, составленный из производных W'_1 , W'_2 , W'_3 от проекций вектора \mathbf{W} на оси базиса $Os_1s_2s_3$. Поскольку из формул (2.21) следует, что $|\Omega_s \times \mathbf{W}| = O(\varepsilon^2)$, то в проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$ уравнение (2.14) запишется с точностью до $O(\varepsilon^2)$ в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} W'_1 &= -\mu(1 + \gamma)W_1 - m_1 + f_1, \\ W'_2 &= -\mu(1 + \gamma)W_2 - m_2 + f_2, \\ W'_3 &= -\mu(1 + \gamma)W_3 - m_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь m_k – проекции вектора \mathbf{m} (2.15) на оси базиса $Os_1s_2s_3$, а f_k – проекции на оси базиса $Os_1s_2s_3$ вектора

$$\mathbf{f} = \sum_{k=2}^3 \varepsilon_k (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{U} \times \mathbf{e}_k = \mathbf{A} \cos \psi + \mathbf{B} \sin \psi, \quad (3.5)$$

в котором компоненты векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} выражаются следующими формулами:

$$A_1 = B_2 = \frac{U^2}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) \sin 2\theta, \quad B_1 = -A_2 = \frac{U^2}{2}\varepsilon_2 \sin \theta \sin 2\varphi, \quad A_3 = B_3 = 0. \quad (3.6)$$

Получим уравнения, описывающие поведение углов Эйлера в рассматриваемой задаче. Угловая скорость оболочки спутника определяется формулой:

$$\mathbf{U} = U \mathbf{s}_3 = \boldsymbol{\Omega}_s + \boldsymbol{\omega}_s, \quad (3.7)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_s$ выражается формулой (3.3), а $\boldsymbol{\omega}_s$ — угловая скорость базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса $Os_1s_2s_3$, определяемая формулой:

$$\boldsymbol{\omega}_s = \psi' \mathbf{s}_3 + \theta' (\mathbf{s}_1 \cos \psi + \mathbf{s}_2 \sin \psi) + \varphi' (\mathbf{s}_3 \cos \theta + (\mathbf{s}_1 \sin \psi - \mathbf{s}_2 \cos \psi) \sin \theta).$$

Проектируя равенство (3.7) на оси базиса $Os_1s_2s_3$, получим следующую систему скалярных уравнений, описывающую поведение углов Эйлера:

$$\begin{aligned} \theta' &= (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi)/U, \\ \varphi' &= (M_2 \sin \psi + M_1 \cos \psi)/(U \sin \theta), \\ \psi' &= U - \operatorname{ctg} \theta (M_2 \sin \psi + M_1 \cos \psi)/U - \operatorname{ctg} \rho M_2/U. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.2), (3.4), (3.8) в сочетании с уравнением (2.10) образуют замкнутую систему относительно переменных ρ , σ , U , ψ , θ , φ , W_1 , W_2 , W_3 и v . Эти уравнения по форме полностью идентичны соответствующим уравнениям работы [8] для симметричного спутника. Отличаются эти уравнения от уравнений работы [8] только выражениями для проекций M_k вектора \mathbf{M} (2.22).

Безразмерному гравитационному моменту \mathbf{m} (2.15) соответствует безразмерная силовая функция

$$G = -\frac{3}{2} f(v) \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{J} \mathbf{r}}{A - I} = -\frac{3}{2} f(v) (\varepsilon_2 r_2^2 + \varepsilon_3 r_3^2), \quad (3.9)$$

через которую вектор \mathbf{m} выражается формулой:

$$\mathbf{m} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Согласно [1] проекции вектора \mathbf{m} (2.15) на оси базиса $Os_1s_2s_3$ могут быть вычислены через функцию (3.9), выраженную через переменные Белецкого—Черноусько, по формулам:

$$m_1 = \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin \rho} \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \quad m_2 = \frac{\partial G}{\partial \rho}, \quad m_3 = \frac{\partial G}{\partial \psi}. \quad (3.11)$$

Входящие в выражение для силовой функции (3.9) проекции r_2 и r_3 единичного вектора \mathbf{r} (2.2) на оси связанного с оболочкой базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ выражаются через переменные Белецкого—Черноусько следующими формулами:

$$r_3 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3 = (\sin \theta \cos \rho \sin \psi + \cos \theta \sin \rho) \cos(v - \sigma) - \sin \theta \cos \psi \sin(v - \sigma), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} r_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2 = & [\sin \theta \sin \rho \cos \varphi - \cos \rho (\sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi)] \times \\ & \times \cos(v - \sigma) + [\cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi] \sin(v - \sigma). \end{aligned} \quad (3.13)$$

4. Резонансные вращения трехосного спутника с шаровым демпфером на круговой орбите. Для случая круговой орбиты вращательное движение спутника описывается уравнениями (3.2), (3.4), (3.8), где $v = \tau$, $f(v) = 1$.

Ниже при исследовании резонансных движений трехосного спутника будем, как и ранее [8], использовать метод осреднения Н.Н. Боголюбова [9-10] и теорему А.Н. Тихонова [11] об условиях редукции в дифференциальных уравнениях с малым параметром.

Для построения осредненных уравнений необходимо выяснить сначала, какие из переменных системы являются “быстрыми”, а какие “медленными”.

