

УДК 531.3

**ДИНАМИКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ДЛИННОВОЛНОВОГО НИЗКОАМПЛИТУДНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ
В АНГАРМОНИЧЕСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ**

© 2025 г. С. А. Щербинин^{a, b, *}

^aСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

^bИнститут проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: stefansherbinin@gmail.com

Поступила в редакцию 28.10.2024 г.

После доработки 07.11.2024 г.

Принята к публикации 08.11.2024 г.

Анализируется динамика возмущения с конечной энергией в бесконечной моноатомной нелинейной одномерной решетке. Основываясь на предложенном ранее подходе энергетической динамики, мы сосредотачиваемся на такой пространственной характеристике возмущения, как положение его энергетического центра. Ограничиваясь случаем длинноволновых возмущений с малой амплитудой, мы исследуем динамику цепочки α -ФПУ, используя ее континуальную версию, описываемую уравнением КдВ. Мы устанавливаем связь лагранжиана и энергии исходной цепочки с двумя сохраняющимися величинами уравнения КдВ. Используя эти две величины и известные свойства уравнения КдВ, мы предлагаем метод определения скорости энергетического центра возмущения на больших временах по начальным условиям.

Ключевые слова: энергоперенос, уравнение КдВ, солитоны, подход энергетической динамики

DOI: 10.31857/S1026351925020111, **EDN:** ANPOTV

1. Введение. Исследование процессов энергопереноса играет ключевую роль для понимания широкого круга явлений в различных научных и технологических областях [1–6]. Если говорить о твердых телах, то особый интерес представляют процессы теплопереноса, поскольку их изучение может способствовать решению проблемы эффективного отвода тепла от процессоров и других высокоэнергетических устройств. Для изучения таких процессов широко используется кинетическое описание, согласно которому передача энергии осуществляется квазичастицами, называемыми фононами [4, 7, 8]. Такое кинетическое описание значительно проще, чем использование уравнений динамики решетки.

Однако форма и размеры энергетических возмущений, соответствующих переносящим энергию квазичастицам, могут изменяться из-за дисперсии,

неоднородности решетки и ангармоничности межчастичных взаимодействий. Так, подобные возмущения в диспергирующих средах имеют конечное “время жизни” [8] из-за непрерывного увеличения их размеров. Поэтому можно утверждать, что физический смысл квазичастиц, переносящих энергию, до сих пор не до конца понятен.

В настоящей работе мы используем подход энергетической динамики [9–11], который в некотором смысле является развитием кинетического описания. При этом данный подход, среди прочего, направлен на то, чтобы учесть вышеупомянутые эффекты изменения формы и размера квазичастиц, сохраняя при этом простоту описания, свойственную кинетическому подходу.

В основе подхода энергетической динамики лежит хорошо известное [12] сходство процессов переноса массы и энергии. Данный подход опирается на две концепции: носитель и фантом [9]. Носитель представляет собой среду, отвечающую за перенос энергии, в то время как фантом – это виртуальное тело, распределение массы которого пропорционально распределению энергии в носителе. Иными словами, фантом – это эффективное массивное тело, которое ведет себя аналогично энергетическому возмущению при его распространении в носителе. Носителем может быть любая физическая среда, вещество или поле, способное переносить энергию. Основная идея подхода заключается во введении моментов распределения энергии и их соответствующих производных, аналогичных тем, которые применяются для описания пространственного распределения и переноса массы, с целью описания явлений переноса и дисперсии энергии.

Хотя подход энергетической динамики был впервые предложен для ангармонических систем [9], впоследствии он в основном применялся для гармонических систем, таких как цепочка Гука [9] (это одномерная система из одинаковых частиц, где ближайшие соседи соединены одинаковыми линейными пружинами [9]), неоднородные гармонические цепочки [9, 11], а также многомерные гармонические решетки [10]. В частности, было показано, что в цепочке Гука любое возмущение с конечной энергией движется с постоянной скоростью [9].

Применение данного подхода к ангармоническому случаю обсуждалось в работе [13], где были получены общие качественные характеристики энергетической динамики в ангармонической цепочке в пределе длинных волн и малых амплитуд. Было установлено сходство между поведением возмущения в линейной цепочке и рассматриваемой нелинейной системе. А именно на больших временах возмущение распространяется с постоянной скоростью, аналогично линейному случаю.

