

УДК 531.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГИПЕРУПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

© 2025 г. С. В. Кузнецов^{а, *}, С. Г. Саиян^{а, **}

^аНациональный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

*E-mail kuzn-sergey@yandex.ru, **e-mail: berformert@gmail.com

Поступила в редакцию 17.10.2024 г.

После доработки 27.10.2024 г.

Принята к публикации 28.10.2024 г.

Возбуждение гармонической волны в полубесконечном несжимаемом гиперупругом одномерном стержне на основе уравнения состояния Муни–Ривлина показывает образование и распространение фронтов ударных волн, возникающих между более быстрыми и более медленными частями первоначально гармонической волны. Наблюдаемые фронты ударных волн приводят к поглощению медленно движущихся частей более быстрыми, что ведет к затуханию кинетической и упругой энергии деформаций с соответствующим выделением тепла. Установлено, что на достаточном расстоянии от края стержня вследствие затухания механической энергии возникает акустическая черная дыра. Геометрически и физически нелинейные уравнения движения решаются явной схемой численного интегрирования Лакса–Вендроффа в сочетании с методом конечных элементов для пространственной дискретизации.

Ключевые слова: гиперупругий материал, акустическая волна, фронт ударной волны, затухание, диссипация энергии

DOI: 10.31857/S1026351925020129, EDN: ANREGK

1. Введение.

1.1. Обзор литературы. С момента первых работ Рэнкина (1870) [1] и последующих публикаций [2–4] было известно, что при распространении фронта ударной волны в жидкой или газообразной среде без вязкости обобщая механическая энергия может уменьшаться с соответствующим выделением тепла; этот факт позже был подтвержден большим количеством теоретических исследований [5–14]. Также известно, что при прохождении через фронт ударной волны происходит разрыв основных параметров поля, таких как давление, температура, деформация и т.д., см. [15–19].

Полная формулировка для нахождения скорости фронта ударной волны в жидкой и газообразной среде включает уравнения сохранения массы, импульса и энергии вместе с уравнением состояния Навье–Стокса и уравнением Фурье для теплового потока [20–23]. В этих уравнениях

предполагается, что потоки энтропии и массы через фронт волны равны нулю. Наряду с этим были предложены более точные подходы с ненулевыми потоками массы и/или энтропии [24–26]); эти теории подходят для анализа распространения сильных ударных волн с большими числами Маха, $M > 6$.

При рассмотрении формирования фронтов ударных волн в механике деформируемых твердых тел было установлено, что в одномерном бимодульном упругом стержне фронт ударной волны возникает, когда медленно движущийся волновой импульс поглощается более быстрым импульсом, см. [27–35]). В рассматриваемом одномерном случае бимодульный материал определяется ступенчатой зависимостью модуля упругости от деформации [32, 36]):

$$E(\varepsilon) = E_0(1 - \alpha \cdot \text{sign}(\varepsilon)), \quad (1.1)$$

где E_0 – медианный модуль упругости, $0 < \alpha < 1$ константа материала. В большинстве работ рассматривается случай малой деформации ($\varepsilon \ll 1$) что позволяет получить линейную зависимость соотношений Коши деформация – перемещение:

$$\varepsilon = \partial_x u(x, t), \quad (1.2)$$

где u – бесконечно малое перемещение, x – пространственная координата, а t – время. Знак при ε в уравнении обеспечивает, что при положительном значении ε модуль упругости (E_+) меньше соответствующего модуля (E_-) при отрицательном значении ε ; условие $E_+ < E_-$ отражает физически обоснованную ситуацию, наблюдаемую во множестве реальных материалов при малой деформации.

Недавно было обнаружено [36], что в отличие от гидродинамики, где фронты ударных волн распространяются со сверхзвуковыми скоростями, фронт ударной волны в одномерном упругом бимодульном стержне распространяется с промежуточной скоростью, удовлетворяющей условию:

$$v_+ < v_s < v_-, \quad (1.3)$$

где v_+ и v_- – скорости при положительной и отрицательной деформации соответственно, и

$$v_{\pm} = \sqrt{\frac{E_{\pm}}{\rho}}. \quad (1.4)$$

Таким образом, согласно в сплошной бимодульной среде фронт ударной волны распространяется с дозвуковой скоростью по отношению к более быстрому импульсу сжатия.

Несмотря на исследования ударных волн в бимодульных материалах, было теоретически доказано [37–39]), что ударная волна может возникнуть и в нелинейно упругом материале с непрерывной и даже плавной зависимостью модулей упругости от деформации. Более того, согласно [37], распространение фронта ударной волны неизбежно сопровождается выделением тепла, подобно ударным волнам в гидродинамике [7].

1.2. Постановка задачи. В настоящей работе, по-видимому, впервые обнаружено и исследовано возникновение множественных медленно движущихся

фронтов ударных волн в гиперупругом одномерном полубесконечном стержне при первоначальном гармоническом возбуждении волны (рис. 1). Уравнение состояния определяется гиперупругим несжимаемым потенциалом Муни–Ривлина [40–42] и геометрически нелинейными соотношениями Коши деформация – перемещение. Возникшие множественные фронты ударных волн приводят к значительному затуханию распространяющихся волновых импульсов, диссипации механической энергии и выделению тепла, формируя акустическую черную дыру.

