

УДК 531.3, 539.373

ОБ УЧЕТЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ СВЕРХТОНКИХ ПЛАСТИН

© 2025 г. К. Б. Устинов^{а, *}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.11.2024 г.

После доработки 10.11.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Представлены уравнения осесимметричного изгиба круглой пластины типа Фёпpla–фон Кармана, учитывающие поверхностные эффекты: наличие поверхностного слоя, характеризующегося своими упругими константами и начальными напряжениями, а также наличие начальных объемных напряжений. Получено асимптотическое решение для больших прогибов задачи о круглой равномерно нагруженной жестко защемленной пластине в приближении предположения постоянства растягивающих усилий. Проведена оценка параметров пластины, при которых поверхностные эффекты становятся существенными.

Ключевые слова: пластина Фёпpla–фон Кармана, поверхностная упругость, большие прогибы, собственные деформации.

DOI: 10.31857/S1026351925020141, EDN: AOOGIN

1. Введение. Частицы, расположенные на поверхности тела находятся в других условиях по сравнению с такими же частицами внутри тела: молекулы жидкости и твердого тела имеют повышенную энергию за счет меньшего количества соседних молекул, участвующих в Ван-дер-Ваальсовых, ионных и других взаимодействиях [1], на кристаллическом уровне у атомов появляются на поверхности незадействованные связи, меняющие структуру. Это приводит к изменению свойств поверхностного слоя по сравнению с внутренними областями тела. Кроме того, на поверхности могут образовываться оксидные пленки, области загрязнения. Также на поверхности и в ее близи могут образовываться области повышенного содержания дефектов. Последнее весьма актуально для пластин, подвергающихся рентгеновскому облучению в процессе проекционной литографии.

При уменьшении размеров тела возрастает относительное число частиц тела, расположенных на его поверхности, а следовательно, и относительная роль поверхностных эффектов. Для жидкости это приводит к появлению капиллярных явлений, достаточно хорошо изученных. Однако учет поверхностных эффектов в твердых телах также в последнее время привлекает

внимание исследователей; так появилось целое направление в механике, которое можно назвать теорией поверхностной упругости, например [2–20]. Необходимость решения задач, в которых следует учитывать данные эффекты, возникает при уменьшении размеров тела, в частности при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых в проекционной литографии [21–25].

В отличие от исследования влияния поверхности в случае упругости, число аналогичных исследований в области пластичности невелико. Здесь следует отметить работу [26], в которой вводится в рассмотрение бесконечно тонкий поверхностный слой, кинематика которого описывается величинами, независимыми от объемных.

Ранее [18–20] была предложена достаточно общая модель для описания вклада, вносимого наличием границы раздела твердого тела (интерфейса) в процесс упругого деформирования твердого тела. Сам интерфейс рассматривался как слой конечной толщины, обладающий свойствами, отличными от свойств контактирующих фаз, с последующим устремлением его толщины к нулю, при сохранении некоторых интегральных характеристик. Внешняя граница в рамках данной модели может быть рассмотрена как частный случай отсутствия одной из приграничных фаз. В работе [26] был использован аналогичный по сути подход для рассмотрения более сложного случая конечных деформаций при наличии пластической составляющей. Однако случай свободной внешней границы является намного более простым и может быть рассмотрен самостоятельно. При этом легче рассмотреть также и поверхностные эффекты, связанные с пластическим деформированием.

2. Поверхностная энергия жидких и твердых тел.

2.1. Поверхностная энергия жидкости. Исследование поверхностных явлений исторически началось с исследования жидкости. Капиллярные и схожие явления объясняются введением понятия поверхностной энергии – избытка свободной энергии атомов, находящихся на поверхности или в ее близи, по сравнению с энергией атомов, находящихся вдали от границ. Способность молекул жидкости свободно перемещаться приводит к тому, что при увеличении площади поверхности жидкости молекулы, находившиеся вдали от границы, выходят на нее (или приближаются к ней), увеличивая тем самым свободную энергию системы. Увеличение энергии, очевидно, оказывается пропорциональным увеличению площади поверхности. При уменьшении площади поверхности происходит обратный обратимый (если пренебречь явлениями вязкости) процесс. Отсюда следует положительность поверхностной энергии жидкости: при отрицательной поверхностной энергии площадь поверхности стремилась бы непрерывно увеличиваться, приводя в конечном счете к распаду на отдельные молекулы, что, собственно, и происходит при испарении.

При растяжении участка (плоской) поверхности жидкости (например, при растяжении мыльной пленки), работа dA , потраченная на увеличения площади поверхности жидкости dS , равна увеличению поверхностной энергии,

$$dA = \gamma dS = \gamma \Delta l dr.$$

Здесь γ – плотность поверхностной энергии; Δl – длина участка границы; dr – нормальное смещение границы. Прикладываемая к участку границы Δl сила есть

$$F = dA/dr = \gamma \Delta l.$$

Поверхностное напряжение (натяжение) σ_s естественным образом определяется как величина силы F , отнесенная к единице длины Δl , из чего следует равенство поверхностного натяжения и плотности поверхностной энергии $\sigma_s = \gamma$.

Иначе дело обстоит при упругом деформировании твердых тел, молекулы или атомы которого жестко связаны. Отсутствие свободного движения молекул (атомов) приводит к принципиальной возможности существования твердых тел с отрицательной поверхностной энергией. Вторым принципиальным отличием, вызванным связностью молекул (атомов) твердого тела при упругом деформировании, является изменение поверхностной энергии за счет изменения расстояний между атомами, а не за счет изменения количества атомов на поверхности. При этом напряжения становятся зависящими от деформаций (линейно в простейшем случае малых деформаций), а увеличение поверхностной энергии становится не пропорциональным изменению площади поверхности, а зависящей от этого изменения (квадратично в простейшем случае). Это позволяет говорить о поверхностной упругости, в отличие от поверхностного натяжения в случае жидкости.

При упруго-пластическом деформировании при увеличении площади поверхности могут реализовываться оба механизма: как увеличение расстояния между атомами (упругая составляющая), так и увеличение числа атомов на поверхности за счет их выхода из внутренней области (пластическая составляющая). При пренебрежении упругими деформациями (модель жестко-пластического деформирования), описание поверхностных эффектов становится практически идентичным описанию поверхностных эффектов в жидкостях.

2.2. Поверхностная упругость. Рассмотрим тело с границей $z = 0$, занимающее область $z > 0$; $-a < x < a$, $-b < y < b$. Пусть некоторая величина (плотность энергии, упругий модуль), характеризуемая плотностью $g(x, y, z)$, обладает некоторым распределением, таким, что при удалении от границы стремится к некоторому постоянному значению g_0 , а вблизи поверхности изменяется по некоторому закону (рис. 1). Следуя [8], под поверхностной плотностью $g^s(x, y)$ данной величины в некоторой точке поверхности (x_0, y_0) будем понимать интеграл от разности объемной плотности соответствующей величины $g(x_0, y_0, z)$ и ее значения g_0 по нормали к поверхности, проведенной через данную точку.

$$g^s(x_0, y_0) \equiv \int_0^z (g(x_0, y_0, z) - g_0) dz. \quad (2.1)$$

Верхний предел интегрирования при этом, строго говоря, должен простираться на всю рассматриваемую область или до бесконечности. Однако практически, если избыток рассматриваемой величины убывает с расстоянием от

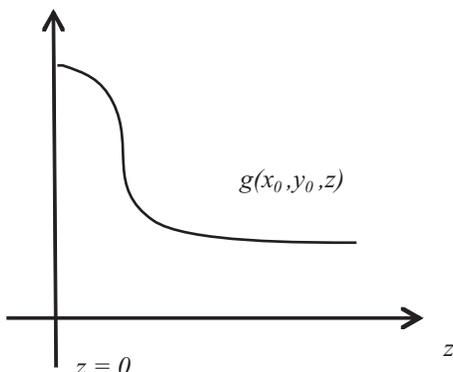


Рис. 1. Определение плотности поверхностных величин.

поверхности достаточно быстро, предел интегрирования можно сократить до некоторого малого конечного значения.

Пластины (особенно сверхтонкие) обычно рассматриваются в приближении обобщенного плоского напряженного состояния (напр. [27]), в рамках которого закон связи напряжений и деформаций (закон Гука) записывается в случае ортотропии в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжения; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформации; $C_{11}, C_{11}, C_{22}, C_{66}$ – компоненты матрицы упругости.

В случае изотропии

$$C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad C_{66} = 2\mu. \tag{2.3}$$

где λ, μ – константы Ламе.

В механике твердого тела при рассмотрении эффектов, связанных с наличием поверхности, обычно предполагается отсутствие влияние поверхности на компоненты деформаций $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ на поверхности. Согласно (2.1), выражения для компонент тензоров поверхностных напряжений и деформаций, а также поверхностных упругих констант, можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^s(x_0, y_0) &\equiv \int_0^z (\sigma_{\alpha\beta}(x_0, y_0, z) - \sigma_{\alpha\beta}^0) dz, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^s(x_0, y_0) &\equiv \varepsilon_{\alpha\beta}, \\ C_{\chi}^s(x_0, y_0) &\equiv \int_0^z (C_{\chi}(x_0, y_0, z) - C_{\chi}^0) dz, \quad \chi = 11, 12, 22, 66. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь и далее верхний индекс s на то, что данная величина относится к поверхности.

