

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОСЕВОГО СЖАТИЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА С ЗАДАННЫМИ УСЛОВИЯМИ
НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОРЦОВ

© 2025 г. А. Л. Попов^{a,b}, А. О. Ватульян^{c,*},
Д. А. Челюбеев^a, В. И. Бухалов^{a,d,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^bНИУ МГСУ, Москва, Россия

^cЮжный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^dОКБ им. А. Люльки, филиал ПАО «ОДК-УМПО», Москва, Россия

*E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, **e-mail: vlad.buhalov@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 23.10.2024 г.

Принята к публикации 24.10.2024 г.

Представлена новая схема приближенного решения задачи об осевом сжатии упругого цилиндра с одним подвижным, а другим – неподвижным торцами при свободной боковой поверхности, уточняющая известное решение, полученное с использованием разделения переменных при усреднении условий по напряжениям на боковой поверхности цилиндра. Уточнение производится путем последовательного снятия невязок: сначала – в распределениях напряжений на боковой поверхности цилиндра, затем – в радиальных перемещениях по торцам и далее – в осевом перемещении подвижного торца. Сопоставление с результатами численного решения задачи методом конечных элементов при разных значениях коэффициента Пуассона и разных сочетаниях габаритных размеров цилиндра показало эффективность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: упругий цилиндр, сжатие, усреднение граничных условий, приближенное решение

DOI: 10.31857/S1026351925020109, EDN: ANNJTR

1. Введение. Исследование напряжений и деформаций осесимметрично нагруженного цилиндра конечной длины, начатое более 100 лет назад работой Файлона 1902 г. [1], остается и в первой четверти XXI в. не до конца решенной фундаментальной проблемой теории упругости, о чем свидетельствует большое количество публикаций, в том числе [2], вышедшей в свет к моменту отправки в редакцию рукописи данной статьи. Сохраняющаяся актуальность проблемы обусловлена многообразным применением упругих структур, в частности, цилиндрической формы, в качестве пружинных и демпфирующих опор и прокладок в сейсмоизоляции зданий, защите чувствительных к вибрациям приборов, автомобилестроении,

аэрокосмической промышленности, электронике и в других областях. Деформативность таких структур обычно характеризуется одноосным сжатием между двумя параллельными жесткими пластинами, что в большинстве случаев моделирует их поведение в процессе эксплуатации.

Теоретический анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндра охватывает несколько постановок граничных условий и подходов к решению соответствующих краевых задач. Наиболее распространенный подход основан на стремлении к формально точному решению гранично-контактной задачи. Так, в [1] рассмотрена задача о равномерно распределенной касательной нагрузке, приложенной к участку боковой поверхности цилиндра с представлением решений для перемещений в виде рядов по полным системам тригонометрических функций и функций Бесселя в цилиндрической системе координат, удовлетворяющих уравнениям равновесия внутри цилиндра и нулевым нормальным напряжениям на плоских торцах цилиндра. В [3–8] этот подход распространен на разные сочетания распределений нормальной и тангенциальной нагрузок по боковой и торцевой поверхностям цилиндра, а в [9] — на неосесимметричное распределение поверхностных нагрузок. Однако определение коэффициентов рядов при удовлетворении граничным условиям, вследствие взаимозависимости выражений для каждого коэффициента разложений от других коэффициентов рядов, приводит к необходимости решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. На практике это возможно только при реализации метода редукции на базе решения соответствующей конечной системы, что требует обоснования в виде доказательства полной регулярности или квазивполнерегулярности исходной бесконечной системы. При явном представлении коэффициентов разложений без использования бесконечной системы уравнений обеспечивалось выполнение граничных условий отсутствия напряжений на боковой поверхности цилиндра и, в той или иной мере, — удовлетворение краевым условиям на торцах для одного из напряжений: нормального или касательного, тогда как для другого — только в смысле принципа Сен-Венана [4]. Подобным образом удовлетворялись и краевые условия для перемещений: по одной компоненте — строго, а по другой — только при определенном значении радиуса торца цилиндра.

В другом подходе, который можно определить как подход, базирующийся на принципе “усредненного равновесия”, не ставится задача точного удовлетворения всем граничным условиям. Формулируется ряд достаточно обоснованных гипотез о поведении цилиндрического образца при сжатии, с помощью которых решение приводится к наглядному, удобному для практического применения, виду [10–14]. Такой подход длительное время был сосредоточен на моделях несжимаемых материалов, таких как резина, для которых принимались, в частности, гипотеза о параболической зависимости для формы выпуклости свободной боковой поверхности при осевом сжатии цилиндра и ряд других гипотез: о независимости осевого напряжения от осевой координаты и сохранении плоскими после деформации сечений, параллельных торцевым плоскостям [10–12]. Однако, как выяснилось в [13, 14], такие гипотезы оправданы лишь для диапазона значений форм-фактора образца S (отношения площади одного из торцов к площади боковой поверхности), много большего

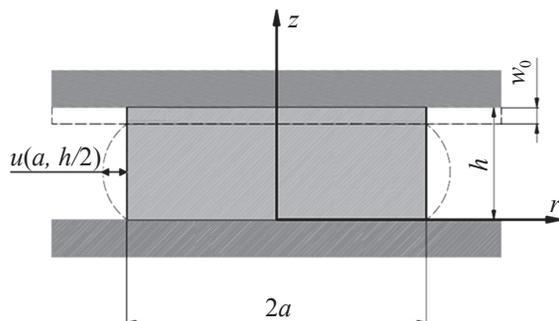


Рис. 1. Расчетная схема сжатия цилиндра.

единицы. Распространение подхода “усредненного равновесия” на материалы с произвольным значением коэффициента Пуассона выполнено в [15].

Ниже представлена новая схема приближенного аналитического решения задачи об осевом сжатии цилиндра конечной длины, первый шаг которой сделан по аналогии с решением [15], но несколько проще. Аналогов последующих шагов предлагаемой в работе схемы, использующей несколько простых решений, авторы в литературе не обнаружили.