Анализ основан на численном решении нелинейного гиперболического уравнения для волны, распространяющейся в одномерном стержне. Используется комбинация явной численной схемы Лакса–Вендроффа для интегрирования по времени [43] в сочетании с методом конечных элементов для пространственной дискретизации [44].

2. Основные уравнения.

2.1. *Соотношения между деформациями и перемещениями.* Рассмотрим левый тензор деформации Коши–Грина [45]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}\chi(\mathbf{x})$ – тензор деформаций и χ – взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение; верхнее “ t ” означает транспонирование. Рассматривается три собственных значения тензора \mathbf{F} , называемых главными удлинениями λ_k , $k = 1, 2, 3$. Будучи симметричным и положительно определенным, тензор Коши–Грина имеет три взаимно ортогональных собственных вектора и три положительных собственных значения λ_k^2 , $k = 1, 2, 3$. Инварианты тензора Коши–Грина могут быть выражены через главные удлинения [45]:

$$I_B = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2; \quad II_B = \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^3 \lambda_k^2 \lambda_j^2; \quad III_B = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (2.2)$$

Заметим, что все эти инварианты не исчезают в силу положительной определенности тензора \mathbf{C} .

Теперь, введя (левый) тензор деформации Грина–Сен-Венана [45]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) \quad (2.3)$$

и вектор перемещения:

$$\mathbf{u} = \chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad (2.4)$$

связь между тензором \mathbf{E} и $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^t + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^t \right). \quad (2.5)$$

Для рассматриваемого ниже одномерного случая соотношение приобретает вид:

$$\varepsilon_{11}(x_1, t) = \partial_{x_1} u_1(x_1, t) + \frac{1}{2} \left(\partial_{x_1} u_1(x_1, t) \right)^2, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon_{11}(x_1, t)$ и $u_1(x_1, t)$ – соответствующие компоненты тензора \mathbf{E} и вектора \mathbf{u} ; предполагая, что ось стержня совпадает с осью x_1 . С помощью уравнений (2.3) и (2.6) главное растяжение λ_1 становится:

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_{11}. \quad (2.7)$$

Несмотря на рассматриваемый одномерный случай, предполагаемое условие несжимаемости подразумевает наличие двух других растяжений:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}. \quad (2.8)$$

Растяжения λ_2, λ_3 будут использоваться в соответствующем потенциале.

2.2. *Уравнение состояния.* Следуя [42], гиперупругий потенциал первого порядка Муни–Ривлина для несжимаемой среды можно записать в виде:

$$W = C_{01}(I_B - 3) + C_{10}(I_B - 3), \quad (2.9)$$

где C_{01}, C_{10} – константы материала. Подставляя собственные значения (2.8) в уравнения (2.2), получаем потенциал (2.9), записанный в терминах растяжения $\lambda = \lambda_1$:

$$W(\lambda) = C_{01}\left(2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3\right) + C_{10}\left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right). \quad (2.10)$$

В случае простого растяжения $\sigma = \sigma_{11}$ и $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, дифференцируя потенциал (2.10) по переменной λ , получаем напряжение Коши [42]:

$$\sigma(\lambda) = \lambda \partial_\lambda W(\lambda) = 2\left(C_{01} + C_{10}\lambda\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (2.11)$$

Теперь уравнение (2.11) можно переписать в терминах деформации (2.7)

$$\sigma(\varepsilon) = 2\left(C_{01} + C_{10}(1 + \varepsilon)\right)\frac{\varepsilon(3 + 3\varepsilon + \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) позволяет получить касательный модуль упругости $E(\varepsilon)$:

$$E(\varepsilon) \equiv \partial_\varepsilon \sigma = 2\left(C_{01} + C_{10}\right)\frac{3 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3} + 2C_{10}\varepsilon\frac{6 + 9\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3}, \quad (2.13)$$

и, так называемую, вторую предельную скорость [46–48], которая в рассматриваемом случае совпадает с стержневой скоростью [49]:

$$c(\varepsilon) \equiv \sqrt{\frac{E(\varepsilon)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\left(C_{01} + C_{10}\right)\frac{3 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3} + C_{10}\varepsilon\frac{6 + 9\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3}}. \quad (2.14)$$

Важно заметить, что в уравнении (2.14) плотность материала ρ не зависит от ε , поскольку предполагается несжимаемость материала. Еще одно замечание касается предельного значения стержневой скорости при $\varepsilon \rightarrow 0$, что дает:

$$c_0 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{6(C_{01} + C_{10})}{\rho}}. \quad (2.15)$$

2.3. *Уравнение движения.* В рассматриваемом одномерном стержне уравнение движения может быть представлено в виде [45]:

$$\partial_{tt}^2 u(x, t) = \rho^{-1} \partial_x \sigma(\varepsilon). \quad (2.16)$$

Подставляя уравнения (2.6), (2.12) в уравнение движения (2.16), получаем:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u(x, t) = \rho^{-1} & \left(2(C_{01} + C_{10}) \frac{3 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3} + \right. \\ & \left. + 2C_{10}\varepsilon \frac{6 + 9\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon)^3} \right) (\partial_{xx}^2 u(x, t) (1 + \partial_x u(x, t))). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) вместе с соотношением Коши между деформациями и перемещениями (2.6) дает искомого уравнение движения.

