ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 2, с. 226–237

УДК 517.956.223

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2025 г. Т. Н. Бобылева[a], *, А. С. Шамаев[b], **

[a]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия
[b]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**E-mail: bobyleva-tn@yandex.ru, **e-mail: sham@rambler.ru*

Поступила в редакцию 30.10.2024 г.
После доработки 10.11.2024 г.
Принята к публикации 11.11.2024 г.

В работе рассматривается задача о гашении колебаний мембраны и пластины с помощью сил, распределенных по всей площади мембраны и пластины. Предлагаемый метод позволяет рассматривать ограничения не только на абсолютную величину управления, но и на абсолютную величину производных от функций, задающих управление. Приводятся достаточные условия на начальные условия, при которых задача приведения системы в покой за конечное время разрешима, оценивается время приведения в покой.

Ключевые слова: управление, колебательная система, распределенные и сосредоточенные силы, малые управляющие силы, интегро-дифференциальные системы.

DOI: 10.31857/S1026351925020149, **EDN:** ANURFC

1. Введение. В теории управления вопрос о гашении колебаний упругих систем с помощью граничных и распределенных сил является одним из классических вопросов теории управления. Исследованиям в этой области посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов.

Впервые задача об управлении одномерного волнового уравнения (уравнения колебаний струны) с помощью силы, приложенной на ее конце, рассмотрена в работе [1]. Доказано, что колебания могут быть остановлены за конечное время ограниченной по модулю силой. Работа [2] приводит результаты о полной управляемости с помощью граничных сил. Задачи управления колебаниями упругих систем (мембрана, пластина) с помощью сил, ограниченных по абсолютной величине, распределенных по всей поверхности управляемого объекта, рассмотрены в [3].

В статье [4] доказано, что механическую систему, описываемую уравнением струны с памятью, можно привести в равновесие за конечное время, при этом абсолютное значение распределенной функции управления ограничено, и ядро памяти является линейной комбинацией экспонент. В статье [5] рассматривается проблема управляемости распределенной системы, описываемой двумерным уравнением Гуртина–Пипкина. В данной работе дана система с компактным распределенным управлением. Показано, что если ядро памяти представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию, такую, что ее преобразование Лапласа имеет хотя бы один корень, то систему невозможно привести к равновесию за конечное время. В работе [6] решается задача точного управления системой, описываемой уравнением с интегральной «памятью». Показано, что при определенных условиях эту систему можно привести в состояние покоя за конечное время распределенным управлением, ограниченным по абсолютной величине. Рассмотрены различные типы ядер в интегральном члене уравнения и описаны связи между задачами управляемости некоторых гиперболических и параболических систем дифференциальных уравнений.

Задача граничного управления колебаниями плоской мембраны о возможности приведения ее в состояние покоя за конечное время решена в работах [7, 9]. В [8] рассмотрена задача точного ограниченного управления поперечными колебаниями тонкой пластины с целью полной остановки колебаний за конечный период времени. Управляющие воздействия применяются к границе пластины, заполняющей некоторую ограниченную область на плоскости.

Для интегро-дифференциальных уравнений, таких как известное уравнение Гуртина–Пипкина [10], результаты о полной граничной и распределенной управляемости будут существенно отличаться от результатов для дифференциальных уравнений и систем.

Доказательство возможности успокоения колебаний распределенным управлением за конечное время в [3] основано на спектральном методе. С его помощью исходная задача сводится к задаче остановки системы, состоящей из счетного числа независимых маятниковых систем, которые связаны только через суммарное ограничение на силовые воздействия на эти системы, которое не должно превосходить по модулю заданную величину. Каждая колебательная система управляется при этом оптимально по быстродействию с помощью алгоритма, основанного на принципе максимума [13]. Указанные колебательные системы не содержат членов, учитывающих трение.