Настоящая работа посвящена получению количественных предсказаний для такой системы, основываясь на подходе энергетической динамики. Таким образом, данная работа представляет собой в некотором смысле продолжение работы [13]. Тем не менее она написана так, что может быть прочитана независимо от предыдущей.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выводим уравнение КдВ, которое описывает динамику возмущения с конечной энергией в цепочке α -ФПУ в пределе длинных волн и малых амплитуд. Также мы

устанавливаем связь энергии и лагранжиана исходной цепочки с двумя сохраняющимися величинами уравнения КдВ. В разделе 3 мы применяем подход энергетической динамики к уравнению КдВ. Мы описываем концепцию энергетического центра возмущения и предлагаем метод для определения его скорости исходя из начальных условий.

2. Динамика ангармонической моноатомной цепочки в низкоамплитудном длинноволновом пределе.

2.1. Цепочка α -FPU. Рассмотрим бесконечный одномерный моноатомный ангармонический кристалл. В случае низкоамплитудных колебаний частиц около их положений равновесия можно ограничиться рассмотрением парного межатомного потенциала общего вида $U(y)$, где y представляет собой разность смещений двух соседних частиц из их положений равновесия. Такой потенциал можно разложить в ряд в окрестности $y = 0$:

$$U(y) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j y^j.$$

Если мы ограничимся только первым членом ряда, то получим гармоническую цепочку, так называемую цепочку Гука [9], энергетическая динамика которой, среди прочего, рассматривалась в работе [9]. Самый простой способ учесть ангармонизм — это сохранить следующее слагаемое в разложении, то есть использовать для описания межчастичного взаимодействия потенциал вида:

$$U(y) = \frac{k}{2} y^2 + \frac{\alpha k}{3a} y^3,$$

где k представляет собой гармоническую жесткость, α же суть безразмерный коэффициент, характеризующий ангармоничность системы и a — это равновесное расстояние между частицами. Цепочка одинаковых частиц, взаимодействующих посредством такого парного потенциала, представляет собой знаменитую цепочку α -ФПУ, динамика которой может быть описана следующей системой динамических уравнений:

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \frac{\alpha k}{a} [(u_{n+1} - u_n)^2 - (u_n - u_{n-1})^2], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Здесь точкой обозначена временная производная, m представляет собой массу частицы, u_n — это смещение частицы под номером n из ее положения равновесия, а \mathbb{Z} — множество целых чисел.

Для рассматриваемой системы можно записать кинетическую K и потенциальную Π энергии следующим образом:

$$K = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n, \quad \Pi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Pi_n, \quad (2.2)$$

где удельная кинетическая энергия K_n может быть записана как

$$K_n = \frac{m\dot{u}_n^2}{2}, \quad (2.3)$$

а удельную потенциальную энергию Π_n мы запишем в виде

$$\Pi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{k}{2} (u_n - u_{n-1})^2 + \frac{\alpha k}{3a} (u_{n+1} - u_n)^3 + \frac{\alpha k}{3a} (u_n - u_{n-1})^3 \right). \quad (2.4)$$

Отметим, что удельные кинетическая и потенциальная энергии могут быть выбраны различными способами, но мы выбрали форму, представленную выше, поскольку, на наш взгляд, она наиболее оправдана физическими соображениями. Действительно, энергия каждой частицы есть сумма полной ее кинетической энергии и половин потенциальных энергий связей, соединяющих эту частицу с соседними.

Используя выражения (2.2) и (2.3), (2.4), мы можем ввести глобальный лагранжиан

$$L = K - \Pi \quad (2.5)$$

и глобальную полную энергию

$$E = K + \Pi. \quad (2.6)$$

Отметим, что, используя глобальный лагранжиан (2.5), можно получить уравнения движения (2.1) как уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n} - \frac{\partial L}{\partial u_n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а также глобальную полную энергию (2.6), используя хорошо известное соотношение между глобальным лагранжианом и глобальным гамильтонианом:

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n} \dot{u}_n - L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n.$$