Из уравнений (3.2), (3.4), (3.8) при учете формул (2.21) следует, что при $U \gg \varepsilon$ и $\mu(1+\gamma) \gg \varepsilon$ в режиме медленной эволюции переменные τ и ψ будут “быстрыми”, а остальные переменные – “медленными” (скорость изменения “медленных” переменных будет ограниченной функцией ε).

Согласно формулам (3.9), (3.11)–(3.13) быстрые переменные входят в правые части уравнений только через гармонические функции вида:

$$\sin(m\psi \pm 2(\sigma - \tau)), \cos(m\psi \pm 2(\sigma - \tau)); \quad m = 0, 1, 2, \sin m\psi, \cos m\psi; \quad m = 1, 2.$$

Поэтому резонансным вращениям спутника могут соответствовать только движения, для которых выполняется одно из следующих резонансных соотношений:

$$\langle m\psi' \rangle \pm 2\langle \sigma' - 1 \rangle = 0; \quad m = 0, 1, 2, \langle \psi' \rangle = 0.$$

Здесь среднее по τ обозначено угловыми скобками. При этом для значений $U \gg \varepsilon$ и $\mu(1+\gamma) \gg \varepsilon$ из записанных выше резонансных соотношений могут выполняться только следующие два:

$$\langle \psi' + 2\sigma' \rangle - 2 = 0 \Rightarrow U = 2 + O(\varepsilon), \quad (4.1)$$

$$\langle \psi' + \sigma' \rangle - 1 = 0 \Rightarrow U = 1 + O(\varepsilon). \quad (4.2)$$

Движения спутника, для которых выполняется резонансное соотношение (4.1), условимся называть резонансными вращениями 2:1. Для этих вращений величина угловой скорости спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадает с удвоенной угловой скоростью орбитального базиса.

Движения спутника, удовлетворяющие резонансному соотношению (4.2), будем называть резонансными вращениями 1:1. Для них величина угловой скорости спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ равна угловой скорости орбитального базиса.

Наличие пространственных резонансных вращений 2:1 и 1:1 на круговой орбите подтверждается результатами численного интегрирования точных уравнений движения трехосного спутника с шаровым демпфером.

На рис. 2 приведены построенные по результатам численного интегрирования точных уравнений фазовые траектории вращательного движения спутника с демпфером в плоскости переменных U_x, U_z для следующих значений

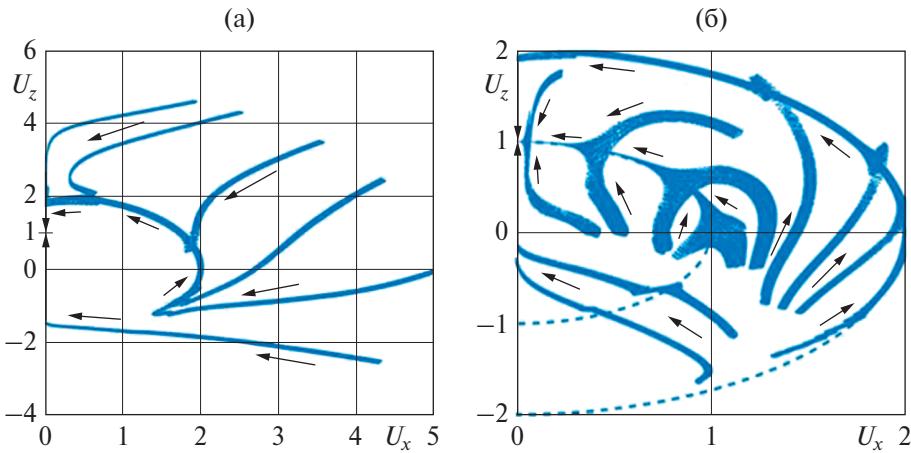


Рис. 2. Фазовые траектории.

параметров: $\mu = 5$, $\gamma = 1$, $\varepsilon_2 = 0.05$, $\varepsilon_3 = 0.1$. Здесь U_x – проекция угловой скорости спутника на плоскость орбиты, а U_z – проекция угловой скорости спутника на нормаль к плоскости орбиты. На рис. 2а изображены фазовые траектории для начальных условий из области $U > 2$, а на рис. 2б – из области $U < 2$. Резонансным вращениям 2 : 1 соответствует дуга окружности радиуса $U^* = 2$, а резонансным вращениям 1 : 1 – дуга окружности радиуса $U^* = 1$. Стрелками показано направление эволюции.

Заметим, что для трехосного спутника с демпфером на круговой орбите установившимися движениями являются только положения равновесия относительно орбитального базиса ($U^* = 1$, $\rho^* = 0$) [5]. Поэтому наблюдаемые пространственные резонансные вращения 2 : 1 и 1 : 1 представляют собой эволюционирующие процессы, в которых среднее значение угла нутации ρ изменяется с течением времени, причем ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

Ниже проводится аналитическое исследование условий существования и устойчивости резонансных вращений 2 : 1 и 1 : 1 трехосного спутника с демпфером на круговой орбите.

Резонансные вращения 2 : 1. Для анализа резонансных вращений 2 : 1 введем новую переменную X формулой:

$$X = \psi - 2(\tau - \sigma). \quad (4.3)$$

Согласно (3.2) и (3.8) поведение переменной X описывается уравнением:

$$X' = U - 2 - \operatorname{ctg} \theta (M_2 \sin \psi + M_1 \cos \psi) / U + (2 - \cos \rho) M_2 / (U \sin \rho). \quad (4.4)$$

Резонансным вращениям 2 : 1 будут соответствовать такие движения спутника, для которых среднее по времени τ значение переменной X остается неизменным. Для этих движений будет иметь место такая синхронизация между вращательным движением спутника и движением его центра масс, что

за один оборот центра масс спутника относительно базиса $Os_1s_2s_3$ базис $Oe_1e_2e_3$ будет совершать ровно два оборота вокруг вектора угловой скорости \mathbf{U} .