В настоящей работе мы рассматриваем системы с внутренней диссипацией механической энергии и диссипацией за счет трения о внешнюю среду. Исследуется также вопрос о полной остановке колебаний за конечное время. Рассматриваются хорошо известные модели мембраны с трением о внешнюю среду и с трением Кельвина–Фойгхта, а также модель колебаний неньютоновской жидкости Кельвина–Фойгхта. Корректность такой краевой задачи установлена в [18]. В данной работе также применяется спектральный метод, позволяющий свести задачу об остановке колебаний к остановке колебаний счетной системы маятниковых колебательных звеньев. При этом для доказательства возможности остановки всех колебательных звеньев системы за конечное, общее для всех звеньев системы время, используется не алгоритм принципа максимума, а алгоритм управления, который не является оптимальным, но может быть реализован с помощью явно задаваемой и гладкой управляющей функции. Построение такого алгоритма изложено в разд. 2. В этом разделе приводится также оценка времени остановки колебаний для данного алгоритма. Далее в системах с распределенными параметрами с использованием такого метода построены алгоритмы гашения колебаний с ограничением не только на абсолютную величину управляющей функции, но также и на ее производные. Для задач с диссипацией устанавливается, что трение «помогает» управлению, приводящему систему в состояние покоя, время приведения оказывается пропорциональным не обратной величине ограничения на величину управляющей силы, а логарифму от нее. При этом условия на начальные смещения и скорость систем, при которых возможно приведение в состояние покоя, также меняются. Так, для мембраны с трением Кельвина–Фойгхта эти условия существенно ослабляются, а для задачи о колебаниях жидкости Кельвина–Фойгхта остаются достаточно жесткими. Это объясняется поведением коэффициента трения в маятниковой системе для случая трения Кельвина–Фойгхта, в модели пластины он неограниченно растет при росте номера маятниковой системы, а для модели жидкости Кельвина–Фойгхта и для модели мембраны с трением о внешнюю среду остается ограниченным.

В разделе 3 приводятся необходимые для исследования задач управляемости математические результаты, в частности, результат об оценке величины модулей собственных функций эллиптических краевых задач, нормированных в среднеквадратичной метрике [13, 14].

В разделе 4 устанавливаются достаточные условия полной управляемости систем с диссипацией.

Следует также отметить, что задача граничного управления с помощью ограниченной силы при наличии трения Кельвина–Фойгхта не является разрешимой [16], а при наличии трения о внешнюю среду полная управляемость имеет место.

Граничная управляемость для систем с интегральным последействием имеет место в особых случаях [19], а наличие распределенной управляемости зависит от типа ядра свертки в нелокальных системах [4–6, 17].

2. Алгоритм остановки колебаний маятниковой системы с трением с помощью гладкой управляющей функции. Рассмотрим теперь задачу о гашении колебаний маятника с трением с помощью внешней силы.

Рассмотрим следующую задачу управления

$$\ddot{u} + \gamma\ddot{u} + \omega^2 u = f(t); \; u(0) = u_0, \; \dot{u}(0) = u_1, \tag{2.1}$$

$|f(t)| \le \varepsilon$, $f(t)$ – управляющее воздействие, $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Мы должны выбрать число $T > 0$ и функцию $f(t)$, такую что $|f(t)| \le \varepsilon$, $f(t) \equiv 0$при $t > T$, такие, чтобы $u(T) = \dot{u}(T) = 0$.

Предположим, что характеристическое уравнение для уравнения (2.1) имеет два комплексно-сопряженных корня $\mu, .., \mu = \alpha + i\omega$, $\bar{\mu} = \alpha - i\omega$, $\alpha < 0$.

Решение уравнения (2.1) с начальными условиями $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1$ имеет вид

$$u(t) = C_1 e^{\mu T} + C_2 e^{\bar{\mu} T} - \int_0^t \frac{e^{\mu(t-\tau)} - e^{\bar{\mu}(t-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} f(\tau)\, d\tau .$$

Следовательно, выполненение терминальных условий при $t = T$ эквивалентно равенствам

$$0 = C_1 e^{\mu T} + C_2 e^{\bar{\mu} T} + \int_0^T \frac{e^{\mu(T-\tau)} - e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} f(\tau)\, d\tau,$$

$$0 = C_1 \mu e^{\mu T} + C_2 \bar{\mu} e^{\bar{\mu} T} + \int_0^T \frac{\mu e^{\mu(T-\tau)} - \bar{\mu} e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} f(\tau)\, d\tau .$$

Будем искать $T > 0$ и функцию $f(T, t)$ в виде

$$f(T,t) = K_1(T) e^{-\mu t} + K_2(T) e^{-\bar{\mu} t} . \tag{2.2}$$

Заметим, что экспоненты в формуле (2.2) – растущие, малость абсолютной величины f будет обеспечена за счет убывания коэффициентов $K_1(T)$, $K_2(T)$ при экспонентах.