2.2. Уравнение Буссинеска. Теперь, помимо допущения, что смещения частиц из их положения равновесия малы, положим, что рассматриваемое возмущение достаточно гладкое. Тогда можно выразить смещение каждой частицы $u_n(t)$ через такую непрерывную функцию $u(x, t)$, что $u(na, t) = u_n(t)$. Эту функцию можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u_{n\pm 1} = u(x \pm a) = u(x) &= \pm a \frac{d}{dx} u(x) + \frac{a^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} u(x) \pm \\ &\pm \frac{a^3}{6} \frac{d^3}{dx^3} u(x) + \frac{a^4}{24} \frac{d^4}{dx^4} u(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае малых смещений частиц из их положений равновесия, соответствующие деформации также будут малы. Поэтому мы можем ввести некоторый малый параметр ε_1 , описывающий малость деформаций. Введем также малый параметр ε_2 , который описывает гладкость формы возмущения. Мы можем определить эти два параметра следующим образом:

$$\frac{du}{dx} \sim \varepsilon_1; \quad a \frac{dz/dx}{z} \sim \varepsilon_2.$$

Здесь z представляет любую функцию, описывающую рассматриваемое возмущение. Если мы подставим разложение в ряд Тейлора (2.7) в исходные динамические уравнения (2.1) и сохраним первую малую поправку вдобавок к основному порядку, то придем к заключению, что малые параметры ε_1 и ε_2 должны быть связаны следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon,$$

в противном случае первая малая поправка будет или полностью нелинейной или полностью дисперсионной. Поэтому у нас остается только один малый параметр:

$$\frac{du}{dx} \sim \varepsilon; a \frac{dz/dx}{z} \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Уравнение движения, учитывающее основной порядок и первую малую поправку, имеет следующую форму:

$$\rho u_{tt} = Du_{xx} + 2\alpha Du_x u_{xx} + a^2 D \frac{u_{xxxx}}{12}, \quad (2.9)$$

где $D=ka$ суть одномерный модуль Юнга, $\rho = m/a$ представляет собой линейную массовую плотность и нижние индексы обозначают производные по соответствующим переменным. Уравнение (2.9) представляет собой знаменитое уравнение Буссинеска [14–16]. Его подробный вывод с используемыми здесь обозначениями переменных и малых параметров приведен в [13].

Далее можно получить континуальную версию глобального лагранжиана, подставив разложение (2.7) в (2.5) и сохранив слагаемые, соответствующие основному порядку, и первую малую поправку:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} l dx,$$

где плотность лагранжиана имеет вид

$$l = \frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{D}{2} u_x^2 - \frac{\alpha D}{3} u_x^3 + \frac{a^2 D}{24} u_{xx}^2. \quad (2.10)$$

Полученная плотность лагранжиана порождает уравнение Буссинеска (2.9) посредством уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial l}{\partial u_{xx}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial l}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial l}{\partial u_t} \right) = 0.$$

Используя хорошо известную формулу, связывающую плотность лагранжиана и плотность энергии (гамильтониана)

$$e = u_t \frac{\partial l}{\partial u_t} - l, \quad (2.11)$$

можно получить плотность энергии из выражения (2.10) в следующем виде:

$$e = \frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{D}{2} u_x^2 + \frac{\alpha D}{3} u_x^3 - \frac{a^2 D}{24} u_{xx}^2. \quad (2.12)$$

Эта плотность энергии удовлетворяет балансовому соотношению

$$e_t = -h_x, \quad (2.13)$$

где

$$h = -D \left[u_t u_x + \alpha u_x^2 u_t + \frac{a^2}{12} (u_{xxx} u_t - u_{xx} u_{xt}) \right].$$

Плотность энергии может быть получена также путем подстановки разложения (2.7) в выражение (2.6) для полной энергии и сохранения основного порядка и первой малой поправки. Следует отметить, что выражения (2.10) и (2.12) определены с точностью до слагаемого, представляющего полную производную по координате. Добавление такого слагаемого не изменяет соответствующие интегральные величины, так как мы рассматриваем возмущения с конечной энергией.

2.3. Уравнение КдВ. Рассмотрим теперь распространение возмущения только в одном направлении; иными словами, сделаем следующую замену переменных:

$$u(x, t) = u(x - ct, t) = u(\chi, \tau), \quad (2.14)$$

где $c = a\sqrt{k/m}$ представляет собой линейную скорость звука.