Выражение для изменения упругой энергии можно записать как сумму изменения упругой энергии без учета поверхностных эффектов dW^0 и дополнительное изменение упругой энергии, связанной с наличием поверхности dW^s

$$dW = dW^s + dW^0$$

$$dW^0 = \int_0^z [\sigma_{\alpha\beta}^0 d\varepsilon_{\alpha\beta}] dz \quad (2.5)$$

$$dW^s = \int_0^z [(\sigma_{\alpha\beta}(z) - \sigma_{\alpha\beta}^0) d\varepsilon_{\alpha\beta}] dz = \sigma_{\alpha\beta}^s d\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Из существования упругого потенциала следует

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \frac{dW^s}{d\varepsilon_{\alpha\beta}}. \quad (2.6)$$

Разложение (2.6) с удержанием лишь первых членов, приводит к линейному закону поверхностной упругости, который случая, например, ортотропии можно записать в тензорной форме

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \sigma_{\alpha\beta}^{s0} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (2.7)$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^s &= C_{11}^s \varepsilon_{11} + C_{12}^s \varepsilon_{22} + \sigma_{11}^{s0}, \\ \sigma_{12}^s &= C_{12}^s \varepsilon_{22} + C_{22}^s \varepsilon_{22} + \sigma_{22}^{s0}, \\ \sigma_{12}^s &= C_{33}^s \varepsilon_{12} + \sigma_{12}^{s0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}^{s0}$ — начальные поверхностные напряжения; $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s$ — тензор поверхностной упругости; $C_{11}^s, C_{12}^s, C_{22}^s, C_{33}^s$ — константы, характеризующие упругие свойства поверхности (составленные из компонент тензора поверхностных упругих модулей). В случае изотропной поверхностной упругости, подобно объемному случаю

$$C_{11}^s = C_{22}^s = \lambda^s + 2\mu^s, \quad C_{12}^s = \lambda^s, \quad C_{33}^s = \mu^s. \quad (2.9)$$

где λ^s, μ^s — аналоги констант Ламе для поверхностной упругости. При равнокомпонентном начальном напряженном состоянии поверхности σ^{s0} :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s0} = \sigma^{s0} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.8) представляет собой аналог обобщенного закона Гука для поверхности при наличии начальных напряжений. Его можно переписать в терминах собственных деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^{s0}$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^s &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{s0}), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{s0} &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s \varepsilon_{\alpha\beta}^{s0}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Из определения поверхностных модулей (2.4) и поверхностной энергии (2.4) не следует никаких ограничений на положительную определенность данных величин для твердого тела. Положительная определенность, очевидно, должна соблюдаться для полной энергии, а не для дополнительной ее части, связанной с поверхностью. Данное свойство неоднократно отмечалось многими авторами (напр., [28, 17–20]) и подтверждалось моделированием методами молекулярной динамики, напр. [13, 28].

Иногда, уравнение поверхностной упругости записывают в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \gamma_0 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial W^s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} = \gamma_0 \delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

где γ_0 – плотность поверхностной энергии, следующем из предположения, что в изменение поверхностной энергии вклад не только упругая часть (2.6), но и, непосредственно, изменение площади поверхности. При равнокомпонентных начальных напряжениях, т.е. при выполнении условия (2.10), формулы (2.8) и (2.12) формально совпадают, однако несут различный смысл: первый член в формуле (2.12) соответствует изменению площади поверхности, в то время как в (2.8) первый член появляется вследствие предположения различия минимумов энергии для отдельно рассматриваемых поверхности и внутренней области тела.

2.3. Упруго-пластическое деформирование поверхности. Не ставя цели написать сколько-нибудь общую теорию, отметим, что упруго-пластическое деформирование можно представить как суперпозицию упругого деформирования от некоторой конфигурации и эволюцию этой конфигурации (характеризующую пластическую часть). Обе части можно характеризовать некоторыми мерами деформирования, имеющими вид тензоров второго ранга. Подобное описание, по сути, эквивалентно описанию упругого деформирования тела при наличии собственных (свободных от напряжения) искажений формы (дисторсий) (напр. [29, 30]), при этом закон, описывающий эволюцию собственных деформаций, и является законом пластичности. Данные искажения формы, меняющиеся от точки к точке, включают в себя в общем случае не только деформации, но и повороты. Упругое же деформирование описывается тензором деформации, исключая повороты (симметричным тензором второго ранга). В случае конечных деформаций переход в конечное состояние описывается произведением соответствующих тензоров, в линеаризованном случае малых деформаций – суммой. Отметим, что тензор, характеризующий неупругую часть деформирования, может рассматриваться не как оператор, соответствующий переходу из недеформированного состояния в деформированное, а как характеристика текущего состояния. В общем случае тензоры, характеризующие упругую и неупругую составляющие деформирования, по отдельности не обязаны быть совместны (например [29, 30]), однако существует класс конфигураций, для которых условия совместности выполняются для каждой из частей по

отдельности. Более того, при наличии высокой степени симметрии не только упругая, но и неупругая составляющие деформирования позволяют исключить из рассмотрения повороты, и для подобных конфигураций уже полная деформация (характеризуемая симметричным тензором) может быть представлена в виде декомпозиции на упругую и неупругую составляющие [17].

В общем случае модель поверхностной упруго-пластичности можно построить аналогичным образом, используя основные положения, сформулированные для поверхностной упругости, а именно: рассмотреть деформацию поверхностного слоя как избыток деформации по сравнению с деформацией в объеме. При этом декомпозиция полной деформации (дисторсии в общем случае) на упругую и неупругую составляющие будет, вообще говоря, различной для объемной и поверхностной части. Подобный, достаточно общий подход, полностью в духе [18], был использован в работе [26].

Однако можно рассмотреть более простую модель. Отметим, что пластические деформации связаны с изменением относительного положения частиц тела в стационарном состоянии. Это относится как к внутренним областям, так и к областям, примыкающим к поверхности. Поэтому естественно ожидать, что при пластическом деформировании количество частиц (атомов, молекул) на поверхности будет увеличиваться при растяжении и уменьшаться при сжатии. При идеальной пластичности, деформирование происходит при постоянных напряжениях, поэтому описание поверхностных эффектов будет аналогичным описанию подобных эффектов в жидкости. Если все поверхностные эффекты сводятся лишь к изменению энергии, пропорциональному изменению площади поверхности, то изменение упругой энергии можно по-прежнему записать как сумму изменения упругой энергии без учета поверхностных эффектов dW^0 (которая находится на основе выбранной теории пластичности) и дополнительное изменение упругой энергии, связанной с наличием поверхности dW^s в форме (2.5), где $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^T$ – тензор полных деформаций, который, предполагается, что может быть разбит на упругую и пластическую составляющие.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{sT} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{sE} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{sP}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.13)$$

причем здесь каждая из величин, характеризующих поверхность, совпадает с соответствующей объемной (2.1).

При пренебрежении упругими поверхностными эффектами, точнее различием в упругом поведении поверхностного слоя и массива $\varepsilon_{\alpha\beta}^{sT} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{sP}$ (идеально жестко-пластическая модель для поверхности), изменение поверхностной энергии запишется в виде

$$dW^s = \int_0^z \left[(\sigma_{\alpha\beta}(z) - \sigma_{\alpha\beta}^0) d\varepsilon_{\alpha\beta} \right] dz = \sigma_{\alpha\beta}^s d\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma \delta_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

Откуда поверхностные напряжения находятся как

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \gamma \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.15)$$

В случае модели поверхности типа упруго-пластичности и пластичности с упрочнением могут реализовываться оба механизма: как изменение расстояния между частицами (упругая составляющая), так и выход частиц на поверхность (пластическая составляющая). При этом изменение поверхностной энергии можно записать как сумму (2.6) и (2.14), а поверхностные напряжения как сумму (2.8) и (2.15)

$$dW^s = \sigma_{\alpha\beta}^s d\varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\gamma\delta_{\alpha\beta} + \frac{dW^{sE}}{d\varepsilon_{\alpha\beta}} \right) d\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \gamma\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^{s0} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}^s \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (2.17)$$

Здесь dW^{sE} — упругая составляющая поверхностной энергии. Очевидно, первый и второй члены в правой части можно объединить. При записи (2.16) было явно учтено различие между увеличением поверхностной энергии за счет выхода новых частиц на поверхность, создание новой поверхности — пластической части, и за счет увеличения расстояния между частицами, растягиванием поверхности, — упругой части. На данное принципиальное различие указывалось и ранее, начиная с работы Шатлворса [1], и далее, например [31–34]. Однако некоторые авторы продолжают записывать закон поверхностной упругости (при которой не создается новой поверхности) в виде (2.12), понимая под γ именно удельную поверхностную энергию.