Из формул (3.9), (3.11)–(3.13) следует, что время τ входит в правые части уравнений (3.2), (3.4), (3.8) только через функции $\sin(\tau - \sigma)$ и $\cos(\tau - \sigma)$. В свою очередь, из формулы (4.3) имеем:

$$\tau - \sigma = (\psi - X)/2. \quad (4.5)$$

Подставляя это выражение в правые части уравнений (3.2), (3.4), (3.8), получим автономную систему в переменных ρ , U , W_1 , W_2 , W_3 , θ , X , ψ , φ . Далее проведем осреднение полученных уравнений по “быстрой” переменной ψ , а интересующие нас резонансные вращения, как и для симметричного спутника [8], будем искать среди стационарных по переменным U , W_1 , W_2 , W_3 , θ , X , φ решений (положений равновесия) осредненной системы при фиксированном значении переменной ρ .

После осреднения системы (3.2), (3.4), (3.8) по “быстрой” переменной ψ получим следующие уравнения:

$$\rho' = (\bar{m}_1 + \mu\gamma W_1)/U, \quad \sigma' = (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)/(U \sin \rho), \quad (4.6)$$

$$W_1' = -\mu(1 + \gamma)W_1 - \bar{m}_1 + O(\varepsilon^2), \quad W_2' = -\mu(1 + \gamma)W_2 - \bar{m}_2 + O(\varepsilon^2), \quad (4.7)$$

$$W_3' = -\mu(1 + \gamma)W_3 - \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2), \quad U' = \mu\gamma W_3 + \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2). \quad (4.8)$$

Здесь чертой сверху обозначены вычисленные по формулам (3.9), (3.11)–(3.13) и осредненные по ψ проекции вектора \mathbf{m} (2.15) на оси базиса $Os_1s_2s_3$:

$$\bar{m}_1 = \frac{3}{8}(1 + \cos \rho)(2 - \cos \rho) \left[\cos X \sin 2\theta(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) + \varepsilon_2 \sin X \sin \theta \sin 2\varphi \right], \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_2 &= \frac{3}{8} \sin 2\rho \left[(1 - 3 \cos^2 \theta)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) - \varepsilon_2 \cos 2\varphi \right] + \\ &+ \frac{3}{8}(\cos \rho + \cos 2\rho) \left[\sin X \sin 2\theta(\varepsilon_2 \cos^2 \varphi - \varepsilon_3) + \varepsilon_2 \cos X \sin \theta \sin 2\varphi \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\bar{m}_3 = -\frac{3}{8} \sin \rho(1 + \cos \rho) \left[\cos X \sin 2\theta(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) + \varepsilon_2 \sin X \sin \theta \sin 2\varphi \right]. \quad (4.11)$$

Для вычисления средних по ψ от правых частей уравнений (3.8) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ воспользуемся формулами работы [8]:

$$\langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) + \frac{\mu\gamma U(\alpha_1 + \beta_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right), \quad (4.12)$$

$$\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) + \frac{\mu\gamma U(\beta_1 - \alpha_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right). \quad (4.13)$$

Здесь среднее по ψ обозначено угловыми скобками, а α_k и β_k – компоненты векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, определяемых формулами:

$$\alpha = \mathbf{A} - \mathbf{a}, \quad \beta = \mathbf{B} - \mathbf{b}, \quad (4.14)$$

где векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} выражаются формулами (3.6), а векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} – множители с номером $j=1$ в вычисленном на основе формул (3.9), (3.11)–(3.13) и (4.5) выражении для вектора \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \sum_{j=0}^3 \mathbf{a}_j(\rho, \theta, \varphi, X) \cos j\psi + \mathbf{b}_j(\rho, \theta, \varphi, X) \sin j\psi.$$

После учета формул (4.12) и (4.13) осредненные по ψ уравнения (3.8) записутся с точностью до $O(\varepsilon^2)$ в следующем виде:

$$X' = U - 2 + (2 - \cos \rho)(\bar{m}_2 + \mu \gamma W_2)/(U \sin \rho) - \\ - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2U} \left(\frac{\mu \gamma U}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) - \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.15)$$

$$\theta' = -\frac{1}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) + \frac{\mu \gamma U}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.16)$$

$$\varphi' = \frac{1}{2U \sin \theta} \left(\frac{\mu \gamma U}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) - \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) \right) + O(\varepsilon^2). \quad (4.17)$$

Множители $\alpha_2 - \beta_1$ и $\alpha_1 - \beta_2$ в правых частях этих уравнений, вычисленные на основе формул (4.14) и (3.6), выражаются следующими формулами:

$$\alpha_2 - \beta_1 = \frac{3}{2} \cos X \sin \rho (1 + \cos \rho) [\cos^2 \theta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) + \varepsilon_2 \cos 2\varphi] - \\ - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \sin 2\varphi [\sin \theta (4U^2/3 + 3 \cos^2 \rho - 1) + \cos \theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin X], \quad (4.18)$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{3}{4} \sin 2\theta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) (4U^2/3 + 3 \cos^2 \rho - 1) + \\ + \frac{3}{4} \sin \rho (1 + \cos \rho) [2 \cos 2\theta \sin X (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) - \varepsilon_2 \cos \theta \sin 2\varphi \cos X]. \quad (4.19)$$