После подстановки анзаца (2.14) в уравнение Буссинеска (2.9), можно пренебречь слагаемым $u_{\tau\tau}$. В самом деле, основной порядок уравнения Буссинеска представляет собой стандартное волновое уравнение, в то время как нелинейное и дисперсионное слагаемые суть первая малая поправка. Поэтому можно ожидать, что форма возмущения, описываемого этим уравнением, будет изменяться медленно. Тогда, сохраняя слагаемые основного порядка и первой малой поправки, можно получить уравнение КдВ:

$$\rho c u_{\chi\tau} + \alpha D u_{\chi} u_{\chi\chi} + a^2 \frac{D}{24} u_{\chi\chi\chi} = 0 \quad (2.15)$$

или

$$w_{\zeta} + w w_{\kappa} + w_{\kappa\kappa} = 0, \quad (2.16)$$

где

$$w = u_{\chi}; \quad \zeta = \frac{c\sqrt{24\alpha^3}}{a} \tau; \quad \kappa = \frac{\sqrt{24\alpha}}{a} \chi.$$

Это уравнение было впервые получено Дж. Буссинеском [14–16] и затем переоткрыто Д. Кортевегом и Дж. де Вризом [17].

Используя КдВ уравнение, мы можем получить следующую оценку для малости производной по τ :

$$\frac{dz/d\tau}{z} = \omega u \varepsilon^{3/2}, \quad (2.17)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$.

Подробный вывод уравнения КдВ с обозначением переменных и малых параметров, используемых здесь, см. в [13].

Затем, произведя замену переменных (2.14) в балансовом соотношении (2.13) и используя оценки (2.8) и (2.17), можно пренебречь всеми высшими порядками в уравнении, сохранив только основной порядок и первую малую поправку. В результате получается новое уравнение баланса:

$$(\epsilon_1)_\tau = -(\eta_1)_\chi,$$

где плотность энергии имеет вид

$$\epsilon_1 = \rho c^2 u_\chi^2, \quad (2.18)$$

в то время как плотность потока энергии можно записать как

$$\eta_1 = \frac{2\alpha c D}{3} u_\chi^3 + \frac{a^2 c D}{12} \left(u_\chi u_{\chi\chi\chi} - \frac{u_{\chi\chi}^2}{2} \right). \quad (2.19)$$

С другой стороны, можно сделать замену переменных (2.14) в выражении для плотности лагранжиана (2.10) и, используя оценки (2.8) и (2.17), пренебречь всеми высшими порядками в этом выражении, сохранив только слагаемые основного порядка и первой малой поправки. В результате получается следующая плотность лагранжиана:

$$l = \frac{Da^2}{24} u_{\chi\chi}^2 - \rho c u_\chi u_\tau - \frac{\alpha D}{3} u_\chi^3.$$

Используя эту плотность лагранжиана, можно вывести выражение для плотности с помощью формулы, аналогичной (2.11):

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha D}{3} u_\chi^3 - \frac{Da^2}{24} u_{\chi\chi}^2. \quad (2.20)$$

Эта величина также удовлетворяет балансовому соотношению

$$(\epsilon_2)_\tau = -(\eta_2)_\chi,$$

где плотность потока энергии принимает вид:

$$\eta_2 = \frac{\alpha^2 D^2}{4\rho c} u_\chi^4 + \frac{D^2 a^4}{288\rho c} \left(\frac{u_{\chi\chi\chi}^2}{2} - u_{\chi\chi} u_{\chi\chi\chi} \right) + \frac{\alpha a^2 D^2}{24\rho c} \left(u_\chi^2 u_{\chi\chi\chi} - 2u_\chi u_{\chi\chi}^2 \right). \quad (2.21)$$

Отметим, что ϵ_1, ϵ_2 и η_1, η_2 представляют собой известные [18] сохраняющиеся величины и их потоки для уравнения КдВ, соответственно.