2.4. Об определении параметров, характеризующих свойства поверхности. Отдельно стоит вопрос об определении поверхностных свойств: модулей поверхностной упругости и поверхностной энергии. Число работ по экспериментальному определению данных параметров для твердых тел весьма ограничено, вследствие сложности проведения подобных исследований. Здесь следует ответить работу Гриффитса [35], в которой величина удельной поверхностной энергии определяется измерением данной величины расплава при температурах, близких температуре плавления, с последующей экстраполяцией. Большинство данных по указанным поверхностным свойствам было получено методами молекулярной динамики, молекулярной статистики, либо использованием первых принципов [13, 28, 31, 36–38]. Важный вопрос об определении типов потенциалов и их параметров обычно решался путем подгонки их значений для получения величин, значения которых известны из экспериментов, — чаще всего объемных упругих модулей — с последующим использованием полученных значений параметров для вычисления интересующих поверхностных величин, напр. [36].

Следует отметить, что для кристаллических тел как удельная поверхностная энергия, так и поверхностные модули могут существенно зависеть от ориентации нормали поверхности к кристаллографическим осям. Причем, несмотря на зависимость данных величин от нормали, легко показать, что эти зависимости не имеют тензорного характера. Действительно, для набора поверхностей с нормальными относительно кристаллографических осей, например $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$, существуют определенные значения величин удельной поверхностной энергии и поверхностных модулей. При изменении направления нормали на бесконечно малую величину, новую поверхность можно

рассматривать как совокупность – существующую поверхность с добавленными атомарными слоями, образующими последовательность “ступеней”. При достаточно малом угле, данные “ступени” будут достаточно редки, так что их можно рассматривать как невзаимодействующие, и вклад от них в каждую из поверхностных величин (например, в энергию) будет аддитивен и пропорционален их количеству на единицу длины, которая, в свою очередь, пропорциональна тангенсу (синусу) угла, характеризующего отклонения нормали от выбранного, например $[1,0,0]$. Поскольку количество подобных “ступенек” на единицу длины не зависит от направления отклонения нормали в некоторой плоскости, любая из рассматриваемых поверхностных величин будет при малых отклонениях от главных кристаллографических осей зависеть от угла как абсолютная величина синуса (тангенса). Очевидно, никакая тензорная величина не может обладать подобным свойством. На неочевидную зависимость поверхностной энергии кристалла от нормали указывалось еще в [39]. Для соответствующих свойств интерфейсов зависимости могут быть еще более сложными. В качестве экспериментального подтверждения нетензорного характера зависимости поверхностной энергии от направления нормали, можно привести форму выросших в естественных условиях кристаллов, в которых плоские грани сопрягаются поверхностями весьма малой кривизны.

В работе [36] были рассчитаны значения констант поверхностной упругости для поверхностей кристалла алюминия, ориентированных в кристаллографических плоскостях $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$ с использованием десяти различных потенциалов. Так, для плоскости $[1,0,0]$: $C_{11}^s = -10.18 \div 3.09$ Н/м, $C_{22}^s = -10.18 \div 3.09$ Н/м, $C_{12}^s = -5.47 \div 4.46$ Н/м; для плоскости $[1,1,0]$: $C_{11}^s = -26.17 \div 11.37$ Н/м, $C_{22}^s = -15.91 \div 13.11$ Н/м, $C_{12}^s = 2.12 \div 26.79$ Н/м; для плоскости $[1,1,1]$: $C_{11}^s = -10.71 \div 12.70$ Н/м, $C_{22}^s = -83.92 \div 17.28$ Н/м, $C_{12}^s = -19.14 \div 3.81$ Н/м. Полученные данные имеют весьма большой разброс и даже различные знаки. На их основании даже нельзя сделать вывод, приводят ли поверхностные эффекты к возрастанию или убыванию жесткости пластины; можно лишь делать предположения о порядке вклада поверхностных эффектов.

Вышесказанное касается изменений свойств поверхности, вызванных перераспределением положений атомов и связей между ними вблизи границы. Однако, при изменении свойств приповерхностных слоев вещества благодаря внешним факторам, таким как окисление, нарушение структуры вследствие рентгеновского облучения и др., эти изменения определяются данными факторами и могут варьироваться в гораздо более широких пределах.

2.5. Учет поверхностных явлений при описании упругого деформирования пластины. При рассмотрении поверхностных явлений в пластинах естественным образом возникают два параметра: отношение толщины поверхностного слоя к толщине пластины и отношение модуля упругости приповерхностного слоя к модулю упругости материала внутри пластины. Очевидно, что при величине первого из указанных параметров менее $10^{-3} \div 10^{-4}$ явлениями, связанными с поверхностной упругостью, можно пренебречь, а при величине этого параметра порядка единицы – можно говорить об изменении свойств пластины в целом. Что касается второго параметра, то, в рамках концепции поверхностной

упругости, введение поверхностного слоя нулевой толщины и позволяют свести оба параметра путем соответствующего предельного перехода, напр. [18–20].

Наличие начальных поверхностных напряжений в однородной ненагруженной пластине из твердого (кристаллического, либо аморфного при отсутствии релаксационных процессов) тела не приводит, в отличие от пленки жидкости, к появлению ненулевых средних напряжений в сечении, поскольку данные исходные поверхностные напряжения компенсируются напряжениями противоположного знака, возникающими во внутренних точках сечения. Действительно, рассмотрим пластину прямоугольной формы в состоянии отсутствия внешней нагрузки и выделим область, ограниченную замкнутой поверхностью, охватывающей участок ее свободного торца и участки обоих примыкающих к нему краев, и проходящей через некоторое сечение на расстоянии от торца. Поскольку края пластины свободны от напряжений, то и суммарная сила, действующая в сечении в силу глобального баланса должна быть равна нулю. Если в этом сечении действуют растягивающие (сжимающие) поверхностные усилия, то единственное, чем они могут быть скомпенсированы, – это действующие в этом же сечении напряжения противоположного знака во внутренних слоях. Таким образом, по крайней мере в случае однородной пластины, наличие начальных поверхностных напряжений не сказывается на уравнениях, описывающих процесс упругого деформирования пластин. В жидкостях ситуация принципиально иная: при выделении подобной области для пленки жидкости, усилия на проходящем через пленку участке границы области компенсируются усилиями, прикладываемыми к краю пленки. При пластическом деформировании пластин, подобный мембранный вклад от поверхностной энергии образующихся участков поверхности также может иметь место.

Рассмотрим влияние поверхностных эффектов на деформирование тонких пластин на примере пластины круговой формы.

3. Уравнение изгиба круглой симметрично нагруженной пластины с учетом растяжения центральной плоскости и поверхностных эффектов. Выберем в качестве отсчетной конфигурации состояние пластины, когда ее центральная поверхность плоская, в цилиндрических координатах r, z, φ пластина занимает область $-h/2 < z < h/2, r < R$. Рассмотрим простейший случай постоянства начальных поверхностных напряжений, в общем случае различных для верхней и нижней граней $\sigma_{rr}^{s0+} = \sigma_{\varphi\varphi}^{s0+} = \sigma^{s0+}, \sigma_{rr}^{s0-} = \sigma_{\varphi\varphi}^{s0-} = \sigma^{s0-}$. При отсутствии внешних напряжений эти поверхностные напряжения из условия равновесия необходимо компенсируются объемными напряжениями, действующими внутри пластины

$$\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0 = (\sigma^{s0+} + \sigma^{s0-})/h. \quad (3.1)$$

При наличии усилий, приложенных к границе, условие в общем случае не соблюдается. Например, представим массивную плиту, в малой центральной части которой некоторым идеальным методом изъяли часть материала, оставив весьма тонкую пластину. Поскольку в исходной плите объемные напряжения отсутствовали, а в процессе удаления материала размеры оставшейся части пластины не менялись, объемные напряжения не могли появиться.

Появление же поверхностных напряжений должно быть скомпенсировано появившимися напряжениями на краях. Еще раз подчеркнем, что появление объемных напряжений (3.1) вызвано свойством твердого тела сохранять форму; в жидкости подобные напряжения не возникают, и поэтому пленка жидкости не способна сохранять конфигурацию при отсутствии внешних усилий.

Принимая кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява, выпишем зависимости радиальной и окружной компонент деформации – компонент редуцированного тензора деформации Грина–Сен-Венана (деформации Кармана см., напр. [40]) – через радиальную u и нормальную w компоненты смещения плоскости $z=0$.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - (z - z_0) \frac{d^2w}{dr^2}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} - (z - z_0) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (3.2)$$

Здесь положение плоскости отсчета z_0 , вообще говоря, произвольное, выбирается из соображений удобства.

