ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 2, с. 137–148

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЧЕЗАРО В 3D- И 4D-ТЕОРИЯХ УПРУГОСТИ

© 2025 г. С. А. Лурье[a, b, *], П. А. Белов[a, **]

[a]*Институт прикладной механики РАН, Москва*
[b]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**E-mail: salurie@mail.ru, **e-mail; belovp@andex.ru*

Поступила в редакцию 30.09.2024 г.
После доработки 10.10.2024 г.
Принята к публикации 11.10.2024 г.

Построены обобщенные формулы Чезаро, позволяющие с точностью до квадратичных полиномов определить поле перемещений через интегро-дифференциальные операторы от тензора-девиатора деформаций в 3D- и 4D-теории упругости. Показано, что квадратуры для псевдовектора (псевдотензора в 4D-упругости) локальных поворотов и деформации изменения объема определяются полем девиатора деформаций с точностью до линейных полиномов от координат. Представлены условия существования перечисленных квадратур в форме пяти (девяти для 4D) уравнений совместности третьего дифференциального порядка относительно компонент тензора-девиатора деформаций.

Ключевые слова: кинематическая модель, формулы Чезаро, уравнения совместности, обобщенные уравнения совместности, обобщенные формулы Чезаро

DOI: 10.31857/S1026351925020082, **EDN:** ANLLPE

1. Введение. Классическая проблема построения условий совместности деформаций Сен-Венана, позволяющих восстановить непрерывный вектор перемещений (и поворотов) по заданным деформациям, решена в полной мере путем представления перемещений с помощью формул Чезаро [1, 2]. В работах [3, 4] продолжено изучение кинематической стороны теории упругости, строятся уравнения совместности для многомерной упругой среды, предлагается способ вычисления квадратур Чезаро для плоской нелинейной задачи.

В данной работе показано, что классические уравнения совместности Сен-Венана в 3D- и 4D-упругости могут быть проинтегрированы в квадратурах явно. Под 3D-пространством понимается евклидово пространство, под 4D-пространством – пространство событий (пространство Минковского). Базис 3D-пространства определяется ортами X_i; Y_i; Z_i, базис 4D-пространства определяется ортами X_i; Y_i; Z_i; N_i, где четвертый орт N_i – орт времени. Нормированное время здесь является равноправной координатой, а пространство событий как объект исследования кинематической модели совпадает с линейным вариантом теории гравитации и космологии. В силу общности полученных результатов, построенные кинематические соотношения в линейном варианте и анализ этих соотношений полностью переносятся на гравитацию и космологию. Установлены новые соотношения совместности, дан вывод обобщенных формул Чезаро, показывающих, что поле перемещений с точностью до квадратичного полинома от координат полностью определяется компонентами девиатора деформаций.

2. Уравнения совместности и формулы Чезаро в 3D-упругости. Классические соотношения Коши, как известно, имеют вид:

$$R_{i,j} = \gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/3 - \omega_k Э_{ijk}. \tag{2.1}$$

Здесь R_i – вектор перемещений, $R_{i,j}$ – тензор дисторсии, $\gamma_{ij} = R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/3$ – тензор-девиатор деформаций, $\theta = R_{k,k}$ – деформация изменения объема, $\omega_k = -R_{m,n}Э_{mnk}/2$ – псевдовектор локальных поворотов, δ_{ij} – тензор Кронекера, $Э_{ijk}$ – псевдотензор Леви–Чивиты в 3D.

Проблема построения квадратур соотношений Коши решается формулами Чезаро [5]:

$$R_i = R_i^0 + \omega_m^0(z_n - z_n^0)Э_{mni} + \int_{M_o}^{M_z}\left[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})\right]dx_j, \tag{2.2}$$

которые позволяют получить компоненты вектора перемещения в каждой точке сплошной среды с координатами z_i, по известным вектору перемещений R_i^0 и псевдовектору поворотов ω_m^0, заданным в точке M_0 с координатами z_i^0, и по компонентам тензора деформаций ε_{ij}, известным во всех точках x_i области, занимаемой сплошной средой. Условиями существования квадратур уравнений (2.2) являются классические уравнения совместности Сен-Венана:

$$(\varepsilon_{mn,p}Э_{mpi})_{,q}Э_{nqj} = \varepsilon_{mn,pq}Э_{mpi}Э_{nqj} = 0. \tag{2.3}$$

В работе [6] показано, что для соотношений совместности (2.3) теории упругости можно получить дальнейшие квадратуры, если их разрешить явно относительно $\theta_{,ij}$: $\theta_{,ij} = -\gamma_{ab,ab}\delta_{ij}(3/2) + 3(\gamma_{ia,aj} + \gamma_{ja,ai} - \gamma_{ij,bb})$.