3. Энергетическая динамика уравнения КдВ. Таким образом, динамика низкоамплитудных длинноволновых возмущений в рассматриваемой ангармонической цепочке может быть описана с помощью уравнения КдВ (это было строго доказано математически в работах [19, 20]). Кроме того, у нас есть два определения плотности энергии, полученные из глобальной лагранжиана и глобальной энергии исходной цепочки соответственно. Каждая из этих плотностей имеет соответствующий поток.

Применим подход энергетической динамики [9] для описания динамики возмущения в уравнении КдВ. Воспользуемся такой пространственной характеристикой возмущения, как положение его энергетического центра. Это положение можно определить по следующей формуле [9]:

$$\chi_c = \frac{M_1}{E},$$

где

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon d\chi$$

представляет собой глобальную энергию, в то время как M_1 суть первый энергетический момент, который может быть определен следующим образом:

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi \epsilon d\chi.$$

Легко показать [9], что

$$\dot{M}_1 = H,$$

где H – это глобальный поток энергии

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \eta d\chi.$$

Таким образом, скорость энергетического центра может быть рассчитана как:

$$v_c = \frac{E}{H}.$$

Отметим, что эти формулы справедливы как для $\epsilon = \epsilon_1$ и $\eta = \eta_1$, так и для $\epsilon = \epsilon_2$ и $\eta = \eta_2$.

Известно, что любое возмущение в уравнении КдВ при больших временах превращается в набор точных солитонов, распространяющихся вправо, и осциллирующую дисперсионную волну, так называемый осциллирующий хвост (см., например, [21]), как показано на рис. 1. Солитоны выстраиваются один за другим, начиная с солитона с наибольшей амплитудой (и, соответственно,

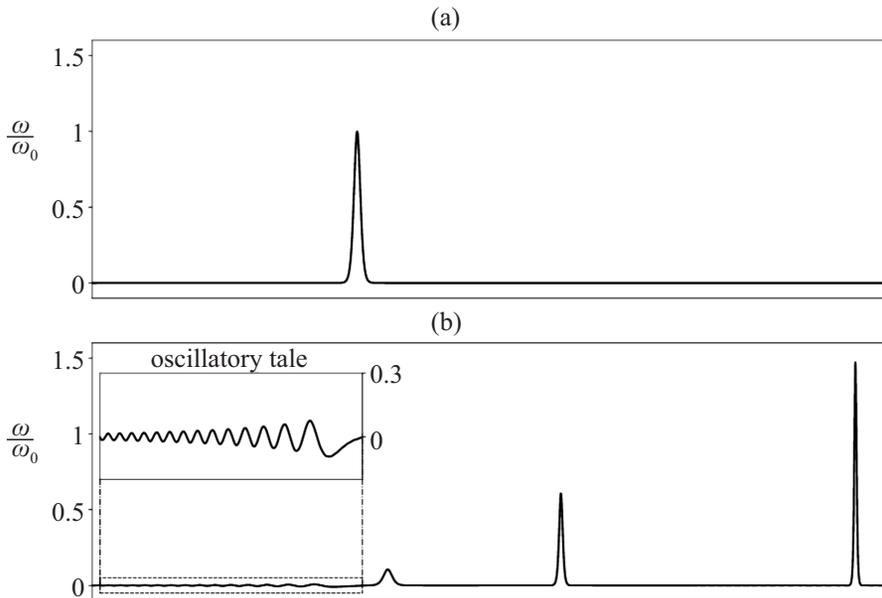


Рис. 1. (а) Начальное возмущение вида $w_0 \cosh^{-3}(w_0 \kappa)$ в уравнении КдВ (2.16). После некоторого переходного процесса возмущение трансформируется в (б) набор солитонов и осциллирующий хвост.

с самой высокой скоростью) и заканчивая солитоном с наименьшей амплитудой (и, соответственно, с самой низкой скоростью). Эти солитоны никогда не будут взаимодействовать и каждый из них будет двигаться с постоянной скоростью. Осциллирующий хвост остается позади этого набора солитонов и на больших временах также движется с постоянной скоростью [13]. Таким образом, скорость энергетического центра любого возмущения в уравнении КдВ, после некоторого переходного процесса, становится постоянной.