Выражения для компонент тензора напряжений (суммы компонент второго тензора Пиолы–Кирхгофа и компонент тензора поверхностной упругости) можно записать в виде следующих определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \bar{E} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} - (z - z_0) \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] + \sigma^{s0+} \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + \\ & + \sigma^{s0-} \delta \left(z + \frac{h}{2} \right) + \sigma^0 + (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+}) \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - (z - z_0) \frac{d^2w}{dr^2} \right] \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + \\ & + \lambda^{s+} \left[\frac{u}{r} - (z - z_0) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + (\lambda^{s-} + 2\mu^{s-}) \times \\ & \times \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + (z - z_0) \frac{d^2w}{dr^2} \right] \delta \left(z + \frac{h}{2} \right) + \lambda^{s-} \left[\frac{u}{r} + (z - z_0) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \delta \left(z + \frac{h}{2} \right). \quad (3.3) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = & \bar{E} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - (z - z_0) \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \right] \\ & + \sigma^{s0+} \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + \sigma^{s0-} \delta \left(z + \frac{h}{2} \right) + \sigma^0 + \\ & + \lambda^{s+} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - (z - z_0) \frac{d^2w}{dr^2} \right] \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + \\ & + (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+}) \left[\frac{u}{r} - (z - z_0) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \delta \left(z - \frac{h}{2} \right) + \\ & + \lambda^{s-} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + (z - z_0) \frac{d^2w}{dr^2} \right] \delta \left(z + \frac{h}{2} \right) + \\ & + (\lambda^{s-} + 2\mu^{s-}) \left[\frac{u}{r} + (z - z_0) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \delta \left(z + \frac{h}{2} \right). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$ – модифицированный модуль Юнга; $E = E(z)$, $n = n(z)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, в общем случае неоднородные по толщине пластины; λ^{s+} , μ^{s+} , λ^{s-} , μ^{s-} – константы поверхностной упругости для верхней и нижней поверхности; σ^0 , σ^{s0+} , σ^{s0-} – начальные напряжения в объеме, на верхней и нижней поверхности; δ – дельта-функция Дирака.

Для интегральных усилий, приведенных к некоторой плоскости, находящейся от центра на расстоянии z_0 , и определяемых как

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} dz, & T_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz, & Q &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz, \\ M_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} (z - z_0) \sigma_{rr} dz, & M_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} (z - z_0) \sigma_{\varphi\varphi} dz. \end{aligned} \quad (3.5)$$

справедливы уравнения равновесия, получающиеся интегрированием уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \sigma_{rz} \right) - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \sigma_{rr} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sigma_{rr}}{r} + q = 0 \quad (3.7)$$

и интегрированием уравнения (3.6), умноженного на $(z - z_0)$, в которых традиционно, в связи с их малостью, отброшены члены, соответствующие произведениям касательных напряжений на производную прогиба.

$$\frac{dM_{rr}}{dr} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_r = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + \frac{d}{dr} \left(T_{rr} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(T_{rr} \frac{dw}{dr} \right) + q = 0. \quad (3.10)$$

Здесь q – приложенная к поверхности нагрузка.

Подстановка (3.3)–(3.4) в (3.5) дает

$$T_{rr} = C_{11} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + C_{12} \frac{u}{r} + c_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} + c_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + T^k, \quad (3.11)$$

$$T_{\varphi\varphi} = C_{12} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + C_{11} \frac{u}{r} + c_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} + c_{11} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + T^k, \quad (3.12)$$

$$M_{rr} = -D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + c_{21} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + c_{22} \frac{u}{r} + \frac{h}{2} (\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}) - z_0 T_{rr}, \quad (3.13)$$

$$M_{\varphi\varphi} = -D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{11} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + c_{22} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + c_{21} \frac{u}{r} + \frac{h}{2} (\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}) - z_0 T_{\varphi\varphi}. \quad (3.14)$$

Здесь упругие постоянные

$$\begin{aligned} C_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-v^2(z)} dz + \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}, \\ C_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)v(z)}{1-v^2(z)} dz + \lambda^{s+} + \lambda^{s-}, \\ c_{11} &= z_0 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-v^2(z)} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z}{1-v^2(z)} dz - \\ &\quad - \left(\frac{h}{2} - z_0 \right) (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+}) + \left(\frac{h}{2} + z_0 \right) (\lambda^{s-} + 2\mu^{s-}), \\ c_{12} &= z_0 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)v(z)}{1-v^2(z)} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z}{1-v^2(z)} dz - \left(\frac{h}{2} - z_0 \right) \lambda^{s+} + \left(\frac{h}{2} + z_0 \right) \lambda^{s-}, \\ c_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z}{1-v^2(z)} dz + \frac{h}{2} (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}), \\ c_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)v(z)}{1-v^2(z)} z dz + \frac{h}{2} (\lambda^{s+} - \lambda^{s-}), \\ D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z^2}{1-v^2(z)} dz - z_0 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z}{1-v^2(z)} dz + \\ &\quad + \frac{h^2}{4} (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}) - \frac{hz_0}{2} (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}), \\ D_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)v(z)z^2}{1-v^2(z)} dz - z_0 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)v(z)z}{1-v^2(z)} dz + \\ &\quad + \frac{h^2}{4} (\lambda^{s+} + \lambda^{s-}) - \frac{hz_0}{2} (\lambda^{s+} - \lambda^{s-}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В случае постоянства упругих характеристик по толщине, данные выражения упрощаются до вида

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \bar{E}h + \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}, \\
 C_{12} &= \bar{E}vh + \lambda^{s+} + \lambda^{s-}, \\
 c_{11} &= \bar{E}hz_0 - \left(\frac{h}{2} - z_0\right)(\lambda^{s+} + 2\mu^{s+}) + \left(\frac{h}{2} + z_0\right)(\lambda^{s-} + 2\mu^{s-}), \\
 c_{12} &= \bar{E}hvz_0 - \left(\frac{h}{2} - z_0\right)\lambda^{s+} + \left(\frac{h}{2} + z_0\right)\lambda^{s-}, \\
 c_{21} &= \frac{h}{2}(\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}), \\
 c_{22} &= \frac{h}{2}(\lambda^{s+} - \lambda^{s-}), \\
 D_{11} &= \frac{\bar{E}h^3}{12} + \frac{h^2}{4}(\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}) - \frac{hz_0}{2}(\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}), \\
 D_{12} &= \frac{\bar{E}h^3}{12}v + \frac{h^2}{4}(\lambda^{s+} + \lambda^{s-}) - \frac{hz_0}{2}(\lambda^{s+} - \lambda^{s-}).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Растяжение, вызванное начальными поверхностными и объемными напряжениями

$$T^k = \sigma^0 h + \sigma^{s0+} + \sigma^{s0-} \tag{3.17}$$

в большинстве случаев, в частности, при отсутствия приложенных усилий в исходном состоянии, в силу (3.1) равно нулю.

Выражения для моментов (3.13), (3.14) удобно переписать, исключив из них члены, пропорциональные

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \text{ и } \frac{u}{r}$$

посредством использования выражений для усилий (3.11), (3.12)

$$M_{rr} = -D'_{11} \frac{d^2w}{dr^2} - D'_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + (\beta_{11} - z_0)T_{rr} + \beta_{12}T_{\varphi\varphi} + \frac{h}{2}(\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}) - \alpha T^k, \tag{3.18}$$

$$M_{\varphi\varphi} = -D'_{12} \frac{d^2w}{dr^2} - D'_{11} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \beta_{12}T_{rr} + (\beta_{11} - z_0)T_{\varphi\varphi} + \frac{h}{2}(\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}) - \alpha T^k. \tag{3.19}$$

Здесь эффективные изгибные жесткости и перекрестные коэффициенты

$$\begin{aligned}
 D'_{11} &= D_{11} - \frac{c_{12}(c_{22}C_{11} - c_{21}C_{12}) + c_{11}(c_{21}C_{11} - c_{22}C_{12})}{C_{11}^2 - C_{12}^2}, \\
 D'_{12} &= D_{12} - \frac{c_{11}(c_{22}C_{11} - c_{21}C_{12}) + c_{12}(c_{21}C_{11} - c_{22}C_{12})}{C_{11}^2 - C_{12}^2},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\beta_{11} = \frac{c_{21}C_{11} - c_{22}C_{12}}{C_{11}^2 - C_{12}^2}, \quad \beta_{12} = \frac{c_{22}C_{11} - c_{21}C_{12}}{C_{11}^2 - C_{12}^2}, \quad \alpha = \frac{c_{21} + c_{22}}{C_{11} + C_{12}}. \quad (3.21)$$

В случае постоянства упругих характеристик по толщине, данные выражения упрощаются до вида

$$D'_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + (\lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}) \frac{h^2}{4} - \left[\frac{(\lambda^{s+} - \lambda^{s-} + \mu^{s+} - \mu^{s-})^2}{Eh/(1-\nu) + 2(\lambda^{s+} + \lambda^{s-} + \mu^{s+} + \mu^{s-})} + \frac{(\mu^{s+} - \mu^{s-})^2}{Eh/(1+\nu) + 2(\mu^{s+} + \mu^{s-})} \right] \frac{h^2}{2}, \quad (3.22)$$

$$D'_{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu + (\lambda^{s+} + \lambda^{s-}) \frac{h^2}{4} - \left[\frac{(\lambda^{s+} - \lambda^{s-} + \mu^{s+} - \mu^{s-})^2}{Eh/(1-\nu) + 2(\lambda^{s+} + \lambda^{s-} + \mu^{s+} + \mu^{s-})} - \frac{(\mu^{s+} - \mu^{s-})^2}{Eh/(1+\nu) + 2(\mu^{s+} + \mu^{s-})} \right] \frac{h^2}{2},$$

$$\beta_{11} = \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda^{s+} - \lambda^{s-} + \mu^{s+} - \mu^{s-}}{Eh/(1-\nu) + 2(\lambda^{s+} + \lambda^{s-} + \mu^{s+} + \mu^{s-})} + \frac{\mu^{s+} - \mu^{s-}}{Eh/(1+\nu) + 2(\mu^{s+} + \mu^{s-})} \right),$$

$$\beta_{12} = \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda^{s+} - \lambda^{s-} + \mu^{s+} - \mu^{s-}}{Eh/(1-\nu) + 2(\lambda^{s+} + \lambda^{s-} + \mu^{s+} + \mu^{s-})} - \frac{\mu^{s+} - \mu^{s-}}{Eh/(1+\nu) + 2(\mu^{s+} + \mu^{s-})} \right), \quad (3.23)$$

$$\alpha = \frac{h}{2} \frac{\lambda^{s+} - \lambda^{s-} + \mu^{s+} - \mu^{s-}}{Eh/(1-\nu) + 2(\lambda^{s+} + \mu^{s+} + \lambda^{s-} + \mu^{s-})}.$$