2.4. *Начальные и граничные условия.* Рассмотрим начальные условия полного покоя:

$$u(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \partial_t u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad \forall x \quad (2.18)$$

и гармоническое граничное условие 2-го порядка (задача Неймана), наложенное на “левый” конец полубесконечного стержня:

$$\sigma(x, t)|_{x=0} = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad (2.19)$$

где u_0 – амплитуда; ω – круговая частота, и $i = \sqrt{-1}$.

На “правом” конце стержня $x \rightarrow +\infty$ накладывается условие затухания Зоммерфельда:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x \rightarrow \infty} &= 0, \\ \partial_x u(x, t)|_{x \rightarrow \infty} &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.5. *Уравнения энергетического баланса.* Уравнения энергетического баланса [50] должны дополнять уравнения (2.6)–(2.20):

$$E_k + E_s + \int_0^t \int_0^l Q(x, \tau) d\tau dx - \int_0^t P(\tau) d\tau = 0, \quad (2.21)$$

где E_k и E_s – кинетическая энергия и энергия деформаций:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho |\dot{u}(x, t)|^2 dx; \quad E_s = \frac{1}{2} \int_0^\infty W(\varepsilon(x, t)) dx, \quad (2.22)$$

$Q(x, \tau)$ – удельная теплота и P – мощность внешней силы, определяемая как [50]:

$$P(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \dot{u}(0, t). \quad (2.23)$$

Важно отметить, что знак удельной теплоты $Q(x, \tau)$ противоположен знаку, принятому в [50].

3. Численное решение.

3.1. Конечно-элементная модель. Рассмотрим полубесконечный одномерный стержень с гармонической силовой нагрузкой, приложенной к левому концу стержня, рис. 1.

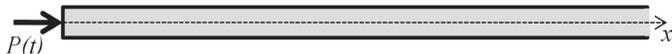


Рис. 1. Полубесконечный стержень с гармонической силовой нагрузкой, приложенной к левому концу.

Рассматриваемая задача решалась с применением явной схемы численного интегрирования по времени с предиктором-корректором Лакса–Вендроффа [51] в сочетании с конечно-элементной моделью для пространственной дискретизации; соответствующие приращения (инкременты) обозначаются как Δx и Δt . Для достижения условной устойчивости было применено условие Куранта–Фридрихса–Леви для выбора численно устойчивого шага по времени [51]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max c(\varepsilon)}, \quad (3.1)$$

где $c(\varepsilon)$ определяется уравнением (2.14). Прямая проверка показывает, что в диапазоне допустимых отрицательных деформаций $\varepsilon \in (-1; 0)$ значение $c(\varepsilon)$ неограниченно стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow -1$ независимо от (положительных) значений C_{01}, C_{10} .

Для вычислений использовались двухузловые линейные стержневые элементы, не обладающие жесткостью на изгиб и кручение. Общее количество конечных элементов варьировалось в диапазоне $6200 \leq N \leq 16400$, тестирование сходимости конечно-элементной сетки показало практически независимые результаты для любой сетки с общим количеством элементов $N \geq 12800$, это значение было выбрано для основных вычислений. Для уменьшения нефизических осцилляций использовалась следующая медианная фильтрация:

$$f^*(t_i) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^m f(t_{i \pm k}), \quad (3.2)$$

где $2m+1$ – порядок фильтра; f – неотфильтрованная функция, а f^* – отфильтрованная. В основных расчетах использовались фильтры медианного порядка $5 \div 9$.

3.2. Анализ распространения волн. В данной статье используется резина средней жесткости [52, 53], моделируемая несжимаемым гиперупругим потенциалом Муни–Ривлина со следующими физическими параметрами:

$$C_{01} = 0.0647 \text{ [МПа]}; \quad C_{10} = 0.916 \text{ [МПа]}; \quad \rho = 750 \text{ [кг/м}^3\text{]}. \quad (3.3)$$