2. Постановка задачи. Рассмотрим осевое сжатие упругого цилиндра радиуса a и высотой h абсолютно жесткими плитами, к которым прикреплены торцы цилиндра (рис. 1). Считаем, что нижний торец цилиндра неподвижен, а верхний торец смещается в осевом направлении на величину $-w_0$.

Для описания напряженно-деформируемого состояния (НДС) цилиндра будем исходить из уравнений равновесия Ламе в перемещениях в осесимметричном случае [16]:

$$\begin{aligned}
 (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\
 (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1 - 2\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где $u = u(r, z)$, $w = w(r, z)$ – соответственно, функции радиального и осевого перемещений в цилиндрической системе координат с началом в центре неподвижного торца цилиндра, ν – коэффициент Пуассона.

Сформулируем граничные условия для перемещений и напряжений:

– на торцах цилиндра $z = 0, h$:

$$u(r, 0) = u(r, h) = 0, \quad w(r, 0) = 0, \quad w(r, h) = -w_0,
 \tag{2.2}$$

– на боковой поверхности $r = a$:

$$\sigma_r(a, z) = \tau(a, z) = 0,
 \tag{2.3}$$

где σ_r, τ – соответственно: радиальное и тангенциальное напряжения.

3. Шаг 1. На первом шаге схемы строится решение, которое точно удовлетворяет граничным условиям на торцах цилиндра и усредненно – в интегральном смысле – условиям на его боковой поверхности.

Из вида первого уравнения (2.1) и отсутствия особенности решения на оси цилиндра можно предположить, что зависимость радиальных перемещений цилиндра от радиальной координаты может быть описана с помощью функции Бесселя первого порядка. К подобному заключению можно прийти и после дифференцирования второго уравнения (2.1) по радиальной координате. Ниже будет показано, что в качестве решения может быть использована только модифицированная функция Бесселя первого рода. Другой вариант решения – через немодифицированную функцию Бесселя – не реализуется в физически допустимом диапазоне изменений коэффициента Пуассона материала цилиндра.

В соответствии со сделанным предположением о характере решения для радиальной компоненты вектора перемещения цилиндра, будем отыскивать ее в виде произведения:

$$u(r, z) = I_1(\Delta r/h)G(z), \quad (3.1)$$

где $I_1(\alpha r/h)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка; параметр α введен по аналогии с решением [15].

Подставим выражение (3.1) сначала в первое уравнение (2.1). Приходим к уравнению второго порядка в частных производных относительно функции осевого перемещения:

$$\frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial r \partial z} + \left[(1 - 2\nu)G''(z) + 2(1 - \nu)\frac{\alpha^2}{h^2}G(z) \right] I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right) = 0.$$

Интегрируя его по r и по z , получим общее выражение осевого перемещения в виде:

$$w(r, z) = f_1(z) + f_2(r) - V_1(z)I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right),$$

$$V_1(z) = (1 - 2\nu)\frac{h}{\alpha}G'(z) + 2(1 - \nu)\frac{\alpha}{h}\int G(z)dz, \quad (3.2)$$

где $f_1(z)$ и $f_2(r)$ – некоторые произвольные функции, возникающие при интегрировании.

Подстановка выражений (3.1), (3.2) во второе уравнение равновесия (2.1) приводит к уравнению:

$$(1 - \nu)(1 - 2\nu)\frac{h}{\alpha}V_2(z)I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right) - (1 - \nu)f_1''(z) - \frac{1 - 2\nu}{2}\left[f_2''(r) + \frac{1}{r}f_2'(r)\right] = 0, \quad (3.3)$$

$$V_2(z) = G'''(z) + 2\frac{\alpha^2}{h^2}G'(z) + \frac{\alpha^4}{h^4}\int G(z)dz.$$

Приравняв в нем коэффициент у $I_0(\alpha r/h)$ к нулю, получим отдельное интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $G(z)$:

$$G'''(z) + 2\frac{\alpha^2}{h^2}G'(z) + \frac{\alpha^4}{h^4}\int G(z)dz = 0, \tag{3.4}$$

которое после дифференцирования по z приводится к уравнению 4 порядка

$$G^{IV}(z) + 2\frac{\alpha^2}{h^2}G''(z) + \frac{\alpha^4}{h^4}G(z) = 0 \tag{3.5}$$

с общим решением вида

$$G(z) = (c_1 + c_3z)\sin\frac{\alpha z}{h} + (c_2 + c_4z)\cos\frac{\alpha z}{h} \tag{3.6}$$

удовлетворяющим также уравнению (3.5) и содержащим четыре произвольные постоянные c_j ($j=1, \dots, 4$). Определим эти постоянные из граничных условий для функции $G(z)$, которые следуют из условий (2.2) и симметрии радиального перемещения относительно центрального кругового сечения цилиндра:

$$G(0) = G(h) = 0, \quad G'(z)|_{z=h/2} = 0.$$

Удовлетворение этим условиям приводит к явному представлению для функции $G(z)$ с точностью до одной постоянной

$$G(z) = c_1 \left\{ \left(1 - \frac{z}{h} \right) \sin \frac{\alpha z}{h} + \frac{z}{h} \sin \left[\alpha \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right] \right\}. \tag{3.7}$$

Подставим теперь найденную функцию $G(z)$ в выражение для осевого перемещения (3.2) при $z=0$ и h . Так как при этих значениях координаты z перемещение w не должно зависеть от радиальной координаты, то при выполнении условий $V_1(0)=0$ и $V_1(h)=0$ следует, что $f_2(r)=0$, и $f_1(0)=0, f_1(h)=-w_0$. Нетрудно видеть, что оба последних условия выполняются, если

$$\alpha = (3 - 4\nu)\sin \alpha. \tag{3.8}$$

Покажем, что полученное трансцендентное уравнение (3.8) имеет единственный положительный корень. Для этого перепишем его в виде:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{1}{3 - 4\nu}. \tag{3.9}$$

Будем считать, что коэффициент Пуассона находится в пределах: $[-1, 0.5]$. Случай $\nu = 0.5$ (несжимаемый материал) рассматриваться не будет, так как для него приближенное аналитическое решение исходной задачи (2.1)–(2.3) построено в [14].