Подстановка выражений для моментов (3.18), (3.19) в уравнение равновесия для моментов (3.8) с учетом (3.9) позволяет найти перерезывающую силу.

$$Q = -D'_{11} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{h}{2} \beta_{12} \frac{d}{dr} (T_{rr} + T_{\varphi\varphi}). \quad (3.24)$$

После чего, подстановка полученного значения в уравнение равновесия для усилий (3.10) дает уравнение для прогиба

$$D' \Delta^2 w - \left(T_{rr} \frac{d^2 w}{dr^2} + T_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \beta \frac{h}{2} \Delta (T_{rr} + T_{\varphi\varphi}) = q. \quad (3.25)$$

где приведенная изгибная жесткость $D' = D'_{11}$ и коэффициент $\beta = \beta_{12}$ определяются (3.20), (3.21) либо (3.22) и (3.23) для неоднородных и однородных по толщине пластин соответственно.

В полученную систему уравнений величина z_0 , определяющая положение плоскости отсчета от центра пластины, входит только в определяющие

соотношения для сил и моментов, и ее выбор определяется удобством записи граничных условий. Относительного упрощения выражения можно достичь следующим образом. Согласно (3.11), (3.12), выражение для $T_{rr} + T_{\varphi\varphi}$ можно записать как

$$T_{rr} + T_{\varphi\varphi} = (C_{11} + C_{12}) \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] + (C_{11} + C_{12}) \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + (c_{11} + c_{12}) \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + 2T^k. \quad (3.26)$$

Здесь лапласиан от первого и четвертого члена правой части равен нулю. Коэффициент $(c_{11} + c_{12})$ в третьем члене можно обнулить, положив

$$z_0 = \frac{h}{2} \frac{\lambda^{s^+} - \lambda^{s^-} + \mu^{s^+} - \mu^{s^-}}{Eh / (1 - \nu) + 2(\lambda^{s^+} + \lambda^{s^-} + \mu^{s^+} + \mu^{s^-})}. \quad (3.27)$$

Тогда уравнение (3.25) упрощается до вида

$$D' \Delta^2 w - \left(T_{rr} \frac{d^2w}{dr^2} + T_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \beta C' \Delta \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = q, \quad (3.28)$$

где

$$C' = \frac{Eh}{2(1 - \nu)} + \lambda^{s^+} + \mu^{s^+} + \lambda^{s^-} + \mu^{s^-}. \quad (3.29)$$

Замечание 1. Учет средних по сечению начальных продольных усилий (3.17), в случае их наличия, приводит к появлению в уравнении изгиба связанных с ними членов, аналогичных членам, появляющимся вследствие изгиба в уравнениях кармановского типа. Поэтому пренебрежение последними, делаемое многими авторами (кроме случая цилиндрического изгиба), представляется крайне непоследовательным.

В рассмотренном выше случае различных поверхностных модулей для верхней и нижней границы определяющие соотношения, связывающие растяжения и повороты с растягивающими усилиями и моментами, являются связанными, что характерно для несимметричных составных пластин (напр. [41]) и приводит к появлению дополнительного члена в уравнении изгиба (3.25). Данное уравнение существенно упрощается при равенстве поверхностных характеристик для верхней и нижней границы $\lambda^{s^+} = \lambda^{s^-} = \lambda^s$, $\mu^{s^+} = \mu^{s^-} = \mu^s$. Начальные напряжения по-прежнему можно предполагать различными. В этом случае система уравнений записывается практически в традиционной форме [42, 43]:

$$D' \Delta^2 w - \left(T_{rr} \frac{d^2w}{dr^2} + T_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q. \quad (3.30)$$

где приведенная изгибная жесткость определяется как

$$D' = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + (\lambda^s + 2\mu^s) \frac{h^2}{2}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.30) дополняется до замкнутой системы уравнениями (3.9), (3.11), (3.12). Эту систему удобно переписать в виде, явно учитывающем начальные (постоянные) напряжения

$$D' \Delta^2 w - \left(T'_{rr} \frac{d^2 w}{dr^2} + T'_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - T^k \Delta w = q, \quad (3.32)$$

$$\frac{dT'_{rr}}{dr} + \frac{T'_{rr} - T'_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (3.33)$$

$$T'_{rr} = E'h \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + E''h \frac{u}{r}, \quad (3.34)$$

$$T_{rr} = E''h \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + E'h \frac{u}{r}, \quad (3.35)$$

где T'_{rr} , $T'_{\varphi\varphi}$ — усилия, связанные только с упругими деформациями и не учитывающие начальные напряжения, а величины приведенных упругих констант определяются как

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} + \frac{2}{h} (\lambda^s + 2\mu^s), \quad E'' = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} + \frac{2}{h} \lambda^s, \quad (3.36)$$

Выражения для моментов определяются формулами (3.13), (3.14).

Замечание 2. Подчеркнем, что полученные уравнения (3.32)–(3.35) отличаются от традиционных уравнений Фёппля–фон Кармана лишь модификацией упругих констант (3.31), (3.36), учитывающей поверхностные эффекты, и наличием члена в уравнении (3.32), зависящего от начальных напряжений. Существенным фактом является пропорциональность данного члена сумме усилий от как поверхностных, так и объемных начальных напряжений (3.17). Пренебрежение же здесь объемными начальными напряжениями непоследовательно и ведет к искажению решения. Отметим, что в подавляющем большинстве случаев выполняется условие (3.1) и данный член вообще может быть упразднен.

Замечание 3. В систему уравнений (3.32)–(3.35) начальные поверхностные и объемные напряжения входят лишь в виде комбинации (3.17), разность же напряжений $\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}$ в них не участвует. Однако она входит в выражения для моментов (3.13), (3.14) и, следовательно, может входить в граничные условия. Так, при нулевой нормальной нагрузке q и свободных краях $M_{rr}(R) = 0$ из (3.13) следует граничное условие

$$\left[\frac{\bar{E}h^3}{12} + (\lambda^s + 2\mu^s) \frac{h^2}{2} \right] \frac{d^2 w}{dr^2} \Big|_{r=R} + \left[\frac{\bar{E}h^3}{12} \nu + \lambda^s \frac{h^2}{2} \right] \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \Big|_{r=R} = (\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-}) \frac{h}{2}, \quad (3.37)$$

приводящее, очевидно, к нетривиальному решению. Для условий жесткой заделки

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = w(R) = 0$$

тривиальное решение $u(r) = 0, w(r) = 0$ системы (3.32)–(3.35) существует, при этом моменты, как во внутренней области, так и на границе, согласно (3.13), (3.14) остаются не нулевыми, а равными $M_{\phi\phi} = M_{rr} = (\sigma^{s0+} - \sigma^{s0-})(h/2)$.

Существенным упрощением является допущение о постоянстве продольных усилий $T'_{rr} = T'_{\phi\phi} = T$. Не будучи точным, оно позволяет получить обозримые аналитические решения, полезные для анализа, напр. [43, 44]. Уравнения (3.33)–(3.35) при этом не могут быть удовлетворены точно, а уравнение (3.32) записывается как

$$D' \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right] - (T + \sigma_k h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = q. \quad (3.38)$$

Величина T находится из граничных условий [43, 44].