Солитонное решение имеет вид (см., например, [21]):

$$u_\chi = \frac{3q^2}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{6\alpha}q(\chi - \chi_0 - q^2\alpha c\tau)}{a}\right)}.$$

Здесь q представляет собой некоторый параметр, который определяет высоту, ширину и скорость солитона. Ясно, что скорость солитона $v_s = q^2\alpha c$. Рассмотрим этот профиль в момент времени $\tau = 0$ и поместим начало координаты χ в точку $\chi = \chi_0$. Тогда солитонный профиль может быть записан следующим образом:

$$u_\chi = \frac{3q^2}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{6\alpha}q\chi}{a}\right)}.$$

Посчитаем глобальные энергии и глобальные энергетические потоки для этого профиля, используя выражения (2.18)–(2.21):

$$E_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\alpha}} ac^2 q^3; H_1 = 2\sqrt{6\alpha} ac Dq^5; E_2 = \frac{6\sqrt{6}}{5} \sqrt{6\alpha} a Dq^5; H_2 = \frac{6\sqrt{6}}{5c} \alpha^2 a D^2 q^7. \quad (3.1)$$

Отношение каждого из глобальных потоков (H_1 или H_2) к соответствующей глобальной энергии (E_1 или E_2) дает одну и ту же скорость солитона:

$$\frac{H_1}{E_1} = \frac{H_2}{E_2} = q^2 ac = v_s. \quad (3.2)$$

В это же самое время глобальный поток H_1 и глобальная энергия E_2 , соответствующие одному и тому же солитону, связаны следующим соотношением:

$$E_2 = \frac{3}{5} \frac{H_1}{c}. \quad (3.3)$$

Это соотношение открывает путь к следующему применению величин (3.1). Рассмотрим некоторое возмущение, которое распадается только на солитоны, то есть без осциллирующего хвоста. К тому моменту, когда оно полностью распадется на отдельные солитоны, скорость v_c энергетического центра целого возмущения может быть рассчитана следующим образом:

$$v_c = \frac{\sum v_s^i E_1^i}{\sum E_1^i},$$

где v_s^i суть скорость энергетического центра i -го солитона, в то время как E_1^i – это энергия E_1 , соответствующая этому солитону; суммирование производится по всем солитонам. Принимая во внимание формулы (3.2) и (3.3), можно получить, что

$$v_c = \frac{5}{3} \frac{E_2}{E_1}. \quad (3.4)$$

Таким образом, начальная форма рассматриваемого возмущения в рассматриваемом случае содержит информацию о скорости его энергетического центра на больших временах, когда возмущение разделится на отдельные солитоны.

Формула (3.4) также применима в случаях, когда энергия, уносимая осциллирующим хвостом, пренебрежимо мала. Один из таких случаев следующий. Начальная форма возмущения удовлетворяет условию

$$u_\chi(\chi, \tau = 0) \geq 0, \quad \forall \chi$$

и количество результирующих солитонов велико [21], что реализуется при выполнении условия [21]

$$\sigma \gg 1, \sigma = \frac{\sqrt{24\alpha} L}{a},$$

где L представляет собой характерный размер начального возмущения. Остальные возможные случаи требуют дальнейшего исследования.

4. Обсуждение и выводы. Таким образом, в данной работе предложенный ранее подход энергетической динамики [9] применен для описания динамики длинноволнового низкоамплитудного возмущения с конечной энергией в одноатомной ангармонической цепочке. Было установлено, что в определенных случаях начальная форма возмущения определяет скорость его энергетического центра на больших временах. Подчеркнем, что для получения этого результата нет необходимости решать уравнения движения как для исходной цепочки (2.1), так и для ее двух континуальных версий, описываемых уравнениями Буссинеска (2.9) и КдВ (2.15). Не нужно даже знать количество солитонов, на которые распадается начальное возмущение. Все, что требуется, — это уравнения баланса для величин (2.18) и (2.20), а также общие свойства решений уравнения КдВ. Однако стоит отметить, что наш метод, по-видимому, дает большую ошибку, когда энергия осцилляционного хвоста сравнима с энергией солитонов. Этот случай является предметом нашего дальнейшего исследования.

Величины (2.18)–(2.21), используемые в нашей работе, являются известными [18] сохраняющимися величинами и их потоками для уравнения КдВ, но в настоящей работе установлена связь ϵ_1, η_1 и ϵ_2, η_2 с энергией и лагранжианом исходной цепочки соответственно. Насколько нам известно, эта связь ранее не была представлена в литературе.