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $f(z) = \sin z/z - 1/(3 - 4\nu)$. Отношение $1/(3 - 4\nu)$ для выбранного диапазона изменения ν находится в пределах $[1/7, 1)$. Рассмотрим сначала интервал изменения z от 0 до π . Нетрудно установить, что

$$f(0) = 1 - \frac{1}{3 - 4\nu} > 0, \quad f(\pi) = -\frac{1}{3 - 4\nu} < 0.$$

Ввиду того, что $f(0)f(\pi) < 0$, на этом отрезке $[0, \pi]$ в силу известных свойств непрерывных функций $f(z)$ обращается в ноль. Для обоснования единственности корня достаточно найти $f'(z) = (z \cos z - \sin z)/z^2$ и доказать монотонность исходной функции на этом отрезке, установив, что $f'(0) = 0$ и $f'(z) < 0$ при $0 < z \leq \pi$. В самом деле, на отрезке $(0, \pi/2]$ это следует из известного неравенства $\operatorname{tg} z > z$, а на $(\pi/2, \pi]$ — из неравенства $\cos z \leq 0$. При $z > \pi$ функция $\sin z/z$ остается отрицательной вплоть до $z = 2\pi$. Следующий положительный максимум функции $\sin z/z$ находится в точке, близкой к $z = 5\pi/2$, точнее, — к $5\pi/2 - 2/5\pi$, отличающейся от положения истинного максимума, не выражаемого аналитически, менее, чем на 0.02%. Значения функции $\sin z/z$ в окрестности этой точки меньше, чем 1/7. Вследствие общего затухания функции $\sin z/z$ с ростом z , последующие положительные максимумы этой функции еще меньше, чем минимальное значение правой части уравнения (3.9).

Таким образом, показано, что уравнение (3.8) имеет единственный положительный корень α во всем интервале допустимых значений коэффициента Пуассона ν , что снимает вопрос неоднозначности представления решений для радиальных и осевых перемещений в виде (3.1), (3.2). Следует также отметить, что альтернативное (3.1) представление зависимости радиальной компоненты перемещения цилиндра с помощью немодифицированных функций Бесселя приводит вместо (3.8) к уравнению $\alpha = (3 - 4\nu)\operatorname{sh}(\alpha)$, не имеющему положительных корней в диапазоне допустимых значений коэффициента Пуассона, т.е. такое представление не может быть решением исходной задачи.

Отметим также, что трансцендентное уравнение (3.8), помимо указанного положительного корня, имеет счетное множество комплексных корней, что характерно при построении однородных решений для цилиндра. Данное уравнение встречается и при решении других задач теории упругости; оно исследовано в литературе, описаны численные результаты нахождения нескольких первых четверок комплексных корней для разных значений коэффициента Пуассона, в том числе — для преобразованного уравнения $\alpha = (3 - 4\nu)\operatorname{sh}(\alpha)$ [17]. Собственно учет всех таких корней и приводил бы к решениям в виде рядов, а коэффициенты определялись бы из бесконечных алгебраических систем, о которых сказано выше. Отметим также, что (3.8) имеет очевидный нулевой корень, которому соответствует элементарное стержневое решение, и оно может быть учтено за счет выбора функции $f_1(z)$, которая, как следует из (3.3), находится прямым интегрированием уравнения $f_1''(z) = 0$. В результате, при выполнении предыдущих условий, получаем: $f_1(z) = -w_0 z/h$.

В итоге обе компоненты перемещения — радиальная и осевая — определяются с точностью до одной постоянной c_1 :

$$u(r, z) = c_1 I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right) G_+(z), \quad w(r, z) = c_1 I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right) G_-(z) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - w_0 \frac{z}{h}, \quad (3.10)$$

$$G_{\pm}(z) = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin \frac{\alpha z}{h} \pm \frac{z}{h} \sin \left[\alpha \left(1 - \frac{z}{h}\right)\right].$$

Отметим, что они имеют тот же вид, что и в [15], хотя получены более простым путем.

Для нахождения постоянной c_1 могут быть использованы разные варианты приближенного удовлетворения граничным условиям (2.3) на боковой поверхности цилиндра. Это могут быть интегральные условия, как в [15], либо обращение в ноль радиальных и тангенциальных напряжений в отдельных точках боковой поверхности. В связи с этим приведем необходимые компоненты напряжений [16]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{Bmatrix} + \lambda \Delta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \Delta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.11)$$

(в них введены неиспользованные ранее обозначения для модуля упругости E и осевого напряжения σ_z).

Подстановка в эти равенства функций (3.10) и вычисление их на боковой поверхности цилиндра (при $r = a$) позволяет сформулировать интегральное условие:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \sigma_r(a, z) dz = 0$$

для определения постоянной c_1 , которое будем считать основным, либо условие равенства нулю радиального напряжения при конкретном значении координаты z на контуре одного из поперечных сечений боковой поверхности цилиндра, например, в срединном сечении: $\sigma_r(a, h/2) = 0$. В результате из интегрального условия получим:

$$c_1 = \frac{\nu(3-4\nu)w_0}{4(1-2\nu)Q}, \quad Q = \frac{1}{2} [I_0(\omega) + (1-2\nu)I_2(\omega)], \quad \omega = \frac{\alpha a}{h}, \quad (3.12)$$

а из условия на контуре $r = a$ при $z = h/2$:

$$c_{11} = \frac{w_0(\alpha - 3 \sin \alpha) \sin(\alpha/2)}{(\alpha - \sin \alpha) \left[(\alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha) I_0(\omega) + \frac{h}{a} (1 - \cos \alpha) I_1(\omega) \right]}.$$

Заметим, что, вследствие антисимметричного распределения сдвигового напряжения относительно центрального кругового сечения цилиндра, равенство

$$\frac{1}{h} \int_0^h \tau(a, z) dz = 0$$

выполняется при любом значении постоянной c_1 .