Введем векторы $\bar{K}$ и $\bar{V}$ размерности 2 и матрицу B размерности 2×2 следующим образом

$$\bar{K} = \begin{Vmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Vmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{Vmatrix} C_1 e^{\mu T} + C_2 e^{\bar{\mu} T} \\ C_1 \mu e^{\mu T} + C_2 \bar{\mu} e^{\bar{\mu} T} \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} \displaystyle\int_0^T \frac{e^{\mu(T-\tau)} - e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} e^{-\mu\tau}\, d\tau & \displaystyle\int_0^T \frac{e^{\mu(T-\tau)} - e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} e^{-\bar{\mu}\tau}\, d\tau \\ \displaystyle -\int_0^T \frac{\mu e^{\mu(T-\tau)} - \bar{\mu} e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} e^{-\mu\tau}\, d\tau & \displaystyle -\int_0^T \frac{\mu e^{\mu(T-\tau)} - \bar{\mu} e^{\bar{\mu}(T-\tau)}}{\mu - \bar{\mu}} e^{-\bar{\mu}\tau}\, d\tau \end{Vmatrix}.$$

Тогда уравнение для определения $K_1(t)$, $K_2(t)$ примет вид

$$\bar{V} = B\bar{K} . \tag{2.3}$$

Выполняя в элементах матрицы B интегрирование, применяя правило Крамера и делая оценки $\det B$ и определителей M_1, M_2, которые получаются заменой в матрице B первого и второго столбца на вектор $\bar{V}$ соответственно, получим

$$\det B \sim e^{-4\alpha T}, \ (\det B)^{-1} \quad e^{4\alpha} , \ M_1, M_2 \sim e^{-\alpha T}, \ K_1, K_2 \sim e^{3T}, \ |f| \le e^{2\alpha T}.$$

Более точные оценки приводят к неравенству

$$|f(t)| \le C_0(|\mu| + k_0)(|u_0| \cdot |\mu| + u_1) e^{2\alpha T} ,$$

где C_0, k_0 – постоянные, не зависящие от μ, u_0, u_1, т.е. с ростом T величина $|f(t)|$ на $[0, T]$ убывает экспоненциально, а значит, для времени управления будет иметь место логарифмическая оценка $T^* \le C \ln \varepsilon^{-1}$ для малых $\varepsilon > 0$.

3. Необходимые математические результаты.

Определение 1. Введем обозначение $f \in H_D^k(\Omega)$, если $f \in H^k(\Omega)$ и $f\big|_{\partial\Omega} = \dots = \Delta^{[(k-1)/2]} f\big|_{\partial\Omega} = 0.$

Теорема 1. Если $f \in H_D^k(\Omega)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 |\lambda_n|^k < \infty$, где f_n – коэффициенты ряда Фурье при разложении по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа, λ_n – собственные значения $\Delta u_n = \lambda_n u_n$ в Ω [12].

Определение 2. Введем обозначение $f \in A_p$, если $|c_n| \le C/n^p$, c_n – коэффициенты в разложении в ряд Фурье по собственным функциям соответствующих задач на собственные значения и собственные функции.

Утверждение 1. Класс A_p принадлежит $H_D^k(\Omega)$ при $k \ge 2p$ [12].

Оно является следствием асимптотики Куранта–Вейля, $\ln \sim n^{2m/d}$, $2m$ – порядок оператора, d – размерность пространства.

Теорема 2. Пусть $\Phi_k(x)$ – собственные функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Тогда

$$\max_{\Omega} |\Phi_k(x)| \le \omega_k^{(d-1)/2} \ln \omega_k, \; \omega_k^2 \equiv \lambda_k \text{ [13].}$$

Теорема 3. Пусть $\Phi_k(x)$ – семейство функций оператора L порядка $2m$, $\omega_k^{2m} = \lambda_k$, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$, с краевыми условиями, удовлетворяющими общим граничным условиям Шапиро-Лопатинского. Тогда $\max\limits_{\Omega} |\Phi_k(x)| \le \omega_k^{d/2}$ см. [14].

4. О задачах полной управляемости для систем с распределенными параметрами при наличии диссипации. Рассмотрим теперь задачу об оптимальном управлении колебательными процессами, которые задаются системами уравнений с частными производными с краевыми условиями в области Ω, которая может иметь размерность $d = 1, 2, 3$. Границу области будем считать гладкой.