4. Задача об упругом деформировании жестко защемленной круглой пластины с учетом поверхностных эффектов. Рассмотрим задачу о деформировании жестко защемленной круглой пластины радиуса R и толщины h под действием равномерно приложенного давления к одной из сторон с учетом поверхностных эффектов. Будем пользоваться моделью типа Фёппля–фон Кармана при дополнительном предположении постоянства растягивающих напряжений (3.38) и выполнения условия (3.1). Граничные условия жесткой заделки имеют вид

$$w(R) = 0 \left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad u(R) = 0. \quad (4.1)$$

Прогиб w находится интегрированием уравнения (3.38) при выполнении условия (3.1) и первого и второго граничных условий (4.1)

$$w(r) = \frac{q(R^2 - r^2)}{4T} + C \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right) - I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right) \right], \quad (4.2)$$

$$C = \frac{qR}{2T} \frac{\sqrt{D'}}{\sqrt{T}} / I_1 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right). \quad (4.3)$$

Первая и вторая производные от вертикального смещения суть

$$w'(r) = -\frac{qr}{2T} + C \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} I_1 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right), \quad (4.4)$$

$$w''(r) = -\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D'} \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right) + I_2 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D'}} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Растяжение T все еще остается неизвестным. Для ее нахождения выразим из определяющих соотношений (3.34), (3.35) с использованием условия $T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = T$ компоненты продольных деформаций (без учета поворотов)

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = \frac{u}{r} = \frac{T}{h} [E' + E'']^{-1}. \quad (4.6)$$

Из первого равенства интегрированием от 0 до R , учетом (4.4), а из второго непосредственно получим значение $u(R)$, подставив которое в третье граничное условие (4.1), можно получить значение T . Поскольку в рассматриваемом приближении постоянства усилий $T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = T$ условия (3.33)–(3.35) не могут выполняться точно одновременно, выражения для $u(R)$ оказываются различны

$$u(R) = \frac{TR}{h} [E' + E'']^{-1} - \frac{1}{2} \int_0^R (w'(r))^2 dr, \quad (4.7)$$

$$u(R) = \frac{TR}{h} [E' + E'']^{-1} \quad (4.8)$$

в первом и втором случаях соответственно. Здесь $w'(r)$ определяется выражением (4.4). Аналогично [44] будем использовать для подстановки в граничное условие среднее значение (4.7), (4.8)

$$u(R) = \frac{TR}{h} [E' + E'']^{-1} - \frac{1}{4} \int_0^R (w'(r))^2 dr. \quad (4.9)$$

Подстановка сюда (4.4) дает уравнение для определения усилия T

$$\begin{aligned} & \frac{TR}{h} [E' + E'']^{-1} = \\ & \frac{R^3 \left(C^2 T^4 {}_2F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; \frac{R^2 T}{D'} \right) + D' q \left(D' q - 2CT {}_1F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{R^2 T}{4D'} \right) \right) \right)}{48D'^2 T^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь ${}_mF_n$ – гипергеометрическая функция, а постоянная интегрирования C связана с T посредством (4.3).

Данное уравнение можно переписать в безразмерных координатах

$$\eta = \frac{1}{4\xi^2 I_1^2 (\xi^{1/2})} {}_2F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; \xi \right) + \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi^{5/2} I_1 (\xi^{1/2})} {}_1F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{\xi}{4} \right). \quad (4.11)$$

где введены безразмерные величины

$$\xi = \frac{R^2 T}{D'}, \quad \eta = \frac{48D'^3}{R^8 q^2 h (E' + E'')}. \quad (4.12)$$

Для больших прогибов величина ξ согласно достаточно большая величина, и ведущим членом правой части (4.11) становится второй член ξ^{-3} , а

асимптотическое решение трансцендентного уравнения приобретает чрезвычайно простой вид

$$\xi = \eta^{-1/3}, \quad \xi \gg 1. \tag{4.13}$$

Для малых прогибов ξ – малая величина, и разложение правой части приобретает вид $1/(280\xi)$. Асимптотическое решение при этом есть

$$\xi = (280\eta)^{-1}, \quad \xi \ll 1. \tag{4.14}$$

Результаты численных расчетов представлены ниже.

5. Оценка влияния поверхностных эффектов на параметры изгиба пластины.

Для расчетов будем использовать упрощенную модель, предполагающую равенство и постоянство растягивающих усилий $T_{rr} = T_{\phi\phi} = T$, которое в рамках данной модели определяется из решения уравнения (4.11).

Представим безразмерные величины ξ, η введя малый параметр

$$\varepsilon = \frac{1 - \nu^2}{Eh} (\lambda^s + 2\mu^s). \tag{5.1}$$

как

$$\xi = \frac{\xi_0}{(1 + 6\varepsilon)} \approx \xi_0 (1 - 6\varepsilon), \quad \eta = \eta_0 \frac{(1 + 6\varepsilon)^3}{(1 + 4\chi\varepsilon)} \approx \eta_0 [1 + (18 - 4\chi)\varepsilon]. \tag{5.2}$$

Здесь

$$\xi_0 = \frac{R^2 T}{D}, \quad \eta_0 = \frac{48 D^3 (1 + \nu)}{R^8 q^2 h E}. \tag{5.3}$$

а безразмерный параметр

$$\chi = \frac{1}{1 + \nu} \frac{\lambda^s + \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s}. \tag{5.4}$$

имеет порядок единицы.

Для размерных величин, подставляя (5.2), (5.3) в (4.13) либо (4.14) имеем для больших и малых прогибов, соответственно

$$T = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 E R^2 h}{6(1 + \nu)} \right)^{1/3} (1 + 4\chi\varepsilon)^{1/3}, & \xi \gg 1, \\ \frac{3}{280} \frac{R^6 q^2 (1 + \nu)(1 - \nu)^2 (1 + 4\chi\varepsilon)}{E h^5 (1 + 6\varepsilon)^2}, & \xi \ll 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\frac{T}{Eh} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 R^2}{E^2 h^2 6(1 + \nu)} \right)^{1/3}.$$

Соответственно, отношение продольного усилия в моделях учитывающей и не учитывающей поверхностные эффекты

$$\frac{T}{T_0} \approx \begin{cases} 1 + \frac{4}{3}\chi\varepsilon, & \xi \gg 1, \\ 1 - (12 - 4\chi)\varepsilon, & \xi \ll 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Однако, для весьма малых прогибов сама величина продольного усилия T исчезающе мала, и ею можно пренебречь уже в уравнении для прогиба, сводя его к уравнению Софи Жермен.

Оценим влияние наличия поверхностной упругости также на два других параметра: прогиб в центре пластины $w(0)$ и изгибающий момент на краю пластины $M_R = M_{rr}(R)$.

$$w(0) = \frac{qR^2}{4T} \left(1 + 2 \frac{1 - I_0(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi} I_1(\sqrt{\xi})} \right), \quad (5.7)$$

$$\frac{D}{q} \left(-\sqrt{\xi} \frac{I_2(\sqrt{\xi}) + I_0(\sqrt{\xi})}{(\sqrt{\quad})} \right) \quad (5.8)$$

Для больших ξ справедливы асимптотические разложения

$$w(0) = \frac{qR^2}{4T} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\xi}} \right), \quad \xi \gg 1, \quad (5.9)$$

$$M_R = \frac{D'q}{T} (1 - \sqrt{\xi}), \quad \xi \gg 1. \quad (5.10)$$

Подставляя сюда и пренебрегая членом $2\xi^{-1/2}$ и единицей, в первом и втором случаях соответственно имеем

$$w(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{6(1+\nu)qR^4}{Eh} \right)^{1/3} (1 + 4\chi\varepsilon)^{-1/3}, \quad \xi \gg 1, \quad (5.11)$$

$$M_R = -q \sqrt{\frac{R^2}{T_0}} \frac{(1 + 6\varepsilon)^{1/2}}{(1 + 4\chi\varepsilon)^{-1/3}}, \quad \xi \gg 1. \quad (5.12)$$

Откуда отношение прогиба в центре пластины и отношения изгибающего момента на краю в моделях учитывающей и не учитывающей поверхностные эффекты

$$\frac{w(0)}{w_0(0)} \approx 1 - \frac{4}{3}\chi\varepsilon, \quad \xi \gg 1, \quad (5.13)$$

$$\frac{M_R}{M_R^0} \approx 1 + \left(3 - \frac{4}{3}\chi \right) \varepsilon, \quad \xi \gg 1. \quad (5.14)$$

Для малых прогибов, используя уравнение Софи Жермен, т.е. пренебрегая в уравнении изгиба членами, связанными с растяжением, получаем элементарное решение, свойства которого при заданных h, R определяются одним параметром q/D' для смещения и одним параметром q для момента. Из чего заключаем, что распределение моментов в этом приближении не зависит от параметров поверхностной упругости, а для прогиба в центре пластины, используя зависимость изгибной жесткости от поверхностных модулей, получаем

$$\frac{w(0)}{w_0(0)} = 1 - 6\epsilon, \quad \xi = 0. \quad (5.15)$$

Сравнение (5.13) и (5.15) демонстрирует, что влияние поверхностных эффектов для больших прогибов пластин имеет тот же порядок, хотя и несколько меньше, что и для линейного приближения, пренебрегающего влиянием продольных усилий в пластине.

На основании данных п. 2.3, верхняя оценка для величин $\lambda^s \sim \mu^s \sim 10^2$ Н/м (для случая поверхностных эффектов в идеальном кристалле алюминия). Упругие константы алюминия $E = 70 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu = 0.35$ [45]. Откуда на основании $\epsilon \sim 10^{-8} h^{-1}$, из чего следует, что поверхностная упругость может давать вклад порядка процентов уже для толщин порядка 10^{-6} м. Однако оценка $\lambda^s \sim \mu^s \sim 10^2$ Н/м представляется все же слишком завышенной. Если изменение упругих свойств вблизи поверхности вызвано внешними причинами, такими как деградация материала вследствие жесткого облучения, величины λ^s, μ^s могут изменяться в более широких пределах и поверхностные эффекты могут сказываться на более толстых пластинах.