В заключение мы хотели бы отметить, что полученные результаты можно применить к любой системе, описываемой уравнением КдВ. В этом случае область пространства, занимаемая возмущением, может быть интерпретирована как разрыв [22]. Таким образом, предлагаемый метод предоставляет способ расчета скорости распространения соответствующего разрыва на больших временах.

Автор выражает благодарность Кривцову А.М. и Кузькину В.А. за ценные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Грант № 23-11-00363).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. V. 16. Amsterdam: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier, 1973. 425 p.
2. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. New Jersey: John Wiley and Sons, 1999. 660 p.
3. *Mejia-Monasterio C., Politi A., Rondoni, L.* Heat flux in one-dimensional systems // Phys. Rev. E 2019. V. 100. № 5. P. 032139.

4. *Kaviany M.* Heat transfer physics. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2014. 765 p.
5. *Babich V., Kiselev A.* Elastic Waves: High Frequency Theory. 1st ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2018. 306 p.
6. *Sheriff R.E., Geldart L.P.* Exploration Seismology. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 592 p.
7. *Guo Y., Wang M.* Phonon hydrodynamics and its applications in nanoscale heat transport // *Phys. Rep.* 2015. V. 595. P.1.
<https://doi.org/10.1016/J.PHYSREP.2015.07.003>
8. *Kuzkin V.A., Krivtsov A.M.* Unsteady ballistic heat transport: linking lattice dynamics and kinetic theory // *Acta Mechanica.* 2021. V. 232. № 5. P. 1983.
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02927-w>
9. *Krivtsov A.M.* Dynamics of matter and energy // *ZAMM* 2023. V. 103. № 4. P. e202100496.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202100496>
10. *Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M.* Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices // *Phys. Rev. E* 2023. V. 107. № 6. P. 065002.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.065002>
11. *Kuzkin V.A.* Acoustic transparency of the chain-chain interface // *Phys. Rev. E* 2023. V. 107. № 6. P. 065004.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.065004>
12. *Deen W.M.* Analysis of Transport Phenomena. New York: Oxford University Press, 1998. 576 p.
13. *Shcherbinin S.A., Krivtsov A.M.* Energy dynamics of long-wave low-amplitude disturbances in an anharmonic one-dimensional lattice // *Mechanics of Solids.* 2024. V. 59. № 5. P. 3235–3243.
<https://doi.org/10.1134/S0025654424606001>
14. *Boussinesq J.* Essai sur la theorie des eaux courantes // *Memoires presentes par divers savants a l'Academie des Sciences de l'Institut National de France.* 1877. V. 23. P. 1–680.
15. *Miles J.W.* The Korteweg-de Vries equation: a historical essay // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 106. P. 131.
<https://doi.org/10.1017/S0022112081001559>
16. *Darrigo O.* Joseph Boussinesq's Legacy in fluid mechanics // *Comptes Rendus Mécanique.* 2017. V. 345. № 7. P. 427–445.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.05.008>
17. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine J. Science.* 1895. V. 39. № 240. P. 422.
<https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
18. *Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D.* Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion // *J. Math. Phys.* 1968. V. 9. № 8. P. 1204–1209.
<https://doi.org/10.1063/1.1664701>
19. *Schneider G., Wayne C.E.* Counter-propagating waves on fluid surfaces and the continuum limit of the Fermi–Pasta–Ulam model // *International Conference on Differential Equations*, V. 1, 2 (Berlin, 1999) 2000. P. 390.
https://doi.org/10.1142/9789812792617_0075

20. *Hong Y., Kwak C., Yang C.* On the Korteweg–de Vries Limit for the Fermi–Pasta–Ulam System // Arch. Ration. Mech. Anal. 2021. V. 240. P. 1091–1145.
<https://doi.org/10.1007/s00205-021-01629-4>
21. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
22. *Бахолдин И.Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 320 с.