1. Волновое уравнение, диссипация механической энергии отсутствует,

$$\ddot{u} = \Delta u + f(t,x) \text{ в } \Omega, \; u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.1}$$

функция $f(t,x)$ является управляющим воздействием, $|f(t,x)| \le \varepsilon$, $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon > 0$, $u\big|_{t=0} = u_0(x)$, $\dot{u}\big|_{t=0} = u_1(x)$.

Задача управления состоит в выборе постоянной $T > 0$ и управляющей функции $f(t,x)$, $|f(t,x)| \le \varepsilon$, такой что для $t > T$ $f \equiv 0$ и $u(t,x)$ удовлетворяет условию $u(t,x) = 0$ при $t > T$.

Приведенная постановка задачи соответствует задаче о гашении колебаний с помощью малой внешней силы, приложенной ко всей области Ω. Здесь мы приводим данную постановку для полноты изложения, она исследована в [20].

2. Телеграфное уравнение, диссипация имеет характер трения о внешнюю среду,

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} = \Delta u + f(t,x) \text{ в } \Omega, \tag{4.2}$$

краевые условия, условия на уравнение и начальные условия также аналогичны постановке задачи для уравнения (2.1). Задача состоит в приведении колебаний в покой за конечное время $T>0$.

3. Волновое уравнение с трением Кельвина–Фойгта, которое моделирует внутреннее трение слоев в материале,

$$\ddot{u} + \beta\Delta\dot{u} = \Delta u + f(t,x) \text{ в } \Omega, \tag{4.3}$$

краевые условия, условия на уравнение и начальные условия аналогичны постановке задачи для уравнения (4.1), задача также состоит в гашении колебаний системы.

4. Жидкость Кельвина–Фойгхта, диссипация механической энергии определяется скоростью и также ускорением частиц среды.

Для случая жидкости Кельвина–Фойгхта ограничимся размерностью $d=1$, поскольку только в этом случае нашим методом можно просто получить достаточные условия для начальных условий системы, при которых возможна остановка колебаний системы с помощью распределенной силы, задаваемой малой по абсолютной величине и гладкой функцией. Многомерный случай первой задачи рассмотрен в [14], в этой работе изучен вопрос о корректности задачи для $d=1$. Уравнение динамики жидкости Кельвина–Фойгхта принимает вид

$$\ddot{u} = \alpha\ddot{u}_{xx} + \beta\dot{u}_{xx} + \gamma u_{xx}, \tag{4.4}$$

где $u(t,x)$ – смещение жидкости, $t>0$, $x\in[0,\pi]$. На границе отрезка $x\in[0,\pi]$ заданы условия Дирихле $u(t,0)=u(t,\pi)=0$.

Введем собственные значения ω_k^2 и собственные функции φ_k задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta\varphi_k + \omega_k^2\varphi_k = 0 \text{ в } \Omega, \\ \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1, \end{cases} \tag{4.5}$$

Обозначим $m_k = \sup\limits_{x\in\Omega} |\varphi_k(x)|$. Будем искать решения $f(t,x)$ задач управления (4.1)–(4.4) в виде разложения $f(t,x)$, а также $u(t,x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$:

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k(x), \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x),$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k\varphi_k(x), \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_1^k\varphi_k(x).$$

Подставляя данные разложения в уравнения (4.2)–(4.4), а также в начальные условия для этих уравнений, получим три системы из колебательных звеньев, в которых колебательные звенья связаны в каждой из этих систем только через ограничения на управляющие воздействия, которые в сумме по абсолютной величине не должны превосходить $\varepsilon>0$. Управление каждым маятником по отдельности было уже построено в явном виде, нужно только выдержать исходное суммарное условие на управление всех колебательных звеньев и выдержать общее для всех звеньев время остановки. Нетрудно видеть, что функции $u_k(t)$, описывающие динамику каждого звена, для случая, например, 4 должны удовлетворять уравнению

$$\ddot{u}_k - \frac{(\alpha\omega_k^2)\dot{u}_k}{1+\beta\omega_k^2} + \frac{(\gamma\omega_k^2)u_k}{1+\beta\omega_k^2} = \frac{f_k(t)}{1+\beta\omega_k^2}. \tag{4.6}$$

Пусть $|\varphi_k| \le m_k$ в Ω, $|f_k| \le \varepsilon_k$, по условию задачи должно быть