Выражения для напряжений с учетом формул для постоянной c_1 имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{\nu E \varepsilon_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\alpha \nu}{2Q_1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right) g_1(z) - \frac{3-4\nu}{4Q_1} I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right) \frac{h}{r} G_+ - 1 \right],$$

$$\sigma_z = \frac{(1-\nu) E \varepsilon_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\alpha \nu}{2Q_1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right) g_2(z) - 1 \right],$$

$$\tau = \frac{\alpha \nu (1-\nu) E \varepsilon_0}{2(1+\nu)(1-2\nu) Q_1} I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right) g_3(z), \quad \varepsilon_0 = \frac{w_0}{h},$$

где

$$g_1(z) = \frac{\alpha p_1(z) - 3q_1(z)/2}{\cos(\alpha/2)(\alpha - 3\sin(\alpha))}, \quad g_2(z) = \frac{\alpha p_1(z) + q_1(z)/2}{\cos(\alpha/2)(\alpha + \sin(\alpha))},$$

$$g_3(z) = -\frac{\alpha p_2(z) + q_2(z)/2}{\sin(\alpha/2)(\alpha + \sin(\alpha))}, \quad q_1(z) = \sin\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{h}\right)\alpha\right) + \sin\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\alpha\right),$$

$$q_2(z) = \cos\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{h}\right)\alpha\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\alpha\right),$$

$$p_1(z) = \frac{z}{h} \cos\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{h}\right)\alpha\right) + \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\alpha\right),$$

$$p_2(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{h}\right)\alpha\right) - \left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\alpha\right).$$

4. Сопоставление с численным решением. Верификация аналитических результатов проводилась с помощью численного решения задачи об осевом сжатии цилиндра при граничных условиях (2.2), (2.3) в трехмерной постановке с использованием программной среды Ansys Workbench 2019. Для

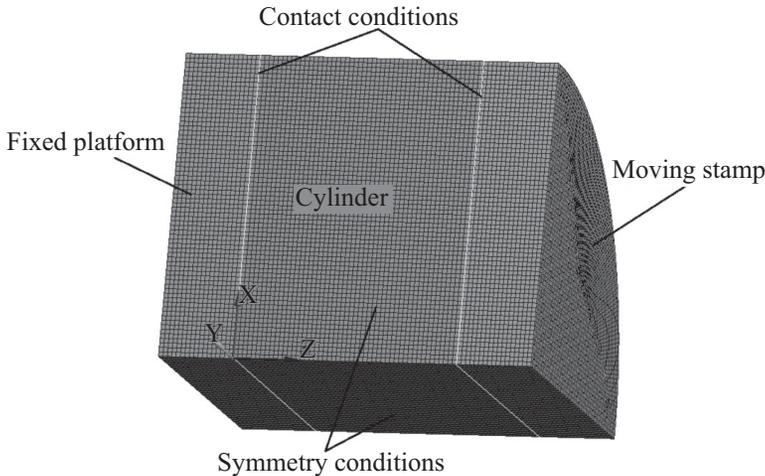


Рис. 2. Конечно-элементная расчетная модель сжатия цилиндра.

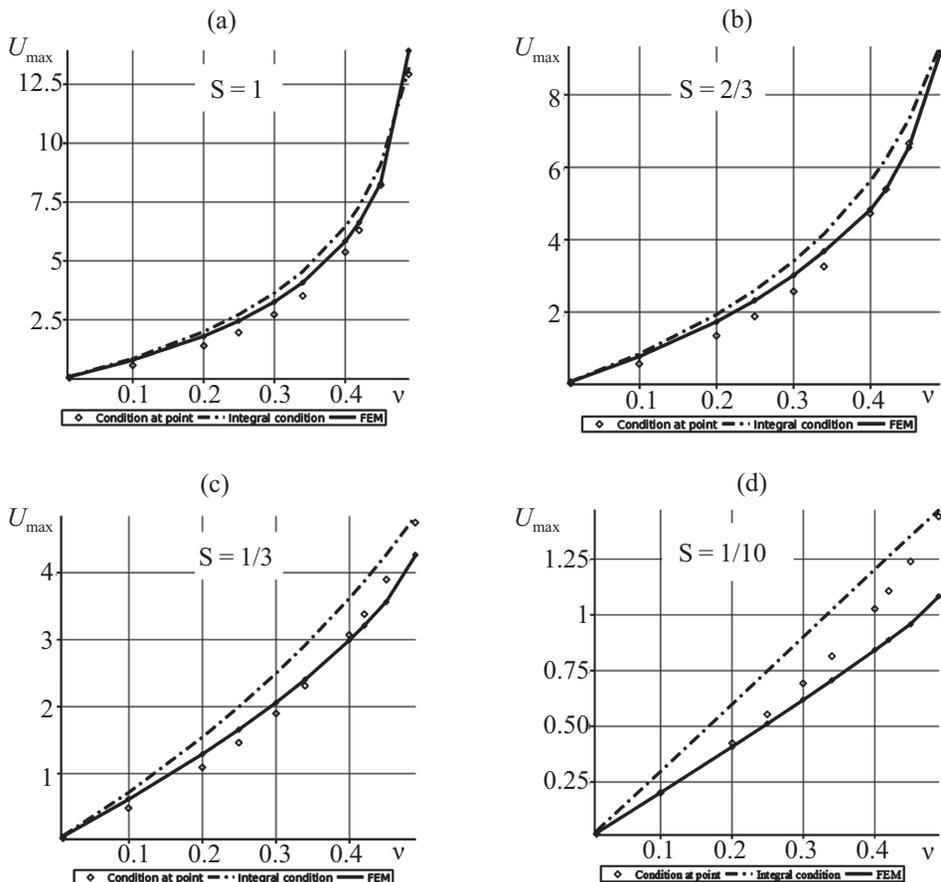


Рис. 3. Зависимость максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра от коэффициента Пуассона и форм-фактора цилиндра.