Доказана следующая теорема:

1) Относительное изменение объема θ и псевдовектор поворотов ω_k с точностью до линейных полиномов выражается через тензор-девиатор деформаций γ_{ij}:

$$\omega_k = \omega_k^0 - (\theta_{,s}^0 Э_{jsk}/3)(z_j - z_j^0) -$$
$$- \int_{M_0}^{M_z}\left[(\gamma_{ja,b}Э_{abk})dx_j + (-\gamma_{pc,pc}\delta_{bj}/2 + \gamma_{bp,pj} + \gamma_{jp,pb} - \gamma_{bj,qq})Э_{ibk}/3)(z_i - x_i)\right]dx_j, \tag{2.4}$$

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0(z_i - z_i^0) + 3\int_{M_0}^{M_z}(-\gamma_{ab,ab}\delta_{ij}/2 + \gamma_{ia,aj} + \gamma_{ja,ai} - \gamma_{ij,bb})(z_i - x_i)dx_j, \tag{2.5}$$

где θ^0, θ_i^0 и ω_k^0 являются известными значениями объемной деформации, градиента объемной деформации, $\theta_i^0 = \theta_{,i}^0 = \partial\theta^0/\partial x_i$ и псевдовектора поворотов в точке M_0 с координатами z_i^0.

2) Вектор перемещений записывается через тензор-девиатор деформаций с точностью до квадратичного полинома:

$$R_i = R_i^0 - \omega_k^0 (z_j - z_j^0)Э_{ijk} + \frac{1}{3}\theta^0 (z_i - z_i^0) -$$

$$-\frac{1}{3}\theta_j^0 \left[(z_a - z_a^0)(z_a - z_a^0)\delta_{ij}/2 - (z_i - z_i^0)(z_j - z_j^0) \right] +$$

$$+ \int\limits_{M_0}^{M_z} \left[\gamma_{ij} + (z_a - x_a)Э_{iak}Э_{mbk}\gamma_{jm,b} + \right.$$

$$\left. + P_{ia}(z,x)(\gamma_{cb,cb}\delta_{aj}/2 - \gamma_{ab,bj} - \gamma_{jb,ba} + \Delta\gamma_{aj}) \right] dx_j ,$$

$$P_{ij}(z,x) = (z_a - x_a)(z_a - x_a)\delta_{ij}/2 - (z_i - x_i)(z_j - x_j). \tag{2.6}$$

3) Условиями существования квадратур для деформации изменения объема являются пять уравнений совместности третьего порядка, записанные относительно пяти компонент тензора-девиатора деформаций.

$$-\gamma_{ab,abp}Э_{ipq}/2 + \gamma_{aj,pai}Э_{jpq} - \Delta\gamma_{ij,p}Э_{jpq} = 0. \tag{2.7}$$

Квадратуры (2.6) являются обобщенными соотношениями Чезаро, уточняющими форму представления перемещений по известным деформациям. Вектор перемещений определяется через контурный интеграл, зависящий только от деформаций изменения формы, т.е. от компонент тензора-девиатора деформации (2.6). Это первая квадратура соотношений Коши. Соответственно, вторая и третья квадратуры дают новые представления для псевдовектора локальных поворотов (2.4) и деформации относительного изменения объема (2.5). Неклассические уравнения совместности третьего дифференциального порядка (2.7) являются условиями существования всех трех квадратур.

Зависимости (2.6), полученные исключительно из геометрических соображений, описывают взаимосвязь между вектором перемещений и тензором-девиатором деформаций, которую можно трактовать как эффект, подобный эффекту Пойнтинга [7]. Отметим, что первоначально объяснение эффекта Пойнтинга было дано в рамках нелинейной упругости изотропного тела [8], затем было показано, что для линейной анизотропной упругости возможен линейный эффект Пойнтинга [9], наконец, линейный прямой и обратный эффект Пойнтинга были описаны для микро- и нанотрубок из кубических кристаллов с различным углом хиральности [10].