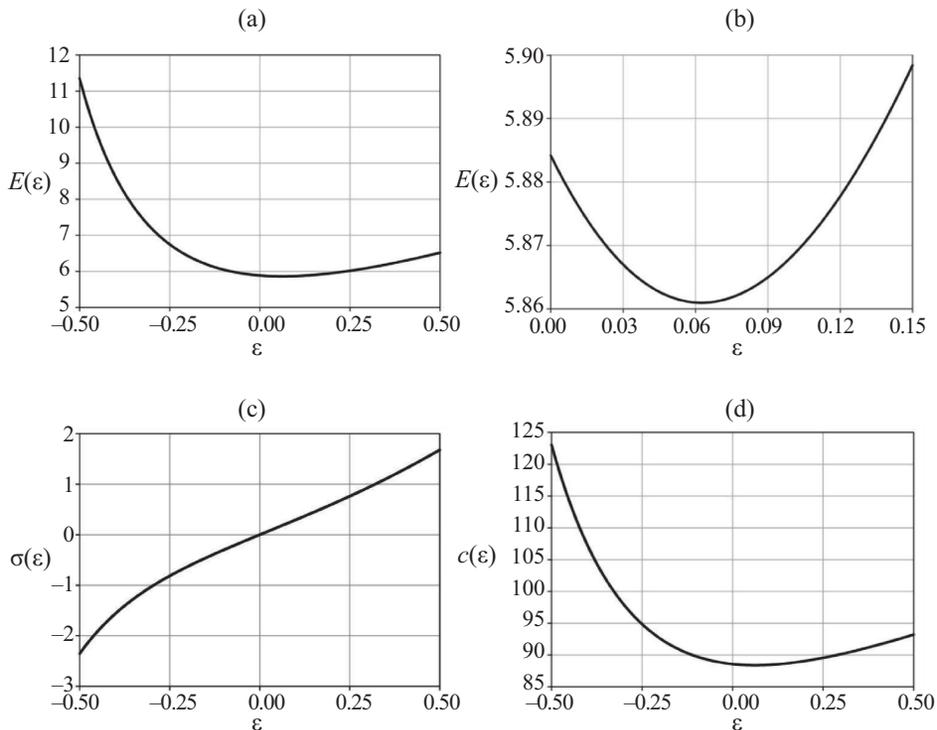


Рис. 2. (а) – касательный модуль, [МПа]; (б) – касательный модуль в окрестности экстремума, [МПа]; (с) – напряжения Коши, [МПа]; (д) – скорость распространения волны, [м/с].

В соответствии с [52, 53], параметры (3.3) относятся к резине средней жесткости с индексом твердости 60 IRHD, которая широко используется в сейсмостойком строительстве [54], а также в авиационной и автомобильной промышленности для изготовления шин.

С учетом уравнения (3.3) и выражений (2.12) и (2.13) для напряжений Коши и касательного модуля соответственно, можно построить следующие графики (см. рис. 2а–с):

Анализ графика на рис. 2 показывает, что:

- 1) касательный модуль не является монотонным в диапазоне $\varepsilon \in [-0.5; 0.5]$;
- 2) минимум достигается при $\varepsilon \approx 0.062$;
- 3) зависимость напряжение – деформация является монотонной в исследуемом диапазоне $\varepsilon \in [-0.5; 0.5]$.

Рассмотрим достаточно большие гармонические нагрузки с частотами, варьирующимися в диапазоне $\omega \in [1; 30]$ рад/с. Амплитуда нагрузки $\sigma_0 = 1$ была выбрана так, чтобы обеспечить амплитуду деформации возле левого конца $\varepsilon_0 \approx 0.3$. График на рис. 2d показывает, что более медленно движущиеся части волны при меньших значениях будут догоняться более быстрые, особенно те, которые связаны с большими отрицательными деформациями; и, согласно

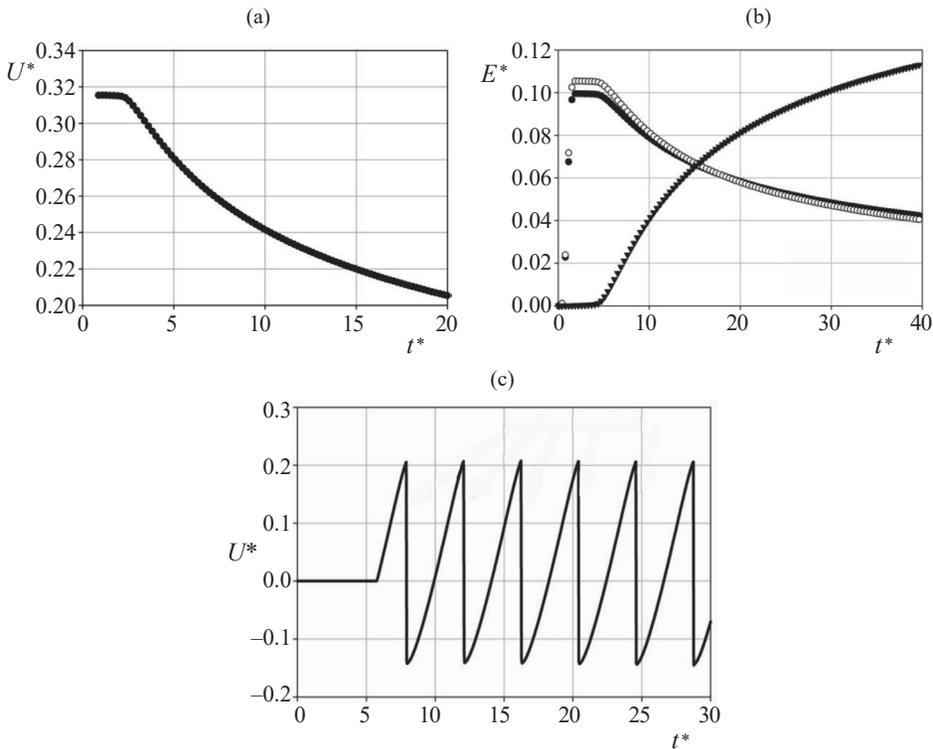


Рис. 3. (а) – затухание величины относительного перемещения; (б) – затухание удельной энергии деформации (○), кинетической энергии (•) и увеличение тепловой энергии (▼); (с) – появление множественных фронтов ударных волн при встрече импульсов противоположного знака в точке, расположенной на некотором расстоянии от левого края.

[37], эти эффекты в конечном итоге приведут к появлению фронтов ударных волн. Относительные перемещения, расстояния, время и удельные энергии, представленные на рис. 3, определяются соответственно как:

$$U^* = \frac{U}{\omega c_0}, \quad l^* = \frac{l}{\omega c_0}, \quad t^* = \frac{\omega t}{2\pi}, \quad E^* = \frac{E}{\rho c_0^2}, \quad (3.4)$$

где c_0 – предельная скорость волны, определяемая уравнением; величина относительного смещения определяется как $\max(U^*)$ в течение времени.