Заключение. Представлены уравнения осесимметричного изгиба круглой пластины типа Фёппля—фон Кармана, учитывающие поверхностные эффекты: наличие поверхностного слоя, характеризующегося своими упругими константами и начальными напряжениями, а также наличие начальных объемных напряжений.

Показано, что при рассмотрении упругого отклика, удельная поверхностная энергия не дает вклада в деформацию. При пластическом деформировании, однако, вклад от поверхностной энергии появляется.

Показано, что учет лишь начальных поверхностных напряжений, не скомпенсированных начальными объемными напряжениями либо граничными условиями, приводит к нарушению условий равновесия и, следовательно, к некорректности модели. При наличии начальных поверхностных и объемных напряжений упругий отклик зависит лишь от их интегральной характеристики; данная зависимость исчезает в случае, когда начальные поверхностные напряжения скомпенсированы начальными объемными.

Показано, что подход, основанный на учете начальных поверхностных напряжений, или даже совместном учете начальных поверхностных и компенсирующих их, пусть и частично, начальных объемных напряжений и одновременно пренебрежении продольными усилиями, возникающими вследствие изгиба, представляется крайне непоследовательным, кроме как для случая изгиба пластин по цилиндрической поверхности.

Получено асимптотическое решение для больших прогибов задачи о круглой равномерно нагруженной жестко защемленной пластине в приближении предположения постоянства растягивающих усилий. С помощью данного решения проведена оценка влияния поверхностных эффектов. Показано, что данное влияние имеет тот же порядок, хотя и несколько меньше, что и для линейного приближения (пренебрегающего влиянием продольных усилий в пластине).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-19-00866.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Израелашвили Дж.Н.* Межмолекулярные и поверхностные силы. М.: Научный мир, 2011. 431 с.
2. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids // Proc. Phys. Soc. 1950. V. A63. P. 444–457. <https://doi.org/10.1088/0370-1298/63/5/302>
3. *Gurtin, M.E. and Murdoch, A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V.57. № 4. P. 291–323. <https://doi.org/10.1007/BF00261375>
4. *Cahn J.W., Larche F.* Surface stress and the chemical equilibrium of small crystals. II. Solid particles embedded in a solid matrix // Acta Metallurgica. 1982. V. 30. № 1. P. 51–56. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(82\)90043-8](https://doi.org/10.1016/0001-6160(82)90043-8)
5. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наук. Думка, 1985. 200 с.
6. *Hashin Z.* Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. 1990. V. 8. № 4. P. 333–348. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90051-G](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90051-G)
7. *Cammarata R.C.* Surface and interface stress effects in thin films // Progr. Surf. Sci. 1994. V. 46. № 1. P. 1–38. [https://doi.org/10.1016/0079-6816\(94\)90005-1](https://doi.org/10.1016/0079-6816(94)90005-1)
8. *Ibach H.* The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // Surf. Sci. Rep. 1997. V. 29. № 5-6. P. 195–263. [https://doi.org/10.1016/S0167-5729\(97\)00010-1](https://doi.org/10.1016/S0167-5729(97)00010-1)
9. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology. 2000. V. 11. № 3. P. 139–147. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/11/3/301>
10. *Müller P., Saul A.* Elastic effects on surface physics // Surf. Sci. Rep. 2004. V. 54. № 5–8. P. 157–258. <https://doi.org/10.1016/j.surfrep.2004.05.001>
11. *Jiang B., Weng G.J.* A generalized self-consistent polycrystal model for the yield strength of nanocrystalline materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52. № 5. P. 1125–1149. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.09.002>
12. *Murdoch, A.I.* Some fundamental aspects of surface modeling // J. Elasticity. 2005. V. 80. P. 33–52. <https://doi.org/10.1007/s10659-005-9024-2>
13. *Shenoy V.B.* Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. № 9. P. 094104. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.094104>

14. *Tan H., Liu C., Huang Y., Geubelle P.H.* The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives // *J. Mech. Phys. Solids*. 2005. V. 53. № 3. P. 1892–1917. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.009>
15. *Eremeyev, V.A., Altenbach, H., Morozov, N.F.* The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates // *Dokl. Phys.* 2009. V. 54. P. 98–100. <https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>
16. *Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.* Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // *МТТ*. 2010. № 3. С. 30–44.
17. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.V.* Effect of residual stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix // *Phys. Mesomech.* 2010. V. 13. № 5–6. P. 318–328. <https://doi.org/10.1016/j.physme.2010.11.012>
18. *Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A.* On the modeling of surface and interface elastic effects in case of eigenstrains // *Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials*. Berlin: Springer, 2013. V. 30. 193 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35783-1_13
19. *Goldstein, R.V., Gorodtsov, V.A., Ustinov, K.B.* On surface elasticity theory for plane interfaces // *Phys. Mesomech.* 2014. V. 17. P. 30–38. <https://doi.org/10.1134/S1029959914010044>
20. *Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Ustinov K.B.* Spherical inclusion in an elastic matrix in the presence of eigenstrain, taking into account the influence of the properties of the interface, considered as the limit of a layer of finite thickness // *Mech. Solids*. 2019. V. 54. № 4. P. 514–522. <https://doi.org/10.3103/S0025654419040034>
21. *Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications*. IOP Publishing Ltd, 2020. 450 p. <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>
22. *Салащенко Н.Н., Чхало Н.И., Дюжнев Н.А.* Безмасочная рентгеновская литография на основе МОЭМС и микрофокусных рентгеновских трубок // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2018. № 10. С. 10–20. <https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>
23. *Silverman J.P.* Challenges and progress in X-ray lithography // *J. Vac. Sci. Technol. B*. 1998. V. 16. № 6. P. 31–37. <https://doi.org/10.1116/1.590452>
24. *Vladimirsky Y., Bourdillon A., et al.* Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1999. V. 32. P. 114–118. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>
25. *Cheng Y.L., Li M.L., Lin J.H., Lai J.H., Ke C.T., Huang Y.C.* Development of dynamic mask photolithography system // *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM'05)*. 2005. P. 467–471. <https://doi.org/10.1109/ICMECH.2005.1529302>
26. *Esmaili A., Steinmann P., Javili A.* Surface plasticity: theory and computation // *Comput. Mech.* 2018. V. 62. P. 617–634. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1517-x>
27. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
28. *Zhou L.G., Huang H.* Are surfaces elastically softer or stiffer? // *Appl. Phys. Lett.* 2004. V. 84. № 11. P. 1940–1942. <https://doi.org/10.1063/1.1682698>

29. *de Wit R.* Theory of disclinations: II. Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity // *J. Res. Nat. Bur. Stand. Sec. A: Phys. Ch.* 1973. V. 77A. № 1. P. 49–100.
<https://doi.org/10.6028/jres.077A.003>
30. *Kröner E.* Continuum theory of defects // *Physics of defects.* V. 35. P. 217–315.
31. *Nicholson M.M.* Surface tension in ionic crystals // *Proc. Roy. Soc. A.* 1955. V. 228. № 1175. P. 490.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0064>
32. *Leo P.H., Sekerka R.F.* The effect of surface stress on crystal–melt and crystal–crystal equilibrium. Berlin: Springer, 1999. pp. 176–195.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-59938-5_8
33. *Fischer F.D., Simha N.K., Svoboda J.* Kinetics of diffusional phase transformation in multicomponent elastic–plastic materials // *ASME J. Eng. Mater. Technol.* 2003. V. 125. № 3. P. 266–276.
<https://doi.org/10.1115/1.1586939>
34. *Yang F.* Effect of interfacial stresses on the elastic behavior of nanocomposite materials // *J. Appl. Phys.* 2006. V. 99. № 5. P. 054306.
<https://doi.org/10.1063/1.2179140>
35. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1921. V. 221. № 582–593. P. 163–198.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
36. *Nejat Pishkenari H., Yousefi F.S., TaghiBakhshi A.* Determination of surface properties and elastic constants of FCC metals: a comparison among different EAM potentials in thin film and bulk scale // *Mater. Res. Express.* 2018. V. 6. № 1. P. 015020.
<https://doi.org/10.1088/2053-1591/aae49b>
37. *Vo T., Reeder B., Damone A., Newell, P.* Effect of domain size, boundary, and loading conditions on mechanical properties of amorphous silica: a reactive molecular dynamics study // *Nanomaterials.* 2020. V. 10. № 1. P. 54.
<https://doi.org/10.3390/nano10010054>
38. *Tang Z, Chen Y, Ye W.* Calculation of surface properties of cubic and hexagonal crystals through molecular statics simulations // *Crystals.* 2020. V. 10. № 4. P. 329.
<https://doi.org/10.3390/cryst10040329>
39. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с. (т. VI)
40. *Лычев С.А.* Несовместные деформации гибких пластин // *Ученые записки казанского университета. Серия физико-математические науки.* 2023. Т. 165. № 4. С. 361–388.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>
41. *Altenbach, H., Altenbach, J., Kissing, W.* Mechanics of Composite Structural Elements. Berlin: Springer, 2004. 470 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
42. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
43. *Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А.* Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия.* 2023. Т. 29. № 4. С. 77–105.
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>

44. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия. 2024. Т. 30. № 1. С. 50–63.
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
45. Ануриев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя в 3 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 2001.