моделирования расчетной сетки достаточно было, вследствие симметрии, взять только 1/4 часть цилиндра (рис. 2).

Условие симметрии задавалось таким образом, чтобы стороны расчетной модели, лежащие в плоскости yz и xz , не имели перемещений вдоль осей x и y соответственно. Для вычислительной сетки был выбран гексаэдрический элемент второго порядка со средним значением длины ребра 0.25 мм (рис. 2).

Расчеты проводились для цилиндров с четырьмя сочетаниями размеров: $a=20$ мм, $h=10$ мм ($S=1$); $a=20$ мм, $h=15$ мм ($S=2/3$); $a=16$ мм, $h=24$ мм ($S=1/3$) и $a=20$ мм, $h=100$ мм ($S=1/10$), охватывающими достаточно широкий размерный ряд цилиндров, при осевом перемещении подвижного торца $w_0=10$ мкм и разных значениях коэффициента Пуассона: $\nu=0.01, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.34, 0.4, 0.42, 0.45, 0.49$. В качестве сравниваемой величины бралось значение максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра: $u_{max}=u(a, h/2)$. На рис. 3 приведены графики изменения значения

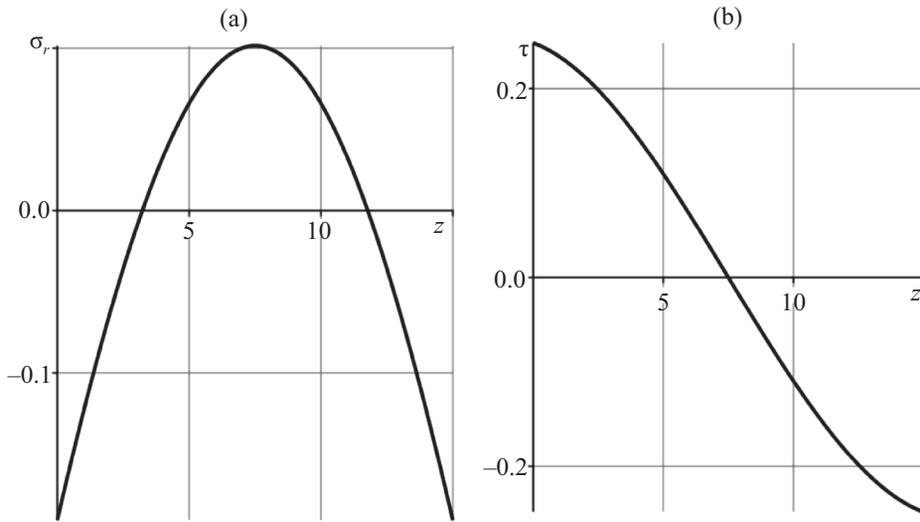


Рис. 4. Распределение напряжений по боковой поверхности цилиндра при интегральном выполнении условий отсутствия напряжений на этой поверхности: (а) – радиальное напряжение, (б) – тангенциальное напряжение.

этого перемещения в мкм в зависимости от коэффициента Пуассона для перечисленных цилиндров. Сплошными линиями на этих графиках показаны значения перемещения, полученные по результатам расчетов МКЭ, штрихпунктирными – при интегральном определении постоянной c_1 , ромбиками – при использовании постоянной c_{11} .

Несмотря на общее согласованное поведение кривых на рис. 3, в результатах аналитического и численного решений остаются довольно заметные отличия при наиболее часто встречающихся значениях коэффициента Пуассона, которые особенно проявляются для длинного цилиндра. Это является следствием приближенного выполнения граничных условий равенства нулю радиальных и тангенциальных напряжений на боковой поверхности цилиндра в аналитическом решении. В качестве иллюстрации на рис. 4 показаны распределения радиального (рис. 4а) и касательного (рис. 4б) напряжений (в МПа) по оси z (в мм) вдоль боковой поверхности цилиндра при характерном значении коэффициента Пуассона $\nu=0.3$ и размерах цилиндра $a=20$ мм, $h=15$ мм при интегральном выполнении граничных условий по напряжениям; модуль упругости материала взят равным 800 МПа.

Отметим, что максимальные по модулю значения этих напряжений в несколько раз меньше приложенного к цилиндру осевого напряжения, пересчитанного через заданное перемещение подвижного торца.

5. Шаг 2. Так как боковая поверхность цилиндра должна быть свободной от радиального и тангенциального напряжений, то показанные на рис. 4 распределения напряжений (невязки) надо компенсировать. Полученные невязки в напряжениях снимаются на втором шаге путем приложения к боковой поверхности цилиндра таких же напряжений, но с противоположным знаком.

Воспользуемся для этого решением задачи о НДС цилиндра при приложении к его боковой поверхности произвольных нормальной и касательной нагрузок, обладающих, соответственно, свойствами симметрии и антисимметрии относительно среднего кругового сечения цилиндра, приведенным в [18].

Следуя [18], представим распределения напряжений по боковой поверхности цилиндра, полученные на первом шаге итерационной процедуры, в форме разложений в тригонометрические ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{2\pi ny}{h}, \quad \tau(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{2\pi ny}{h}, \quad y = z - \frac{h}{2} \\ p_n &= \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(a, y) \cos \frac{2\pi ny}{h} dy, \quad q_n = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau(a, y) \sin \frac{2\pi ny}{h} dy \end{aligned} \quad (5.1)$$

(нулевые слагаемые в этих разложениях отсутствуют вследствие выполнения интегральных условий равенства нулю радиальных и тангенциальных напряжений на боковой поверхности).