Если значения угла нутации удовлетворяют условию

$$\sin \rho (1 + \cos \rho) \gg \varepsilon, \quad (4.20)$$

то система уравнений (4.7), (4.8), (4.15)–(4.17) допускает стационарные решения (положения равновесия) по переменным W_1 , W_2 , W_3 , U , θ , X , φ при фиксированном ρ , которые описываются следующими формулами:

$$\cos X^* = 0, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = -\frac{2 \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin X^*}{4U^2/3 + 3 \cos^2 \rho - 1}, \quad \sin 2\varphi^* = 0. \quad (4.21)$$

$$U^* = 2 + O(\varepsilon), \quad W_1^* = O(\varepsilon^2), \quad W_3^* = O(\varepsilon^2), \quad W_2^* = O(\varepsilon). \quad (4.22)$$

В формулах (4.21) стационарные значения переменных X , θ и φ выписаны с точностью до $O(\varepsilon)$.

Анализ корней характеристического уравнения линеаризованной системы (4.7), (4.8), (4.15)–(4.17) показал (ввиду громоздкости здесь не приводится), что при $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > 0$ асимптотически устойчивыми являются только те из решений (4.21), (4.22), для которых

$$X^* = -\pi/2, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = \frac{2\sin\rho(1+\cos\rho)}{13/3 + 3\cos^2\rho}; \quad \sin 2\theta^* > 0, \quad \varphi^* = \pm\pi/2. \quad (4.23)$$

Для этих решений θ^* – угол между вектором угловой скорости \mathbf{U} и осью \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции спутника, а вектор \mathbf{U} лежит в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ осей наибольшего и наименьшего моментов инерции спутника.

Значения фазовых переменных W_1 , W_2 , W_3 , U , X , θ , φ на стационарных решениях (4.21), (4.22) являются функциями угла нутации ρ . Как показывают вычисления, если подставить эти решения в первое из уравнений (4.6), получим уравнение $\rho' = f(\rho)$, в котором $f(\rho)$ будет ограниченной функцией ε^2 . Отсюда, поскольку асимптотическая устойчивость решений (4.22), (4.23) установлена из осредненных уравнений первого приближения по ε , следует, что в окрестности стационарных решений переменные W_1 , W_2 , W_3 , U , X , θ , φ будут “быстрыми” по сравнению с переменной ρ . Следовательно, применима теорема А.Н. Тихонова [11], согласно которой систему дифференциальных уравнений (4.7), (4.8), (4.15)–(4.17) можно заменить системой алгебраических уравнений (4.22), (4.23) и решать их совместно с дифференциальным уравнением $\rho' = f(\rho)$. Полученное при этом решение будет асимптотически устойчивым по переменным W_1 , W_2 , W_3 , U , X , θ , φ , а по теореме Н.Н. Боголюбова [9, 10] этому решению осредненной системы будет соответствовать асимптотически устойчивое условно-периодические решение исходной неавтономной системы.

Таким образом, асимптотически устойчивые резонансные вращения 2:1 в рассматриваемой задаче представляют собой эволюционирующий режим движения спутника, в котором угол нутации ρ медленно меняется с течением времени.

Обратим внимание, что согласно формулам (4.23) поведение переменных X и θ на асимптотически устойчивых резонансных вращениях 2:1 трехосного спутника в точности совпадает с поведением этих переменных на резонансных вращениях 2:1 динамически симметричного спутника, “сплюснуто-го” вдоль оси симметрии [8]. При этом интервал значений угла нутации ρ , в котором существуют резонансные вращения (4.21), (4.22) трехосного спутника, определяется аналогичной [8] формулой:

$$\rho_1 < \rho < \pi - \rho_2, \text{ где } \rho_1 \sim \varepsilon, \rho_2 \sim \varepsilon^{1/3}. \quad (4.24)$$

Из этой формулы следует, что нет резонансных вращений 2:1 для значений ρ , близких к нулю, и для значений ρ , близких к π , причем $\rho_2 \gg \rho_1$.

На рис. 3а–г показаны графики типичного поведения переменных U , ρ , X , θ на резонансных вращениях 2:1, полученные по результатам численного интегрирования точных уравнений движения (3.2), (3.4), (3.8). Здесь N – число оборотов центра масс спутника вокруг притягивающего центра, а θ – угол