Проведенное численное моделирование показывает, что:

1. Наблюдается значительное затухание амплитуд волн с увеличением расстояния от источника возбуждения (см. рис. 3а).
2. Уменьшение как удельной энергии деформации, так и удельной кинетической энергии с расстоянием за счет увеличения удельной тепловой энергии (см. рис. 3б).
3. Образование множественных фронтов ударных волн, возникающих, когда более быстро движущиеся импульсы с отрицательной деформацией

обгоняют более медленные импульсы с положительной деформацией (см. рис. 3с).

4. Заключение. Анализ гармонического возбуждения, приложенного к краю одномерного полубесконечного стержня, описываемый уравнением состояния гиперупругости Муни–Ривлина, соответствующего резиновому материалу средней жесткости [52, 53], показывает:

1. Первоначально гармоническая волна затухает с расстоянием (см. рис. 3а).

2. Как энергия деформации, так и кинетическая энергия уменьшаются с расстоянием от источника возбуждения, одновременно с увеличением тепловой энергии, (см. рис. 3б).

3. Наблюдается появление множественных фронтов ударных волн между импульсами положительной и отрицательной деформации (см. рис. 3с).

Эти явления, которые, по-видимому, наблюдаются впервые для материала с непрерывной (и гладкой) нелинейностью, вызваны формированием и распространением фронтов ударных волн, как это было теоретически предсказано более 60 лет назад [37]. В то же время следует отметить, что в материалах с разрывной нелинейностью, как в случае бимодульных материалов, появление фронтов ударных волн в твердых телах ранее было обнаружено, см. [32, 36].

Последнее замечание касается наблюдаемого выделения тепла при распространении (первоначально) гармонических волн в чисто механической нелинейно-упругой системе без вязкости и пластической диссипации. Учет диссипации механической энергии и одновременного выделения тепла при распространении гармонических волн имеет решающее значение для создания сейсмических и виброизоляционных устройств.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 24-49-02002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rankine W.J.M.* On the thermodynamic theory of waves of finite disturbance // *Trans. Royal Soc.* 1870. V. 160. P. 277–288.
<https://doi.org/10.1098/rstl.1870.0015>
2. *Vieille P.* Sur les discontinuités produites par la détente brusque de gaz comprimés // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.* 1899. V. 129. P. 1228–1230.
3. *Vieille P.* Étude sur les rôles des discontinuités dans les phénomènes de propagation // *J. Phys. Theor. Appl.* 1900. V. 9. P. 621–644.
<https://doi.org/10.1051/jphysap:019000090062100>
4. *Becker R.* Stoßwelle und Detonation // *Zeitschrift für Physik.* 1922. V. 8. P. 321–362.
<https://doi.org/10.1007/BF01329605>
5. *Landau L.D.* On Shock Waves at Large Distances from the Place of Their Origin // *Sov. Phys. J.* 1945. V. 9. P. 496–500.
6. *Resler E.L., Lin S.C., Kantrowitz A.* The production of high temperature gases in shock tubes // *J. Appl. Phys.* 1952. T. 23. № 12. C. 1390–1399.
<https://doi.org/10.1063/1.1702080>
7. *Truesdell C.* On the viscosity of fluids according to the kinetic theory // *Zeitschrift für Physik.* 1952. V. 131. P. 273–289.
<https://doi.org/10.1007/BF01329541>

8. *Truesdell C.* On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // *J. Aeronaut. Sci.* 1952. V. 19. № 12. P. 826–834.
<https://doi.org/10.2514/8.2495>
9. *Whitham G.B.* On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. № 4. P. 337–360.
<https://doi.org/10.1017/S0022112058000495>
10. *Лунёв В.В.* Уравнение фронта ударной волны // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2000. № 3. С. 159–165.
11. *Murata S.* New exact solution of the blast wave problem in gas dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. V. 28. № 2. P. 327–330.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.052>
12. *Gray J., Cui X.* Weak, strong and detached oblique shocks in gravity-driven granular free-surface flows // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 579. P. 113–136.
<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112007004843>
13. *Salas M.D.* The curious events leading to the theory of shock waves // *Shock Waves.* 2007. V. 16. № 6. P. 477–487.
<https://doi.org/10.1007/s00193-007-0084-z>
14. *Cui X.* Shock waves: From gas dynamics to granular flows // *Int. J. Aeronaut. Aerosp. Eng.* 2019. V. 1. P. 7–9.
<https://doi.org/10.18689/ijae-1000102>
15. *Hunter J.K., Keller J.B.* Caustics of nonlinear waves // *Wave Motion.* 1987. V. 9. № 5. P. 429–443.
[https://doi.org/10.1016/0165-2125\(87\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0165-2125(87)90031-X)
16. *Sasoh A., Ohtani T., Mori K.* Pressure effect in a shock-wave plasma interaction induced by a focused laser pulse // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 205004.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.205004>
17. *Znamenskaya I.A., Koroteev D.A., Lutsky A.E.* Discontinuity breakdown on shock wave interaction with nanosecond discharge // *Phys. Fluids.* 2008. V. 20. № 5. P. 056101.
<https://doi.org/10.1063/1.2908010>
18. *Kulikovskii A.G.* Multi-parameter fronts of strong discontinuities in continuum mechanics // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 4. P. 378–389.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.09.002>
19. *Zhang S.* Shock wave evolution and discontinuity propagation for relativistic superfluid hydrodynamics with spontaneous symmetry breaking // *Physics Letters B.* 2014. V. 729. P. 136–142.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.01.014>
20. *Morduchow M., Libby P.A.* On the distribution of entropy through a shock wave // *J. Mécanique.* 1965. V. 4. P. 191–213.
21. *Zeldovich Y.B., Raizer Y.P.* Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. 2nd ed. New York: Academic Press, 1967.
22. *Ridah S.* Shock waves in water // *J. Appl. Phys.* 1988. V. 64. № 1. P. 152–158.
<https://doi.org/10.1063/1.341448>
23. *Arima T., Taniguchi S., Ruggeri T., Sugiyama T.* Extended thermodynamics of dense gases // *Continuum Mech. Therm.* 2012. V. 24. № 4–6. P. 271–292.
<https://doi.org/10.1007/s00161-011-0213-x>