Выражение для функции радиального смещения боковой поверхности цилиндра при такой нагрузке имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{II}(a, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos \frac{2\pi n(z - h/2)}{h}, \quad u_n = \frac{a}{2G_0} \frac{(p_n - \delta_n q_n)(1 - m) - m\beta_n q_n \gamma_n}{1 + m(\beta_n^2 \gamma_n - 1)} \\ \delta_n &= \frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)}, \quad \gamma_n = \frac{1}{2}(\delta_n^2 - 1), \quad \beta_n = 2\pi n \frac{a}{h}, \quad G_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad m = \frac{1}{\nu} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отметим, что здесь для расчетов потребовалось модернизировать формулу (4.6) [18] для радиального перемещения введением в числитель и знаменатель параметра δ_n – отношения функций Бесселя, благодаря чему можно не переходить к расчетам модифицированных функций Бесселя по асимптотическим формулам при значениях аргумента, существенно превышающих единицу.

Выражение для функции добавочного осевого перемещения w_{II} при компенсирующем давлении на боковую поверхность цилиндра имеет вид, похожий на (5.2), но представляется рядом по $\sin(2\pi ny/h)$. При этом на торцах цилиндра $w_{II} = 0$, т.е. это решение не создает дополнительных перемещений торцов цилиндра в осевом направлении. В то же время выравнивающий эффект в напряжениях на боковой поверхности сопровождается возникновением добавочных радиальных перемещений, которые, как следует из (5.2), не обращаются в нуль на торцах цилиндра.

6. Шаг 3. Устранение полученной невязки в радиальных перемещениях осуществляется на третьем шаге путем растяжения цилиндра равномерно распределенными по торцам нормальными напряжениями, считая торцы свободными от закреплений. В соответствии с эффектом Пуассона, осевое растяжение не закрепленного по торцам цилиндра сопровождается равномерным сжатием его боковой поверхности. Решение такой задачи приведено во

многих книгах по теории упругости, в частности в [18], и относится к элементарным решениям. При таком нагружении отлично от нуля только осевое напряжение $\sigma_{zIII} = \sigma_0$. Выражения для деформаций в этом случае (индекс III опускаем) имеют вид:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \varepsilon_r = -\nu \frac{\sigma_0}{E}, \quad \gamma_{rz} = 0.$$

А соответствующие им перемещения представимы в форме:

$$w_{III} = \frac{\sigma_0}{E} \left(z - \frac{h}{2} \right), \quad u_{III} = -\nu \frac{\sigma_0}{E} r. \quad (6.1)$$

Отсюда видно, что радиальное перемещение в этом случае не зависит от осевой координаты, т.е. $u_{III}(r, z) = u_{III}(r)$.

Величину растягивающего напряжения σ_0 подберем такой, чтобы сокращение радиального размера цилиндра было равно радиальному перемещению контура торцов цилиндра с противоположным знаком: $u_{III}(a) = -u_{II}(a, 0) = -u_{II}(a, h)$. При этом образуется невязка в осевых перемещениях цилиндра, которая для торца $z = h$ будет равна:

$$w_{III}(h) = \frac{h}{2\nu a} u_{II}(a, h). \quad (6.2)$$

7. Шаг 4. В итоге на четвертом шаге схемы приходим к исходной задаче об осевом сжатии цилиндра, но не на величину w_0 , а на $w_{IV} = w_0 - w_{III}(h)$.

Конкретную реализацию 2–4-го шагов процедуры проиллюстрируем, используя невязки в напряжениях на боковой поверхности цилиндра, изображенные на рис. 4. Аппроксимация этих невязок с помощью разложений (5.1) показывает достаточно быстрое снижение модулей их коэффициентов с ростом номера. Значения этих коэффициентов для первых четырех номеров представлены в таблице.

Таблица 1. Значения коэффициентов разложений компенсирующих нагрузок

n	1	2	3	4
$p_n/\text{МПа}$	0.121	-0.027	0.012	-0.007
$q_n/\text{МПа}$	-0.193	0.083	-0.054	0.04

На рис. 5 показаны функции, отображенные на рис. 4, и их четырехчленные аппроксимации (штриховыми линиями).

Как видно из рис. 5, четырехчленное приближение достаточно близко к полному описанию распределения невязки в радиальном напряжении, и, в интегральном смысле, немного хуже описывает также распределение тангенциального напряжения.

С использованием коэффициентов четырехчленных приближений невязок в напряжениях, по формулам (5.2) было вычислено распределение радиального перемещения вдоль боковой поверхности цилиндра, включая значение

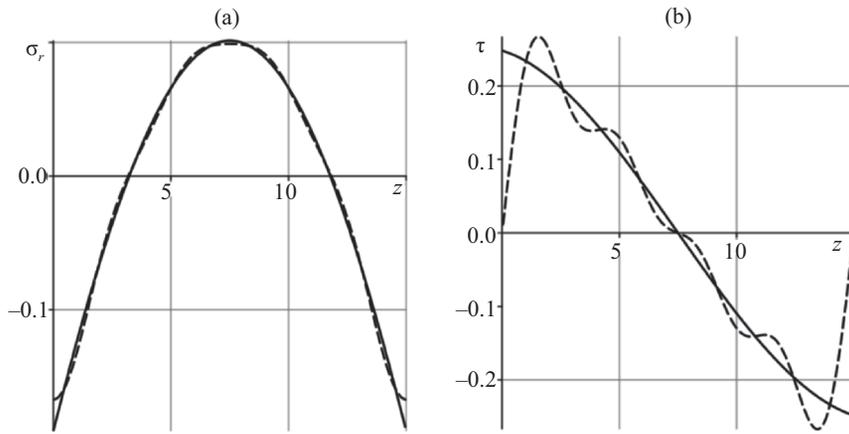


Рис. 5. Аппроксимация невязок в радиальном и тангенциальном напряжениях.