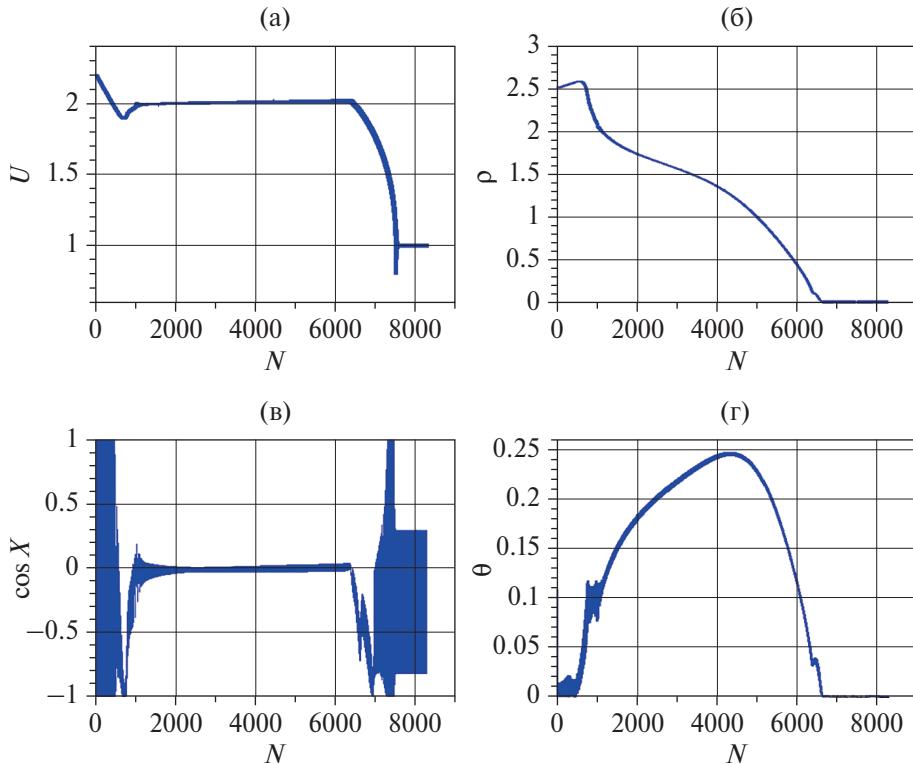


Рис. 3. Резонансные вращения 2 : 1.

между вектором угловой скорости спутника \mathbf{U} и осью \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции. Эти графики получены для следующих значений параметров:

$$\gamma = 1, \mu = 1, \varepsilon_2 = 0.03, \varepsilon_3 = 0.06.$$

В данном примере, как следует из графиков, для начальных условий $U(0)=2.2$, $\rho(0)=2.5$ захват в резонансное вращение 2:1 происходит при $N \approx 800$ ($\rho \approx 2.6$), а заканчивается это резонансное вращение при $N \approx 6400$, когда угол нутации достигает значения $\rho_1 \approx 0.1$. При $N \approx 6600$ спутник переходит в режим плоского нерезонансного вращения вокруг оси \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции, совпадающей с нормалью к плоскости орбиты ($\rho=0, \theta=0$), а при $N \approx 7500$ приходит в положение равновесия относительно орбитального базиса ($\rho=0, U=1$).

Поведение переменных $U, X=\psi-2(\tau-\sigma), \theta$ на рис. 3а, в, г полностью согласуется с формулами (4.23) и (4.24), а поведение угла нутации ρ на рис. 3б свидетельствует о том, что на резонансных вращениях 2:1 ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

Резонансные вращения 1 : 1. Для исследования резонансных вращений 1:1 введем новую переменную X формулой:

$$X = \psi - (\tau - \sigma). \quad (4.25)$$

Резонансным вращениям 1:1 будут отвечать такие движения спутника, для которых значения переменной X будут в среднем оставаться неизменными. При этом вращательное движение спутника и движение его центра масс будут синхронизированы так, что за один оборот центра масс спутника относительно базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ совершает ровно один оборот вокруг вектора угловой скорости \mathbf{U} .

Согласно (3.2) и (3.8) поведение переменной X описывается уравнением:

$$X' = U - 1 - \operatorname{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) / U + M_2 (1 - \cos \rho) / (U \sin \rho). \quad (4.26)$$

Исключив из уравнений время τ с помощью замены $\tau - \sigma = \psi - X$, получим автономную систему в переменных ρ , U , W_1 , W_2 , W_3 , θ , X , ψ , φ . После осреднения правых частей уравнений этой системы по “быстрой” переменной ψ , получим уравнения, которые по форме будут полностью совпадать с уравнениями системы (4.6)–(4.8), (4.15)–(4.17), за исключением уравнения (4.15), вместо которого в рассматриваемом случае получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} X' = U - 1 + (1 - \cos \rho) (\bar{m}_2 + \mu \gamma W_2) / (U \sin \rho) + \\ + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2 (1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2 (1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) - \frac{\mu \gamma U}{U^2 + \mu^2 (1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

В рассматриваемом случае средние для проекций вектора \mathbf{m} (2.15) на оси базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ и множители $\alpha_2 - \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_1$ в правых частях уравнений (4.16), (4.17) и (4.27) будут выражаться следующими формулами:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= \frac{3}{8} \sin \rho (1 + \cos \rho) \left[\sin 2X \left(\sin^2 \theta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) + \varepsilon_2 \cos 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_2 \sin 2\varphi \cos \theta \cos 2X \right], \\ \bar{m}_2 &= \frac{3}{8} \sin 2\varphi \left[(1 - 3 \cos^2 \theta) (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) - \varepsilon_2 \cos 2\varphi \right] + \\ &+ \frac{3}{8} \sin \rho (1 + \cos \rho) \left[((\varepsilon_2 \cos^2 \varphi - \varepsilon_3) \sin^2 \theta - \varepsilon_2 \cos 2\varphi) \cos 2X + \varepsilon_2 \sin 2\varphi \cos \theta \sin 2X \right], \\ \bar{m}_3 &= -\frac{3}{8} (1 + \cos \rho)^2 \left[\sin 2X \left(\sin^2 \theta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) + \varepsilon_2 \cos 2\varphi \right) + \varepsilon_2 \sin 2\varphi \cos \theta \cos 2X \right], \\ \alpha_2 - \beta_1 &= \frac{3}{8} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) (1 + \cos \rho)^2 \sin 2\theta \sin 2X - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \left(\frac{4U^2}{3} + 3 \cos^2 \rho - 1 \right) \sin 2\varphi \sin \theta, \\ \alpha_1 + \beta_2 &= \frac{3}{4} \sin 2\theta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi) \left(\frac{4U^2}{3} + 3 \cos^2 \rho - 1 - \frac{1}{2} \cos 2X (1 + \cos \rho)^2 \right) - \\ &- \frac{3}{8} \varepsilon_2 (1 + \cos \rho)^2 \sin 2\varphi \sin \theta \sin 2X. \end{aligned}$$