DYNAMICS OF THE ENERGY CENTER OF A LONG-WAVE LOW-AMPLITUDE DISTURBANCE IN AN ANHARMONIC ONE-DIMENSIONAL LATTICE

S. A. Shcherbinin^{a, b, *}

^a*Peter the Great Saint Petersburg Polytechnical University, Saint Petersburg, Russia*

^b*Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint Petersburg, Russia*

**E-mail: stefanscherbinin@gmail.com*

The dynamics of a disturbance with finite energy in an infinite monatomic nonlinear one-dimensional lattice are analyzed. Based on the energy dynamics approach proposed earlier, we focus on such disturbance spatial characteristic as the position of its energy center. Restricting our analysis to long-wave low-amplitude disturbances, we investigate the dynamics of the α -FPU chain using its continuous version described by the KdV equation. We establish a connection of the Lagrangian and the energy of the original chain with the two conserving quantities of the KdV equation. Using these two quantities and the known properties of the KdV equation, we propose a method for determining the velocity of the energy center of the disturbance at large times based on the initial conditions.

Keywords: energy transfer, KdV equation, solitons, energy dynamics approach

REFERENCES

1. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 16. Amsterdam: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier, 1973. 425 p.
2. *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves. New Jersey: John Wiley and Sons, 1999. 660 p.
3. *Mejia-Monasterio C., Politi A., Rondoni, L.* Heat flux in one-dimensional systems // Phys. Rev. E. 2019. V. 100. № 5. P. 032139.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032139>
4. *Kaviany M.* Heat transfer physics. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2014. 765 p.
5. *Babich V., Kiselev A.* Elastic Waves: High Frequency Theory. 1st ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2018. 306 p.

6. *Sheriff R.E., Geldart L.P.* Exploration Seismology. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 592 p.
7. *Guo Y., Wang M.* Phonon hydrodynamics and its applications in nanoscale heat transport // *Phys. Rep.* 2015. V. 595. P. 1.
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2015.07.003>
8. *Kuzkin V.A., Krivtsov A.M.* Unsteady ballistic heat transport: linking lattice dynamics and kinetic theory // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232. № 5. P. 1983.
9. *Krivtsov A.M.* Dynamics of matter and energy // *ZAMM*. 2023. V. 103. № 4. P. e202100496.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202100496>
10. *Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M.* Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices // *Phys. Rev. E*. 2023. V. 107. № 6. P. 065002.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.065002>
11. *Kuzkin V.A.* Acoustic transparency of the chain-chain interface // *Phys. Rev. E*. 2023. V. 107. № 6. P. 065004.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.065004>
12. *Deen W.M.* Analysis of Transport Phenomena. New York: Oxford University Press, 1998. 576 p.
13. *Shcherbinin S.A., Krivtsov A.M.* Energy dynamics of long-wave low-amplitude disturbances in an anharmonic one-dimensional lattice // Under review
14. *Boussinesq J.* Essai sur la theorie des eaux courantes // *Memoires presentes par divers savants a l'Academie des Sciences de l'Institut National de France*. 1877. V. 23. P. 1–680.
15. *Miles J.W.* The Korteweg-de Vries equation: a historical essay // *Journal of Fluid Mechanics*. 1981. V. 106. P. 131.
<https://doi.org/10.1017/S0022112081001559>
16. *Darrigo O.* Joseph Boussinesq's Legacy in fluid mechanics // *Comptes Rendus Mécanique*. 2017. V. 345. № 7. P. 427.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.05.008>
17. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1895. V. 39. № 240. P. 422.
<https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
18. *Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D.* Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.* 1968. V. 9. № 8. P. 1204.
<https://doi.org/10.1063/1.1664701>
19. *Schneider G., Wayne C.E.* Counter-propagating waves on fluid surfaces and the continuum limit of the Fermi–Pasta–Ulam model // *International Conference on Differential Equations*. V. 1, 2 (Berlin, 1999) 2000. P. 390.
20. *Hong Y., Kwak C., Yang C.* On the Korteweg–de Vries Limit for the Fermi–Pasta–Ulam System // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2021. V. 240. P. 1091.
<https://doi.org/10.1007/s00205-021-01629-4>
21. *Karpman V.I.* Non-Linear Waves in Dispersive Media. Pergamon press, 1975. 198 p.
22. *Baholdin I.B.* Non-dissipative discontinuities in continuum mechanics. M: *Physmathlit* 2004. 320 p. [In Russian].