24. *Velasco R.M., Garcia-Colin L.S., Uribe F.J.* Entropy production: Its role in nonequilibrium thermodynamics // *Entropy*. 2011. № 1. V. 13. P. 82–116.
<https://doi.org/10.3390/e13010082>
25. *Margolin L.G.* Nonequilibrium entropy in a shock // *Entropy*. 2017. V. 19. № 7. P. 368.
<https://doi.org/10.3390/e19070368>
26. *Hafskjold B., Bedeaux D., Kjelstrup S., Wilhelmsen A.* Nonequilibrium thermodynamics of surfaces captures the energy conversions in a shock wave // *Chem. Phys. Lett.* 2020. V. 738. P. 100054.
<https://doi.org/10.1016/j.cpletx.2020.100054>
27. *Lax P.D.* The formation and decay of shock waves // *Amer. Math. Monthly*. 1972. V. 79. № 3. P. 227–241.
<https://doi.org/10.2307/2316618>
28. *Maslov V.P., Mosolov P.P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // *J. Appl. Math. Mech.* 1985. V. 49. № 3. P. 322–336.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0)
29. *Ostrovsky L.A.* Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 90. № 6. P. 3332–3337.
<https://doi.org/10.1121/1.401444>
30. *Dequiedt J.L., Stolz C.* Propagation of a shock discontinuity in an elasto-plastic material: Constitutive relations // *Arch. Mech.* 2004. V. 56. № 5. P. 391–410.
31. *Lucchesi M., Pagni A.* Longitudinal oscillations of bimodular rods // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2005. V. 5. № 1. P. 37–54.
<https://doi.org/10.1142/S0219455405001490>
32. *Gavrilov S.N., Herman G.C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // *J. Sound Vib.* 2012. V. 331. № 20. P. 4464–4480.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.022>
33. *Radostin A., Nazarov V., Kiyashko S.* Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // *Wave Motion*. 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.08.005>
34. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of sh-waves in anisotropic laminated plates // *Acous. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
35. *Naeeni M.R., Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Pak R.Y.S., Rahimian M., Hayati Y.* Coupled thermoviscoelastodynamic green's functions for bi-material half-space // *ZAMM*. 2015. V. 95. № 3. P. 260–282.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201200135>
36. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // *Mech. Adv. Mater. Struc.* 2022. V. 29. P. 3147–3162.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
37. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1961. V. 8. P. 263–296.
<https://doi.org/10.1007/BF00277444>
38. *Coleman B.D., Gurtin M.E., Herrera I.* Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1965. V. 19. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1007/BF00252275>
39. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) Model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. № 12. P. 2021–2031.
<https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x>

40. *Boulanger P., Hayes M.A.* Finite amplitude waves in Mooney–Rivlin and Hadamard materials // *Topics in Finite Elasticity* / Eds. M.A. Hayes, G. Saccomandi. Wien: Springer, 2001.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2582-3_4
41. *Liu C., Cady C.M., Lovato M.L., Orler E. B.* Uniaxial tension of thin rubber liner sheets and hyperelastic model investigation // *J. Mater. Sci.* 2015. V. 50. № 3. P. 1401–1411.
<https://doi.org/10.1007/s10853-014-8700-7>
42. *Hashiguchi K.* Nonlinear continuum mechanics for finite elasticity-plasticity. New York: Elsevier, 2020.
43. *LeVeque R.J.* Numerical methods for conservation laws. Boston: Birkhäuser, 1992.
44. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes: The art of scientific computing. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2007.
45. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. 3rd ed. Berlin: Springer, 2004.
46. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of lamb waves // *Mechanics of Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
47. *Kuznetsov S.V.* Closed Form Analytical Solution for Dispersion of Lamb Waves in FG Plates // *Wave Motion.* 2019. V. 88. P.196–204.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.020>
48. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves in Random and Complex Media.* 2021. V. 31. № 6. P. 1540–1549.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
49. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
50. *Gurtin M.E., Williams W.O.* On the first law of thermodynamics // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1971. V. 42. P. 77–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00251431>
51. *Holmes N., Belytschko T.* Postprocessing of finite element transient response calculations by digital filters // *Comput. Struct.* 1976. V. 6. № 3. P. 211–216.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(76\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(76)90032-8)
52. *Jerrams S.J., Bowen J.* Modelling the Behaviour of rubber-like materials to obtain correlation with rigidity modulus tests // *WIT Transactions on Modelling and Simulation.* 1995. V. 10. P. 8.
<https://doi.org/10.2495/CMEM950561>
53. *Chen J., Garcia E.S., Zimmerman S.C.* Intramolecularly cross-linked polymers: from structure to function with applications as artificial antibodies and artificial enzymes // *Acc. Chem. Res.* 2020. V. 53. № 6. P. 1244–1256.
<https://doi.org/10.1021/acs.accounts.0c00178>
54. *D’Amato M., Gigliotti R., Laguardia R.* Seismic isolation for protecting historical buildings: A case study // *Front. Built Environ.* 2019. V. 5. P. 87.
<https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00087>