Если значения угла нутации удовлетворяют условию

$$(1 + \cos \rho)^2 \gg \varepsilon, \quad (4.28)$$

то система уравнений (4.7), (4.8), (4.16), (4.17), (4.27) допускает стационарные решения (положения равновесия) по переменным $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X, \varphi$ при фиксированном ρ , которые описываются следующими формулами:

$$\sin 2X^* = 0, \quad \sin 2\varphi^* = 0, \quad \cos \theta^* = 0 \quad (\theta^* = \pm \pi/2), \quad (4.29)$$

$$U^* = 1 + O(\varepsilon), \quad W_1^* = O(\varepsilon^2), \quad W_3^* = O(\varepsilon^2), \quad W_2^* = O(\varepsilon). \quad (4.30)$$

В формулах (4.29) стационарные значения переменных X, θ и φ выписаны с точностью до $O(\varepsilon)$.

Матрица системы (4.7), (4.8), (4.16), (4.17), (4.27), линеаризованной в окрестности решений (4.29), (4.30), записывается в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mu(1 + \gamma) & 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu(1 + \gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu(1 + \gamma) & 0 & f_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\gamma & 0 & -f_{35} & 0 & 0 \\ 0 & f_{52} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{66} & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{76} & f_{77} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

где пронумерованные элементы матрицы выражаются следующими формулами:

$$f_{15} = -\frac{3}{4} \sin \rho (1 + \cos \rho) (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \sin^2 \varphi^*) \cos 2X^*,$$

$$f_{35} = \frac{3}{4} (1 + \cos \rho)^2 (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \sin^2 \varphi^*) \cos 2X^*,$$

$$f_{52} = \mu\gamma (1 - \cos \rho) / \sin \rho,$$

$$f_{66} = \frac{\mu\gamma}{8} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi^*) \frac{2 + 18 \cos^2 \rho - 3 \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2}{1 + \mu^2 (1 + \gamma)^2},$$

$$f_{67} = \varepsilon_2 \frac{1 + \mu^2 (1 + \gamma)}{8} \cos 2\varphi^* \sin \theta^* \frac{2 + 18 \cos^2 \rho}{1 + \mu^2 (1 + \gamma)^2},$$

$$f_{76} = \frac{1 + \mu^2 (1 + \gamma)}{8} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi^*) \sin \theta^* \frac{2 + 18 \cos^2 \rho - 3 \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2}{1 + \mu^2 (1 + \gamma)^2},$$

$$f_{77} = -\frac{\mu\gamma}{8} \varepsilon_2 \cos 2\varphi^* \frac{2 + 18 \cos^2 \rho}{1 + \mu^2 (1 + \gamma)^2}.$$

Для матрицы (4.31) характеристический полином, в коэффициентах которого учтены только главные члены разложения по ε , выражается формулой:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & (\mu(1 + \gamma) + \lambda)^2 \left(\lambda^3 + \lambda^2 \mu(1 + \gamma) + \lambda f_{35} + \mu f_{35} \right) \times \\ & \times \left(\lambda^2 - (f_{66} + f_{77})\lambda + f_{66}f_{77} - f_{67}f_{76} \right). \end{aligned}$$

По критерию Раяса–Гурвица асимптотически устойчивыми будут те из стационарных решений (4.29), для которых выполняются неравенства:

$$f_{35} > 0, \quad f_{66} + f_{77} < 0, \quad f_{66}f_{77} - f_{67}f_{76} > 0. \quad (4.32)$$

Если же хотя бы одно из неравенств (4.32) принимает обратный знак, то соответствующее стационарное решение неустойчиво.

На основании выписанных выше формул неравенства (4.32) запишутся в следующем виде:

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \sin^2 \varphi^*) \cos 2X^* > 0, \quad (4.33)$$

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi^*) \cos 2\varphi^* \left[2 + 18 \cos^2 \rho - 3 \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2 \right] < 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi^*) \left[2 + 18 \cos^2 \rho - 3 \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2 \right] - \\ & - \varepsilon_2 \cos 2\varphi^* (2 + 18 \cos^2 \rho) < 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > 0$, т.е. когда \mathbf{e}_3 – ось наибольшего момента инерции спутника, а \mathbf{e}_2 – ось среднего момента инерции. В этом случае из условия (4.33) получим $\cos 2X^* = 1$ ($X^* = 0, \pi$), а остальные неравенства примут следующий вид:

$$(15 \cos^2 \rho - 6 \cos \rho - 1) \cos 2\varphi^* < 0,$$

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi^*) (15 \cos^2 \rho - 6 \cos \rho - 1) - \varepsilon_2 \cos 2\varphi^* (2 + 18 \cos^2 \rho) < 0.$$

Оба эти неравенства выполняются только для решений $\cos 2\varphi^* = 1$ ($\varphi^* = 0, \pi$) и только в следующем интервале значений угла нутации:

$$15 \cos^2 \rho - 6 \cos \rho - 1 < 0 \Rightarrow \rho_1 < \rho < \rho_2; \quad \rho_1 \approx 1.0, \quad \rho_2 \approx 1.7. \quad (4.36)$$

Отметим, что в рассмотренном случае $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > 0$ решениям $\theta^* = \pm\pi/2, \varphi^* = 0, \pi$ соответствуют вращения спутника вокруг оси \mathbf{e}_2 среднего момента инерции.