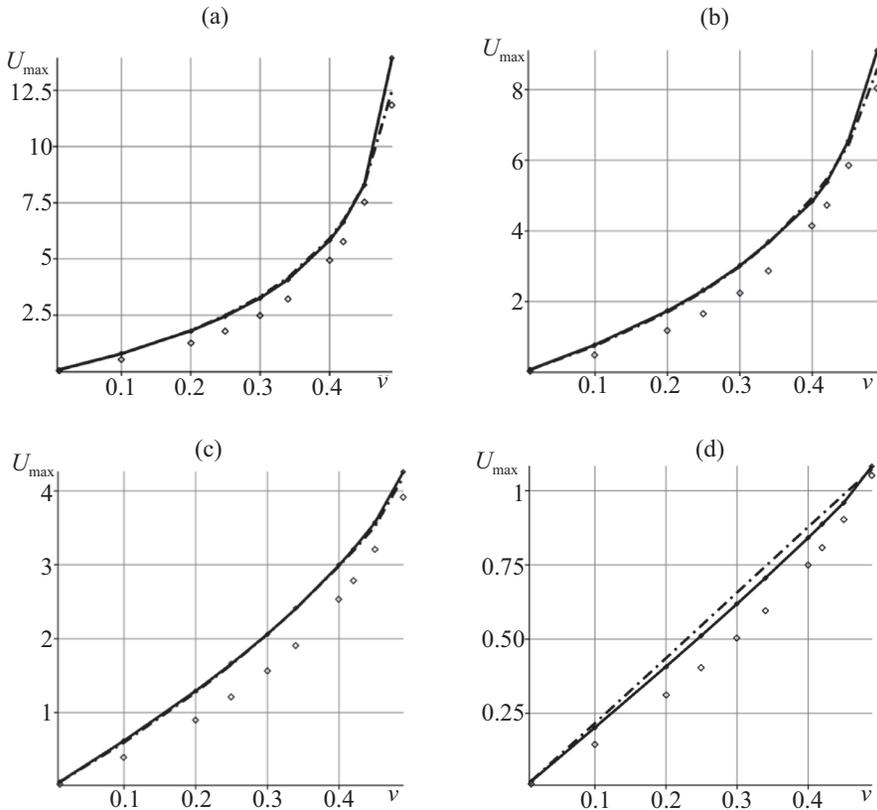


Рис. 6. Зависимость максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра от коэффициента Пуассона и форм-фактора цилиндра после 4-го шага.

на торцах: $u_{II}(a, h) = 1.16$ мкм. Подставляя это значение в формулу (6.2), получим величину невязки в продольном перемещении подвижного торца цилиндра: $w_{III}(h) = 1.45$ мкм. В итоге, на завершающем – четвертом шаге итерационной процедуры приходим к исходной задаче об осевом сжатии цилиндра с радиально закрепленными торцами, но уже не на 10 мкм, а на 8.55 мкм. Результатом решения этой задачи явилось уточненное распределение радиального перемещения в цилиндре со значением в центре боковой поверхности $u_{IV}(a, h/2) = 2.912$ мкм, отличающимся всего на 3.4% от значения 3.014 мкм, полученного МКЭ, в то время как аналогичное значение радиального перемещения из первого приближения (3.405 мкм), отличалось от численного на 13%.

Подобные расчетные операции, выполненные для каждого из перечисленных выше значений коэффициента Пуассона, привели к зависимостям максимального радиального перемещения поверхности цилиндра, представленным на рис. 6 в том же порядке, что и на рис. 3.

При сравнении этих зависимостей с аналогичными зависимостями рис. 3, видно, что неизменными остались положения сплошных линий с точками – результаты расчетов МКЭ, а почти слившиеся с ними штрихпунктирные линии – показывают результаты уточненного аналитического расчета по предлагаемой схеме. Отметим, что особое внимание, уделяемое как можно более точному определению радиального перемещения поверхности цилиндра в центральном сечении, вызвано возможностью использования этого значения для решения обратной задачи нахождения коэффициента Пуассона по измерению максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра при его осевом сжатии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filon L.N.G.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1901. V. 68. № 442–450. P. 147–233. <https://doi.org/10.1098/rsp1.1901.0056>
2. *Sirsat A.V., Padhee S.S.* Analytic solution to isotropic axisymmetric cylinder under surface loadings problem through variational principle // *Acta Mech.* 2024. V. 235. P. 2013–2027. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03825-7>
3. *Pickett G.* Application of the Fourier method to the solution of certain boundary problems in the theory of elasticity // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11. № 3. P. 176–182. <https://doi.org/10.1115/1.4009381>
4. *Прокопов В.К.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра // *Тр. ЛПИ.* 1951. № 2. С. 286–303.
5. *Валов Г.М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // *ПММ.* 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 650–667.
6. *Blair J.M., Veeder J.I.* The elastic deformation of a circular rod of finite length for an axially symmetric end face loading // *J. Appl. Mech.* 1969. V. 36. № 2. P. 241–246. <https://doi.org/10.1115/1.3564615>
7. *Meleshko V.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Eng. Math.* 2003. V. 46. P. 355–376. <https://doi.org/10.1023/A:1025066408575>