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k\varepsilon_k < \varepsilon.$$

Ранее в разд. 2 была получена связь между временем управления (т.е. временем приведения в покой системы (4.6)) и величиной $\sup\limits_{\Omega}|f_k| = \varepsilon_k$ в явном виде, т.е. $T_k = F(|c_1^k|, |c_2^k|, \varepsilon_k, \mathrm{Re}(\mu_k), \mathrm{Im}(\mu_k))$, где F – явное аналитическое выражение. Из этого соотношения можно определить, каким должен быть порядок убывания постоянных c_1^k, c_2^k, определяющихся через начальные условия, при которых $T_k \le T^*$, где T^* не зависит от k, т.е. все колебательные звенья можно остановить за одинаковое время. Порядок убывания коэффициентов Фурье определяется гладкостью функции и некоторыми дополнительными краевыми условиями (см. разд. 3). Для волнового уравнения эти условия приводят к неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T_k}\left(1+|\omega_k|\right)\left(|u_0^k| + 2|u_1^k|\right)m_k \le \varepsilon. \tag{4.7}$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – последовательности положительных чисел, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k = \varepsilon.$

Условия (4.7) будут выполнены, если

$$\frac{2}{T_k}\left(1+|\omega_k|\right)\left(|u_0^k| + 2|u_1^k|\right)m_k \le \varepsilon_k,$$

и в силу ранее полученных оценок для системы без диссипации (волновое уравнение), см. [20].

Тогда в первом случае:

$$T_k \ge \frac{2\left(1+|\omega_k|\right)\left(|u_0^k| + 2|u_1^k|\right)m_k}{\varepsilon_k}. \tag{4.8}$$

Во втором случае аналогичная оценка для времени успокоения систем с диссипацией получается из оценки для величины управляющей функции $|f|$.

Необходимо, как уже отмечалось, чтобы время успокоения каждого маятника в системе было ограничено числом, не зависящим от номера колебательного звена (маятника). Можно видеть, что в (4.8) независимость от k в оценке T_k можно обеспечить за счет быстрого убывания коэффициентов.

Если же $|\alpha_k| \to \infty$, то величину T_k можно выбрать независимо от k даже при любом поведении коэффициентов Фурье для начальных функций, их поведение ограничивается только корректностью постановок исходных краевых задач.

Если последовательность α_k ограничена, то независимость выбора T_k от номера k колебательной системы обеспечивается также быстрым убыванием коэффициентов u_k^1 и u_k^2 в разложении начальных условий по системе собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$. Это быстрое убывание, в свою очередь, снова обеспечивается гладкостью $u_0(x)$, $u_1(x)$ и некоторыми дополнительными краевыми условиями для этих функций на $\partial\Omega$. Величина m_k оценивалась в работе [13], согласно которой для задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет место неравенство $m_k \le C\omega_k^{(d-1)/2} \ln \omega_k$, где d – размерность пространства, постоянная $C > 0$ не зависит от k.

Пользуясь классическими асимптотическими формулами для величины собственных значений задачи Дирихле имеем:

$$\omega_k \sim k^{1/d}, \; m_k \le Ck^{(d-1)/2d} \ln k .$$

Отсюда видно, что для существования решения задачи (2.1) достаточно

$$| u_0^k | \sim k^{2d/1-5d}, \; | u_1^k | \sim k^{2d/1-3d} .$$

Для решения задачи (4.3) дополнительных условий для убывания коэффициентов Фурье начальных условий $u_0(x)$, $u_1(x)$ вводить не нужно.

Для времени остановки колебаний в задаче (4.1) имеет место оценка $C\varepsilon^{-1}$, в задачах (4.3)–(4.5) – $C\ln\varepsilon^{-1}$.

За скорости убывания коэффициентов Фурье начальных условий отвечает принадлежность к пространствам $H^s(\Omega)$ с некоторыми дополнительными краевыми условиями. Пусть коэффициенты для начальных условий в уравнениях u_0^k, u_1^k удовлетворяют оценкам $|u_0^k| = A/k^a$, $|u_1^k| = A_1/k^b$, где A, A_1 – const, $A > 0$, $A_1 > 0$ не зависят от k.

Согласно приведенным выше оценкам для абсолютной величины нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций

$$m_k \le Mk^c, \quad c > \frac{1}{4}.$$

Здесь была использована классическая оценка спектра задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\omega_k \sim k^{1/2}$.