Вопрос о существовании асимптотически устойчивых резонансных вращений 1:1 за пределами интервала (4.36) решается рассмотрением случая $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > 0$, когда \mathbf{e}_2 – ось наибольшего момента инерции спутника, а \mathbf{e}_3 – ось среднего момента инерции. В этом случае для решений $\varphi^* = 0, \pi$ из условия (4.33) следует $\cos 2X^* = 1$, а остальные два неравенства принимают вид:

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) (15 \cos^2 \rho - 6 \cos \rho - 1) < 0,$$

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) (15 \cos^2 \rho - 6 \cos \rho - 1) - \varepsilon_2 (2 + 18 \cos^2 \rho) < 0.$$

Оба эти неравенства выполняются только для следующих значений угла нутации:

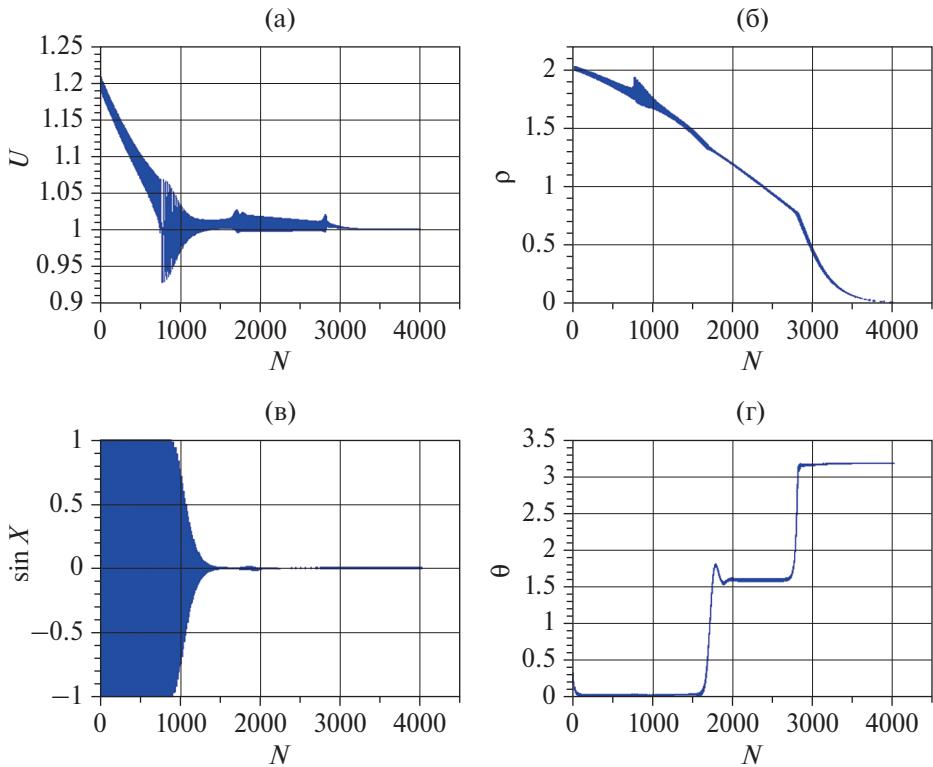


Рис. 4. Резонансные вращения 1 : 1.

$$15\cos^2\rho - 6\cos\rho - 1 > 0 \Rightarrow \rho < \rho_1, \quad \rho > \rho_2; \quad \rho_1 \approx 1.0, \quad \rho_2 \approx 1.7. \quad (4.37)$$

В данном случае $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > 0$ решениям $\theta^* = \pm\pi/2$, $\varphi^* = \pm\pi/2$, $\phi^* = 0, \pi$ соответствуют вращения спутника вокруг оси e_2 наибольшего момента инерции.

Таким образом, в интервале (4.36) значений угла нутации асимптотически устойчивые резонансные движения 1:1 для трехосного спутника представляют собой вращения вокруг оси среднего момента инерции, а вне этого интервала, т.е. для значений ρ (4.37), – вращения вокруг оси наибольшего момента инерции.

Интервал значений угла нутации, где существуют стационарные решения (4.29), (4.30), соответствующие резонансным вращениям трехосного спутника, описывается формулой:

$$0 \leq \rho < \pi - \rho^*, \text{ где } \rho^* \sim \varepsilon^{1/4}, \quad (4.38)$$

которая аналогична формуле для интервала значений ρ , где существуют резонансные вращения 1:1 для динамически симметричного спутника [8]. Из этой формулы следует, что нет резонансных вращений 1:1 для значений ρ , близких к π , т.е. для вращений спутника, близких к “обратным” вращениям.