8. *Benthem J.P., Minderhoud P.* The problem of the solid cylinder compressed between rough rigid stamps // *Int. J. Solids Struct.* 1972. V. 8. № 8. P. 1027–1042.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90067-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90067-4)
9. *Chau K.T., Wei X.X.* Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I – Analytic solution // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. № 40. P. 5707–5732.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9)
10. *Gent A.N., Lindley P.B.* The compression of bonded rubber blocks // *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1959. V. 173. № 1. P. 111–122.
https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1959_173_022_02
11. *Chalhoub M.S., Kelly J.M.* Analysis of infinite-strip-shape base isolator with elastomer bulk compression // *J. Eng. Mech.* 1991. V. 117. № 8. P. 1791–1805.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:8\(1791\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:8(1791))
12. *Suh J.B., Kelly S.G.* Stress analysis of rubber block under vertical loading // *J. Eng. Mech.* 2012. V. 138. P. 770–783.
13. *Mott P.H., Roland C.M.* Uniaxial deformation of rubber cylinders // *Rubber Chem. Technol.* 1995. V. 68. № 5. P. 739–745.
<https://doi.org/10.5254/1.3538770>
14. *Horton J.M., Tupholme G.E., Gover M.J.C.* Axial loading of bonded rubber blocks // *J. Appl. Mech.* 2002. V. 69. № 6. P. 836–843.
<https://doi.org/10.1115/1.1507769>
15. *Qiao S., Lu N.* Analytical solutions for bonded elastically compressible layers // *Int. J. Solids Struct.* 2015. V. 58. P. 353–365.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.11.018>
16. *Timoshenko S.* Theory of plates and shells. New York-Toronto-London: McGraw Hill Book Comp., 1959. = Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наук. Думка, 1972. 507 с.
17. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.Л.: Изд. АН СССР, 1963. 368 с.
18. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF AXIAL COMPRESSION OF AN ELASTIC CYLINDER WITH SPECIFIED ENDS DISPLACEMENT CONDITIONS

A. L. Popov^{a, b, *}, A. O. Vatulyan^c, D. A. Chelyubeev^a, V. I. Bukhalov^{a, d}

^a*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*National research Moscow state University of civil engineering, Moscow, Russia*

^c*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

^d*A. Lyulka Experimental Design Bureau, subsidiary of PJSC “UEC-UMPO”, Moscow, Russia*

^{*}*E-mail: aovatulyan@srfedu.ru, **e-mail: vlad.bukhalov@yandex.ru*

A new scheme of approximate solution of the problem of axial compression of an elastic cylinder with one movable and the other fixed end with a free lateral surface

is presented, refining the known solution obtained using separation of variables when averaging conditions over stresses on the lateral surface of the cylinder. The refinement is made by successive removal of discrepancies: first, in the stress distributions on the lateral surface of the cylinder, then in the radial displacements along the ends and further in the axial displacement of the movable end. Comparison with the results of numerical solution of the problem by the finite element method for different values of the Poisson ratio and different combinations of overall dimensions of the cylinder showed the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: elastic cylinder, compression, averaging of boundary conditions, approximate solution.

REFERENCES

1. *Filon L.N.G.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*198. 1902. P. 147–233.
<https://doi.org/10.1098/rspl.1901.0056>
2. *Sirsat A.V., Padhee S.S.* Analytic solution to isotropic axisymmetric cylinder under surface loadings problem through variational principle // *Acta Mech.* 2024. V. 235. P. 2013–2027.
<https://doi.org/10.1007/s00707-023-03825-7>
3. *Pickett G.* Application of the Fourier Method to the Solution of Certain Boundary Problems in the Theory of Elasticity // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11. Iss. 3. P. 176–182.
<https://doi.org/10.1115/1.4009381>
4. *Prokopov V.K.* Axisymmetric problem of elasticity theory for an isotropic cylinder // *Trudy LPI.* 1950. № 2. P. 286–303 (in Russian).
5. *Valov G.M.* On the axisymmetric deformation of a solid circular cylinder of finite length // *Mech. of Solids.* 1962. V. 26. Iss. 4. P. 650–667.
6. *Blair J.M., Veeder J.I.* The Elastic Deformation of a Circular Rod of Finite Length for an Axially Symmetric End Face Loading // *J. Appl. Mech.* 1969. V. 36. P. 241–246.
<https://doi.org/10.1115/1.3564615>
7. *Meleshko V.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Eng. Math.* 2003. V. 46. P. 355–376.
<https://doi.org/10.1007/BF00043957>
8. *Bentham J.P., Minderhoud P.* The problem of the solid cylinder compressed between rough rigid stamps // *Int. J. Solids Struct.* 1972. V. 8. P. 1027–1042.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90067-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90067-4)
9. *Chau K.T., Wei X.X.* Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I – Analytic solution // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. P. 5707–5732.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9)
10. *Gent A.N., Lindley P.B.* The compression of bonded rubber blocks // *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1959. V. 173. P. 111–122.
https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1959_173_022_02
11. *Chalhoub M.S., Kelly J.M.* Analysis of infinite-strip-shape base isolator with elastomer bulk compression // *J. Eng. Mech.* 1991. V. 117. P. 1791–1805.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90004-f](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90004-f)
12. *Suh J.B., Kelly S.G.* Stress analysis of rubber block under vertical loading // *J. Eng. Mech.* 2012. V. 138. P. 770–783.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000390](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000390)

13. *Mott P.H., Roland C.M.* Uniaxial Deformation of Rubber Cylinders // Rubber Chem. Technol. 1995. V. 68. P. 739–745.
<https://doi.org/10.5254/1.3538770>
14. *Horton J.M., Tupholme G.E., Gover M.J.C.* Axial loading of bonded rubber blocks // J. Appl. Mech. 2002. V. 69. № 6. P. 836–843.
<https://doi.org/10.1115/1.1507769>
15. *Qiao S., Lu N.* Analytical solutions for bonded elastically compressible layers // Int. J. Solids Struct. 2015. V. 58. P. 353–365.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.11.018>
16. *Timoshenko S.* Theory of plates and shells. New York-Toronto-London: McGraw Hill Book Comp., 1959. = *Timoshenko S.P.* Elasticity theory course. Kuiv: Nauk. dumka. 1972. P. 507
17. *Uflyand Ya.S.* Integral transforms in the problems of elasticity theory. ASUSSR, Moscow, Leningrad. 1963. P. 368 (in Russian).
18. *Lurie A.I.* Spatial problems of elasticity theory. GITTL, Moscow. 1955. P. 491 (in Russian).