Далее, для выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \le \varepsilon$$

возьмем $\varepsilon^k \le \varepsilon/k^l$, где $l \ge 1 + \theta + c$, $\theta = \text{const} > 0$.

В случаях 3 и 4 ограниченность T_k по $k = 1, 2, \ldots$ достигается путем выбора чисел a, b, которые в свою очередь определяются гладкостью $u_0(x)$, $u_1(x)$ с дополнительными краевыми условиями, т.е. принадлежащие к пространству

$H_D^s(\Omega)$. Для случая 3 достаточно выбрать $a > 2$, $b > 3/2$, а для случая 4 $a > 3$, $b > 5/2$.

Отсюда, согласно утверждению 1 разд. 3, получим для второго случая (телеграфное уравнение) $s = 4$ для $u^0(x)$, $s = 3$ для $u^1(x)$, а для четвертого случая (жидкость Кельвина–Фойгта) $s = 6$ для $u_0(x)$ и $s = 5$ для $u_1(x)$. Кроме того, должны быть выполнены дополнительные краевые условия, аналогичные условиям в определении 1.

5. Заключение. Данная работа показывает, как влияет характер диссипации в механической системе на управляемость системы с помощью распределенных сил. Результат получился довольно неожиданным.

1. Во всех четырех случаях (волновое уравнение, телеграфное уравнение, материал Кельвина–Фойгхта, жидкость Кельвина–Фойгхта) существует гладкое ограниченное по абсолютной величине управление, приводящее систему в полный покой.

2. При постановке ограничений на производные по переменной t на управляющую функцию, задачи управления остаются разрешенными, только надо увеличить гладкость начальных условий и добавить дополнительные краевые условия, кроме случая 3, отвечающего модели материала Кельвина–Фойгхта. В этом случае дополнительных условий накладывать не нужно.

3. Оценки времени гашения колебаний следующие: для случая волнового уравнения без диссипации $\sim c/\varepsilon$, для других случаев $\sim c \ln \varepsilon^{-1}$.

4. Задача граничного управления разрешима для произвольных начальных условий только для волнового и телеграфного уравнения. Это было ранее доказано. При наличии в системе трения типа Кельвина–Фойгхта задача граничного управления неразрешима при произвольном начальном условии, это тоже было доказано ранее.

5. Самые жесткие достаточные условия на начальные функции для построения алгоритма распределенного управления предлагаемым в настоящей работе методом накладываются для модели жидкости Кельвина–Фойгхта.

Работа выполнена по теме госзадания № 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68. https://doi.org/10.1137/1030001
3. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 810–826.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. of Dyn. Control Syst. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623. https://doi.org/10.1007/s10883-013-9199-y
5. *Romanov I., Shamaev A.* Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integrodifferential equation // J. Optimiz. Theory Appl. 2016. V. 170. P. 772–782. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0945-7

6. *Romanov I., Shamaev A.* Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci. 2018. V. 234. № 4. P. 470–484. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4023-6
7. *Романов И.В.* Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Докл. РАН. 2016. Т. 470. № 1. С. 22–25. https://doi.org/10.7868/S0869565216250071
8. *Romanov I., Shamaev A.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Computer Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. № 3. P. 371–380. https://doi.org/10.1134/S1064230720030144
9. *Romanov I., Shamaev A.* Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. Optimiz. Theory Appl. 2021. V. 188. № 3. P. 925–938. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01817-y
10. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.008
11. *Акуленко Л.Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095–1103.
12. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
13. *Эйдус Д.М.* Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798.
14. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* О некоторых оценках собственных функций эллиптического оператора // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. и мех. 1985. № 4. С. 32–34.
15. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
16. *Левин Б.Я.* Распределение нудей целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
17. *Романов И.В.* Исследование управляемости для некоторых систем с распределенными параметрами, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 58–61. https://doi.org/10.31857/S0002338822020123
18. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта. Краевые задачи математической физики. // Тр. МИАН СССР. 1988. № 179. С. 126–164.
19. *Егорова А.А., Шамаев А.С.* Задача граничного управления колебаниями образца слоистого двухфазного композиционного материала // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 75–83. https://doi.org/10.31857/S0002338823040030
20. *Бобылева Т.Н., Гусев И.М., Шамаев А.С.* Ограниченные и гладкие управления колебаниями в системах, заданных дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями // ПММ. 2023. Т. 87. № 5. С. 820–828. https://doi.org/10.31857/S0032823523050053