На рис. 4 показаны графики типичного поведения переменных U, ρ, X, θ на резонансных вращениях 1:1, полученные по результатам численного интегрирования точных уравнений движения (3.2), (3.4), (3.8). Здесь, как и ранее, N – число оборотов центра масс спутника вокруг притягивающего центра, а θ – угол между вектором угловой скорости спутника \mathbf{U} и осью \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции. Эти графики построены для следующих значений параметров:

$$\gamma = 1, \mu = 1, \epsilon_2 = 0.02, \epsilon_3 = 0.04.$$

В данном примере, как следует из графиков, для начальных условий $U(0) = 1.2, \rho(0) = 2.0$ захват в резонансное вращение 1:1 происходит при $N_1 \approx 800$ ($\rho_1 \approx 1.8$). При этом в интервале $N_1 < N < N_2$, где $N_2 \approx 1700$ ($\rho_2 \approx 1.3$), резонансное движение спутника представляет собой вращение вокруг оси \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции ($\theta^* = 0$). При достижении значения N_2 спутник совершает поворот на 90° и в интервале $N_2 < N < N_3$, где $N_3 \approx 2800$ ($\rho_3 \approx 0.8$), резонансное вращение происходит вокруг оси \mathbf{e}_2 среднего момента инерции. При $N = N_3$ спутник снова поворачивается на 90° и возвращается в режим резонансного вращения вокруг оси \mathbf{e}_3 наибольшего момента инерции. Далее в этом резонансном режиме спутник эволюционирует до тех пор, пока не достигнет своего положения равновесия относительно орбитального базиса ($\rho = 0, U = 1$).

Наблюдаемое на рис. 4а, в, г поведение переменных $U, X = \psi - (\tau - \sigma)$ и θ полностью согласуется с формулами (4.29), (4.30), (4.36), (4.37), а поведение угла нутации на рис. 4б свидетельствует о том, что на резонансных вращениях 1:1 ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

Заключение. В работе получены уравнения вращательного движения трехсекционного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите в безразмерных переменных и проведено детальное исследование пространственных резонансных вращений 2:1 и 1:1:1 на круговой орбите. Эти резонансные вращения обусловлены синхронизацией между вращательным движением спутника и движением его центра масс и представляют собой эволюционирующие процессы, в которых величина угловой скорости спутника остается практически неизменной, равной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 1:1 и удвоенной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 2:1, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты. Получены явные формулы, описывающие поведение фазовых переменных на указанных резонансных вращениях, определены интервалы значений угла нутации, в пределах которых существуют пространственные резонансные вращения 1:1 и 2:1, а также интервалы их асимптотической устойчивости/неустойчивости.

Аналитические выводы работы подтверждаются результатами компьютерного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

2. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 396 с.
3. *Черноуско Ф.Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Журнал вычисл. математики и математич. физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528–538.
4. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010016>
5. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 16–31.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010028>
6. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты Земля под влиянием внутренних диссипативных сил // Космические исследования. 2023. Т. 61. Вып. 6. С. 486–497.
<https://doi.org/10.31857/S0023420623600162>
7. *Амелькин Н.И.* О плоских резонансных вращениях спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 313–328.
<https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
8. *Амелькин Н.И.* Резонансные вращения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на круговой орбите // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 3. С. 112–135.
<https://doi.org/10.31857/S1026351924030082>
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
10. *Журавлев В.Ф., Клинов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
11. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Матем. сб. 1952. Т. 73. № 3. С. 575–586.

SPATIAL RESONANT ROTATIONS OF A THREE-AXIS SATELLITE WITH A BALL DAMPER IN A CIRCULAR ORBIT

N. I. Amel'kin^{a,*}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

**e-mail: namelkin@mail.ru*

Abstract – For a three-axis satellite with a ball damper, resonant rotations in the central gravitational field are studied. The equations of the rotational motion of a satellite in an elliptical orbit are obtained. For the case of a circular orbit, spatial resonance rotations of 1 : 1 and 2 : 1 were investigated using the averaging method.

Keywords: gravitational field, satellite with ball damper, averaging method, evolutionary equations, resonant rotations

REFERENCES

1. *Beletskii V.V.* Motion of a Satellite with Respect to Center of Mass in Gravitational Field. M.: Izd. MGU, 1975. 308 p. [in Russian].
2. *Markeev A.P.* Linear Hamiltonian systems and some problems about the stability of the satellite motion relative to the center of mass. M. Izhevsk: Research Center “Regular and chaotic dynamics”, 2009. 396 p. [in Russian].
3. *Chernous'ko F.L.* Resonance phenomena in the motion of the satellite relative to the center of mass // J. Comput. Math. Math. Phys. 1963. V. 3. № 3. P. 528–538 [in Russian].
4. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 2. P. 179–189.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419030014>
5. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 2. P. 190–203.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419030026>
6. *Amel'kin N.I.* Evolution of rotational motion of the planet Earth under the influence of internal dissipative forces // Cosmic Research. 2023. V. 61. № 6. P. 510–521.
<https://doi.org/10.1134/S001095252370051X>
7. *Amel'kin N.I.* On the plane resonant rotations of a satellite with a spherical damper in an elliptical orbit // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 7. P. 1644–1656.
<https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
8. *Amel'kin N.I.* Resonant rotations of a dynamically symmetric satellite with a spherical damper in a circular orbit // Mech. Solids. 2024. V. 59. № 3. P. 1266–1282.
<https://doi.org/10.1134/S0025654424602908X>
9. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods for Theory of Nonlinear Oscillations. M.: Nauka, 1974 [in Russian].
10. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods for Oscillations Theory. M.: Nauka, 1988 [in Russian].
11. *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters at derivatives // Math. collection. 1952. V. 73. № 3. P. 575–586 [in Russian].