ON ACCOUNTING FOR SURFACE EFFECTS IN BENDING OF ULTRATHIN PLATES

К. В. Ustinov^{a, *}

^a*A.Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^{*}*E-mail: ustinov@ipmnet.ru*

The equations for axisymmetric bending of a circular plate of the Voepl-von Kármán type are given that account for surface effects: the presence of a surface layer characterized by its elastic constants and initial stresses, as well as the presence of initial volumetric stresses. An asymptotic solution for large deflections of the problem of a circular uniformly loaded rigidly clamped plate is obtained under the assumption of constant tensile forces. An assessment was made of the plate parameters at which surface effects become significant.

Keywords: Fepl–von Karman plate, surface elasticity, large deflections, eigenstrains

REFERENCES

1. *Israelishvil J.N.* Intermolecular and Surface Forces, London : Academic Press, 1992. 450 p.
2. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids // Proc. Phys. Soc. 1950. V. A63. P. 444–457.
<https://doi.org/10.1088/0370-1298/63/5/302>
3. *Gurtin, M.E. and Murdoch, A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V. 57. № 4. P. 291–323. 1975. V. 59. P. 389–390.
<https://doi.org/10.1007/BF00261375>
4. *Cahn J.W., Larche F.* Surface stress and the chemical equilibrium of small crystals. II. Solid particles embedded in a solid matrix // Acta Metallurgica. 1982. V. 30. No. 1. P. 51–56.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(82\)90043-8](https://doi.org/10.1016/0001-6160(82)90043-8)
5. *Podstrigach Y.S., Povstenko Y.Z.* Introduction to Mechanics of Surface Phenomena in Deformable Solids. Naukova Dumka, Kiev 1985. 200 c. (in Russ.).
6. *Hashin Z.* Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. 1990. V. 8. P. 333–348.
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90051-G](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90051-G)

7. *Cammarata R.C.* Surface and interface stress effects in thin films // *Progr. Surf. Sci.* 1994. V. 46. № 1. P. 1–38.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00128-7](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00128-7)
8. *Ibach H.* The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // *Surf. Sci. Rep.* 1997. V. 29. P. 195–263.
[https://doi.org/10.1016/S0167-5729\(97\)00010-1](https://doi.org/10.1016/S0167-5729(97)00010-1)
9. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology.* 2000. V. 11. P. 139–147.
<https://doi.org/10.1088/0957-4484/11/3/301>
10. *Müller P., Saul A.* Elastic effects on surface physics // *Surf. Sci. Rep.* 2004. V. 54. – P. 157–258.
<https://doi.org/10.1016/j.surfrep.2004.05.00>
11. *Jiang B., Weng G.J.* A generalized self-consistent polycrystal model for the yield strength of nanocrystalline materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 2004. V. 52. P. 1125–1149.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.09.002>
12. *Murdoch, A.I.* Some fundamental aspects of surface modeling // *J. of Elasticity.* 2005. V. 80. P. 33–52.
<https://doi.org/10.1007/s10659-005-9024-2>
13. *Shenoy V.B.* Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. № 9. P. 094104.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.094104>
14. *Tan H., Liu C., Huang Y., Geubelle P.H.* The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives // *J. Mech. Phys. Solids.* 2005. V. 53. P. 1892–1917.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.009>
15. *Eremeyev V.A., Altenbach H., Morozov, N.F.* The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates // *Dokl. Phys.* 2009. V. 54. P. 98–100.
<https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>
16. *Altenbach H., Eremeev V.A., Morozov N.F.* On equations of the linear theory of shells with surface stresses taken into account // *Mechanics of Solids.* 2010. V. 45. № 3. P. 331–342.
<https://doi.org/10.3103/S0025654410030040>
17. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.V.* Effect of residual stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix. *Phys. Mesomech.* 2010. V. 13. P. 318–328.
<https://doi.org/10.1016/j.physme.2010.11.012>
18. *Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A.* On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains. Models, Simulations and Applications / In: Series: Advanced Structured Materials, H. Altenbach, N.F. Morozov, (Eds.) 2013. V. 30. 193 p.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-35783-1_13
19. *Goldstein, R.V., Gorodtsov, V.A., Ustinov, K.B.* On surface elasticity theory for plane interfaces // *Phys Mesomech.* 2014. V. 17. P. 30–38.
<https://doi.org/10.1134/S1029959914010044>
20. *Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Ustinov K.B.,* Spherical Inclusion in an Elastic Matrix in the Presence of Eigenstrain, Taking Into Account the Influence of the Properties of the Interface, Considered as the Limit of a Layer of Finite Thickness // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 4. P. 514–522.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419040034>

21. Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Editor: De Teresa, Jose Maria. IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p.
<https://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>
22. *Salashchenko N.N., Chkhalo N.I., Dyuzhev N.A.* Maskless X-Ray Lithography Based on Moems and Microfocus X-Ray Tubes. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2018, no. 10, pp. 10–20.
<https://doi.org/10.1134/S0207352818100165> [In Russian]
23. *Silverman J.P.* Challenges and progress in X-ray lithography // *Journal of Vacuum Science and Technology B*. 1998. V. 16. P. 31–37.
<https://doi.org/10.1116/1.590452>
24. *Vladimirsky Y., Bourdillon A., et al.* Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diraction // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1999. V. 32. P. 114–118.
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>
25. *Cheng Y.L., Li M.L., Lin J.H., Lai J.H., Ke C.T., and Huang Y.C.* Development of dynamic mask photolithography system // *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM'05)*. 2005. P. 467–471.
<https://doi.org/10.1109/ICMECH.2005.1529302>
26. *Esmaeili A., Steinmann P., Javili A.* Surface plasticity: theory and computation. *Comput. Mech.* 2018. V. 62. P. 617–634.
<https://doi.org/10.1007/s00466-017-1517-x>
27. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* *Theory of Elasticity*, third ed. McGraw-Hill, 1970.
28. *Zhou L.G., Huang H.* Are surfaces elastically softer or stiffer? // *Applied Physics Letters*. 2004. V. 84. № 11. P. 1940–1942.
<https://doi.org/10.1063/1.1682698>
29. *deWit R.* Theory of disclinations: II. Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity // *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section A*. 7. 1973. V. 7A. № 1. P. 49–100.
<https://doi.org/10.6028/jres.077A.003>
30. *Kröner E.* Continuum theory of defects // *Physics of defects*. V. 35. P. 217–315.
31. *Nicholson M.M.* Surface tension in ionic crystals. *Proc. Roy. Soc. A*. 1955. V. 228. P. 490.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0064>
32. *Leo P.H., Sekerka R.F.* The effect of surface stress on crystal–melt and crystal–crystal equilibrium. Springer, Berlin. 1999. P. 176–195.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-59938-5_8
33. *Fischer F.D., Simha N.K., Svoboda J.* Kinetics of diffusional phase transformation in multicomponent elasticplastic materials // *ASME J Eng Mater Technol.* 2003. V. 125. P. 266–276
34. *Yang F.* Effect of interfacial stresses on the elastic behavior of nanocomposite materials // *J Appl Phys.* 2006. V. 99. P. 054306.
<https://doi.org/10.1063/1.2179140>
35. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1921. V. 221. № 582–593. P. 163–198.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
36. *Nejat Pishkenari H., Yousefi F.S., TaghiBakhshi A.* Determination of surface properties and elastic constants of FCC metals: a comparison among different EAM potentials in thin film and bulk scale. *Materials Research Express*. 2018.
<https://doi.org/10.1088/2053-1591/aae49b>

37. *Vo T., Reeder B., Damone A., Newell P.* Effect of Domain Size, Boundary, and Loading Conditions on Mechanical Properties of Amorphous Silica: A Reactive Molecular Dynamics Study // *Nanomaterials*. 2020. V. 10. № 1. P. 54.
<https://doi.org/10.3390/nano10010054>
38. *Tang Z, Chen Y, Ye W.* Calculation of Surface Properties of Cubic and Hexagonal Crystals through Molecular Statics Simulations // *Crystals*. 2020. V. 10. № 4. P. 329.
<https://doi.org/10.3390/cryst10040329>
39. *Landau L.D. Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Vol. 6 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. 1987. ISBN 978-0-08-033933-7. (т. VI)
40. *Lychev S.A.* Incompatible deformations of flexible plates. // *Scientific notes of Kazan University. Series physical and mathematical sciences*. 2023, V. 165, book. 4. P. 361–388 (In Russian).
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>
41. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements. 2004.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
42. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. McGraw-Hill, 1959. 635 p.
43. *Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A.* Bending of a circular disk: from cylinder to ultrathin membrane. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, №. 4, pp. 77–105.
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>.
44. *Ustinov K.B., Gandilyan D.V.* On the boundary conditions for a thin circular plate conjugate to a massive body // *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2024. V. 30. N 1. P. 50–63.
<https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
45. *Anuriev V.I.* Handbook of mechanical engineering designer in 3 vols. V. 1. 8th edition, revised and enlarged. Zhestkova I.N. (Ed.). Moscow: Mashinostroenie, 2001, 34 p. Available at: <https://www.servotechnica.spb.ru/library/BOOKS/Anurev?ysclid=ismzst00yj406639767>. (In Russ.) ISBN 5-217-02963-3