EFFECTS OF THE ENERGY DISSIPATION PATTERN ON THE CONTROLABILITY PROCESSES IN SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

T. N. Bobyleva[a], *, A. S. Shamaev[b], **

[a] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*
[b] *Ishlinsky Institute for problems in mechanics RAS, Moscow, Russia*

**E-mail: bobyleva-tn@yandex.ru, **e-mail: sham@rambler.ru*

The paper considers the problem of damping vibrations of a membrane and a plate with the help of forces distributed over their entire area. The proposed method allows us to consider restrictions not only on the absolute value of the control, but also on the absolute value of the derivatives of the functions that specify the control. Sufficient conditions are given for the initial conditions under which the problem of bringing the system to rest in a finite time is solvable, and the time of bringing to rest is estimated.

Keywords: control, oscillatory system, distributed and concentrated forces, small control forces, integro-differential systems

REFERENCES

1. *Butkovsky A.G.* Control Methods of the Systems with Distributed Parameters. Moscow: Nauka, 1965. 474 p. (in Russian)
2. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30, № 1. P. 1–68.
https://doi.org/10.1137/1030001
3. *Chernous'ko F.L.* Bounded controls in distributed-parameter systems // JAMM. 1992. V. 56. № 3. P. 707–723.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. of Dyn.&Control Syst. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
https://doi.org/10.1007/s10883-013-9199-y
5. *Romanov I., Shamaev A.* Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integro-differential equation // J. of Optimiz. Theory&Appl. 2016. V. 170. P. 772–782.
https://doi.org/10.1007/s10957-016-0945-7
6. *Romanov I., Shamaev A.* Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci. 2018. V. 234. № 4. P. 470–484.
https://doi.org/10.1007/s10958-018-4023-6
7. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* Exact bounded boundary controllability of vibrations of a two-dimensional membrane // Dokl. Math. 2016. V. 94. № 2. P. 607–610.
https://doi.org/10.7868/S0869565216250071
8. *Romanov I., Shamaev A.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. of Computer&Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. № 3. P. 371–380.
https://doi.org/10.1134/S1064230720030144

9. *Romanov I., Shamaev A.* Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. of Optimiz. Theory&Appl. 2021. V. 188. № 3. P. 925–938.
https://doi.org/10.1007/s10957-021-01817-y
10. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. of Math. Anal.&Appl. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.008
11. *Akulenko L.D.* Bringing an elastic system to a given state by means of a force boundary impact // JAMM. 1981. V. 45. № 6. P. 1095–1103.
12. *Mikhailov V.P.* Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1978. 396 p.
13. *Eidus D.M.* Some inequalities for eigenfunctions // Dokl. AN USSR. 1956. V. 107. № 6, P. 796–798. [in Russian]
14. *Kondratiev V.A., Egorov Yu.V.* Some estimates for eigenfunctions of an elliptic operator // Vestn. MSU, Ser. 1, Math.&Mech. 1985. № 4. P. 32–34. [in Russian]
15. *Pontryagin L. S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.; London: Wiley, 1962. 360 p.
16. *Levin B.Ya.* Distribution of zeros of entire functions. N.Y.: Amer. Math. Soc., Providence, 1980. 523 p.
17. *Romanov I.V.* Investigation of controllability for some dynamic systems with distributed parameters described by integro-differential equations // J. of Comp.&Syst. Sci. Int. 2022. V. 61. № 2. P. 191–194.
https://doi.org/10.31857/S0002338822020123
18. *Oskolkov A.P.* Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids. Boundary value problems of mathematical physics. Part 13 // in: Proc. Steklov Inst. Math. 1989. V. 179. P. 137–182.
19. *Egorova A.A., Shamaev A.S.* Problem of the boundary control of oscillations of a sample of a layered two-phase composite material // J. of Computer&Syst. Sci. Int. 2023. V. 62. № 4. P. 666–674.
https://doi.org/10.31857/S0002338823040030
20. *Bobyleva T.N., Gusev I.A., Shamaev A.S.* Limited and smooth controls of oscillations in systems given by differential and integrodifferential equations // Mechanics of Solids, Allerton Press Inc. (United States). 2023. V. 58. № 8. P. 2818–2825.
https://doi.org/10.3103/S0025654423080058