NONLINEAR ACOUSTIC WAVES IN HYPERELASTIC RODS

S. V. Kuznecov^{a, *}, S. G. Saiyan^{a, **}^aMoscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

*E-mail: kuzn-sergey@yandex.ru, **e-mail: berformert@gmail.com

The excitation of a harmonic wave in a semi-infinite incompressible hyperelastic one-dimensional rod based on the Mooney-Rivlin equation of state shows the formation and propagation of shock wave fronts arising between faster and slower parts of the original harmonic wave. The observed shock wave fronts lead to the absorption of slower moving parts by faster ones, which leads to the damping of kinetic and elastic energy of deformations with the corresponding heat release. It is established that at a sufficient distance from the edge of the rod due to the attenuation of mechanical energy an acoustic black hole appears. The geometrically and physically nonlinear equations of motion are solved by an explicit Lax-Wendroff numerical integration scheme combined with the finite element method for spatial discretization.

Keywords: hyperelastic material, acoustic wave, shock wave front, attenuation, energy dissipation

REFERENCES

1. Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite disturbance // Trans. Royal Soc. 1870. V. 160. P. 277–288.
<https://doi.org/10.1098/rstl.1870.0015>
2. Vieille P. Sur les discontinuités produites par la détente brusque de gaz comprimés // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 1899. V. 129. P. 1228–1230.
3. Vieille P. Étude sur les rôles des discontinuités dans les phénomènes de propagation // J. Phys. Theor. Appl. 1900. V. 9. P. 621–644.
<https://doi.org/10.1051/jphysap:019000090062100>
4. Becker R. Stoßwelle und Detonation // Zeitschrift für Physik. 1922. V. 8. P. 321–362.
<https://doi.org/10.1007/BF01329605>
5. Landau L.D. On Shock Waves at Large Distances from the Place of Their Origin // Sov. Phys. J. 1945. V. 9. P. 496–500.
6. Resler E.L., Lin S.C., Kantrowitz A. The production of high temperature gases in shock tubes // J. Appl. Phys. 1952. T. 23. № 12. C. 1390–1399.
<https://doi.org/10.1063/1.1702080>
7. Truesdell C. On the viscosity of fluids according to the kinetic theory // Zeitschrift für Physik. 1952. V. 131. P. 273–289.
<https://doi.org/10.1007/BF01329541>
8. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. № 12. P. 826–834.
<https://doi.org/10.2514/8.2495>
9. Whitham G.B. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 4. P. 337–360.
<https://doi.org/10.1017/S0022112058000495>

10. *Лунёв В.В.* Уравнение фронта ударной волны // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 3. С. 159–165.
11. *Murata S.* New exact solution of the blast wave problem in gas dynamics // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 28. № 2. P. 327–330.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.052>
12. *Gray J., Cui X.* Weak, strong and detached oblique shocks in gravity-driven granular free-surface flows // J. Fluid Mech. 2007. V. 579. P. 113–136.
<https://doi.org/10.1017/S0022112007004843>
13. *Salas M.D.* The curious events leading to the theory of shock waves // Shock Waves. 2007. V. 16. № 6. P. 477–487.
<https://doi.org/10.1007/s00193-007-0084-z>
14. *Cui X.* Shock waves: From gas dynamics to granular flows // Int. J. Aeronaut. Aerosp. Eng. 2019. V. 1. P. 7–9.
<https://doi.org/10.18689/ijae-1000102>
15. *Hunter J.K., Keller J.B.* Caustics of nonlinear waves // Wave Motion. 1987. V. 9. № 5. P. 429–443.
[https://doi.org/10.1016/0165-2125\(87\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0165-2125(87)90031-X)
16. *Sasoh A., Ohtani T., Mori K.* Pressure effect in a shock-wave plasma interaction induced by a focused laser pulse // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 205004.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.205004>
17. *Znamenskaya I.A., Koroteev D.A., Lutsky A.E.* Discontinuity breakdown on shock wave interaction with nanosecond discharge // Phys. Fluids. 2008. V. 20. № 5. P. 056101.
<https://doi.org/10.1063/1.2908010>
18. *Kulikovskii A.G.* Multi-parameter fronts of strong discontinuities in continuum mechanics // J. Appl. Math. Mech. 2011. V. 75. № 4. P. 378–389.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.09.002>
19. *Zhang S.* Shock wave evolution and discontinuity propagation for relativistic superfluid hydrodynamics with spontaneous symmetry breaking // Physics Letters B. 2014. V. 729. P. 136–142.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.01.014>
20. *Morduchow M., Libby P.A.* On the distribution of entropy through a shock wave // J. Mécanique. 1965. V. 4. P. 191–213.
21. *Zeldovich Y.B., Raizer Y.P.* Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. 2nd ed. New York: Academic Press, 1967.
22. *Ridah S.* Shock waves in water // J. Appl. Phys. 1988. V. 64. № 1. P. 152–158.
<https://doi.org/10.1063/1.341448>
23. *Arima T., Taniguchi S., Ruggeri T., Sugiyama T.* Extended thermodynamics of dense gases // Continuum Mech. Therm. 2012. V. 24. № 4–6. P. 271–292.
<https://doi.org/10.1007/s00161-011-0213-x>
24. *Velasco R.M., Garcia-Colin L.S., Uribe F.J.* Entropy production: Its role in nonequilibrium thermodynamics // Entropy. 2011. № 1. V. 13. P. 82–116.
<https://doi.org/10.3390/e13010082>
25. *Margolin L.G.* Nonequilibrium entropy in a shock // Entropy. 2017. V. 19. № 7. P. 368.
<https://doi.org/10.3390/e19070368>
26. *Hafskjold B., Bedeaux D., Kjelstrup S., Wilhelmsen A.* Nonequilibrium thermodynamics of surfaces captures the energy conversions in a shock wave // Chem. Phys. Lett. 2020. V. 738. P. 100054.
<https://doi.org/10.1016/j.cpletx.2020.100054>

27. *Lax P.D.* The formation and decay of shock waves // Amer. Math. Monthly. 1972. V. 79. № 3. P. 227–241.
<https://doi.org/10.2307/2316618>
28. *Maslov V.P., Mosolov P.P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // J. Appl. Math. Mech. 1985. V. 49. № 3. P. 322–336.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0)
29. *Ostrovsky L.A.* Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 90. № 6. P. 3332–3337.
<https://doi.org/10.1121/1.401444>
30. *Dequiedt J.L., Stolz C.* Propagation of a shock discontinuity in an elasto-plastic material: Constitutive relations // Arch. Mech. 2004. V. 56. № 5. P. 391–410.
31. *Lucchesi M., Pagni A.* Longitudinal oscillations of bimodular rods // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2005. V. 5. № 1. P. 37–54.
<https://doi.org/10.1142/S0219455405001490>
32. *Gavrilov S.N., Herman G.C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vib. 2012. V. 331. № 20. P. 4464–4480.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.022>
33. *Radostin A., Nazarov V., Kiyashko S.* Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // Wave Motion. 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.08.005>
34. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of sh-waves in anisotropic laminated plates // Acous. Phys. 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
35. *Naeeni M.R., Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Pak R.Y.S., Rahimian M., Hayati Y.* Coupled thermoviscoelastodynamic green's functions for bi-material half-space // ZAMM. 2015. V. 95. № 3. P. 260–282.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201200135>
36. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // Mech. Adv. Mater. Struc. 2022. V. 29. P. 3147–3162.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
37. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Ration. Mech. Anal. 1961. V. 8. P. 263–296.
<https://doi.org/10.1007/BF00277444>
38. *Coleman B.D., Gurtin M.E., Herrera I.* Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 19. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1007/BF00252275>
39. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) Model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. № 12. P. 2021–2031.
<https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x>
40. *Boulangier P., Hayes M.A.* Finite amplitude waves in Mooney–Rivlin and Hadamard materials // Topics in Finite Elasticity / Eds. M.A. Hayes, G. Saccomandi. Wien: Springer, 2001.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2582-3_4
41. *Liu C., Cady C.M., Lovato M.L., Orler E. B.* Uniaxial tension of thin rubber liner sheets and hyperelastic model investigation // J. Mater. Sci. 2015. V. 50. № 3. P. 1401–1411.
<https://doi.org/10.1007/s10853-014-8700-7>

42. *Hashiguchi K.* Nonlinear continuum mechanics for finite elasticity-plasticity. New York: Elsevier, 2020.
43. *LeVeque R.J.* Numerical methods for conservation laws. Boston: Birkhäuser, 1992.
44. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes: The art of scientific computing. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2007.
45. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. 3rd ed. Berlin: Springer, 2004.
46. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of lamb waves // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
47. *Kuznetsov S.V.* Closed Form Analytical Solution for Dispersion of Lamb Waves in FG Plates // *Wave Motion*. 2019. V. 88. P. 196–204.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.020>
48. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves in Random and Complex Media*. 2021. V. 31. № 6. P. 1540–1549.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
49. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
50. *Gurtin M.E., Williams W.O.* On the first law of thermodynamics // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1971. V. 42. P. 77–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00251431>
51. *Holmes N., Belytschko T.* Postprocessing of finite element transient response calculations by digital filters // *Comput. Struct.* 1976. V. 6. № 3. P. 211–216.
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(76\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(76)90032-8)
52. *Jerrams S.J., Bowen J.* Modelling the Behaviour of rubber-like materials to obtain correlation with rigidity modulus tests // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 1995. V. 10. P. 8.
<https://doi.org/10.2495/CMEM950561>
53. *Chen J., Garcia E.S., Zimmerman S.C.* Intramolecularly cross-linked polymers: from structure to function with applications as artificial antibodies and artificial enzymes // *Acc. Chem. Res.* 2020. V. 53. № 6. P. 1244–1256.
<https://doi.org/10.1021/acs.accounts.0c00178>
54. *D'Amato M., Gigliotti R., Laguardia R.* Seismic isolation for protecting historical buildings: A case study // *Front. Built Environ.* 2019. V. 5. P. 87.
<https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00087>