3. Обобщенные соотношения совместности в 4D-пространстве. Построим новые квадратуры уравнений совместности для пространственно-временного континуума. Система координат 4D-пространства определяется пространственными координатами x_1, x_2, x_3 и четвертой координатой x_4. В качестве четвертой координаты определим нормированное время ($x_4 = ict$, $i = \sqrt{-1}$,

c – нормировочный коэффициент размерности скорости, t– время). Соответственно, 4D-вектор обобщенных смещений R_i определим следующим образом:

$$R_i = r_i + icRN_i \tag{3.1}$$

Здесь первые три компоненты 4D-вектора обобщенных смещений являются традиционными компонентами трехмерного вектора перемещений исследуемой среды: $r_i = R_j(\delta_{ij} - N_i N_J)$, N_i – орт времени, δ_{ij} – тензор Кронекера в 4D-пространстве ($\delta_{ij}\delta_{ij} = 4$), а четвертая компонента равна проекции 4D-вектора перемещения на орт N_i и определяет некоторое обобщенное смещение: $R_i N_i = icR$. Физические трактовки компонент вектора перемещений могут меняться в зависимости от физического смысла 4D континуума.

Отметим, что физические объекты, которые определяются как обобщенные среды – пространственно-временные континуумы (пространства событий) достаточно хорошо известны. Характерным примером является классическая несимметричная теория электромагнетизма, где компоненты обобщенного вектора 4D перемещений в (3.1) определяются пространственными проекциями магнитного 3D-вектор-потенциала и временной проекцией нормированного электрического потенциала. Известны также линейные симметричные модели связных процессов динамической теормоупругости и теплопроводности с симметричным тензором напряжений, сформулированные для пространственно-временного континуума 4D, в котором обобщенный вектор перемещений (см. (3.1)) определяется проекциями вектора пространственных перемещений на пространственные координаты и некоторой проекцией на временную ось – локальным неравномерным временем, производная по времени которого совпадает с энтропией [11, 12]. Другим примером пространственно-временного континуума в четырехмерном пространстве может служить 4D среда со специальной геометрией, где четырехмерное в целом риманово пространство предполагается евклидовым в отношении пространственных координат (3D) и римановым в отношении координаты времени [13, 14]. Такая модель использовалась в недавних работах для описания пространств Римана, вызванных гравитацией. Примером 4D среды является и модель гравитации Эйнштейна и варианты механистической модели гравитации [15–18].

Рассмотрим точечное преобразование пространства событий

$$y_i = x_i + R_i, \ (R_i = r_i + icRN_i), \tag{3.2}$$

где y_i – 4D-координаты деформированного пространства событий, x_i – 4D-координаты недеформированного пространства событий.

Соответствующий преобразованию (3.2) метрический тензор будет иметь вид:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + R_{i,j} + R_{j,i} + R_{k,i}R_{k,j}. \tag{3.3}$$

Десять компонент симметричного метрического тензора g_{ij} (3.3), выражаются через шестнадцать компонент тензора дисторсии $R_{i,j}$

Представления обобщенных соотношений Коши в 4D пространстве и квадратур этих соотношений имеют вид:

$$R_{i,j} = \gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/4 + \omega_{ij} \tag{3.4}$$

$$R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_o}^{M_x} (\gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/4 - \Omega_{ab}\text{Э}_{ijab}/2)dx_j \tag{3.5}$$

где $\gamma_{i,j} = R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/4$ — тензор-девиатор деформации, $\theta = R_{k,k}$ — амплитуда шарового тензора, $\omega_{ij} = R_{i,j}/2 - R_{j,i}/2$ — антисимметричный тензор поворотов, $\Omega_{mn} = -\omega_{ab}\text{Э}_{abmn}/2 = -R_{a,b}\text{Э}_{abmn}/2$ — антисимметричный псевдотензор поворотов, Э_{ijab} — 4D-тензор Леви–Чивиты, антисимметричный по всем индексам; δ_{ij} — тензор Кронекера.

Запишем необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений (3.4), т.е. условия существования квадратур (3.5), называемые уравнениями Папковича:

$$(\gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/4 - \Omega_{ab}\text{Э}_{ijab}/2)_{,k}\text{Э}_{mnjk} = 0 \tag{3.6}$$

Квадратуры для псевдо-поворотов Ω_{mn} получим из (3.6), применяя тот же алгоритм, что и в работе [6]. Используя известное представление для свертки псевдотензоров Леви–Чивиты по одному индексу суммирования, через тензоры Кронекера

$$\text{Э}_{ijab}\text{Э}_{mnjk} = -\left[\delta_{am}(\delta_{bn}\delta_{ik} - \delta_{bk}\delta_{in}) - \delta_{an}(\delta_{bm}\delta_{ik} - \delta_{bk}\delta_{im}) + \delta_{ak}(\delta_{bm}\delta_{in} - \delta_{bn}\delta_{im})\right],$$

приведем уравнения (3.3) к виду:

$$2(\gamma_{ij,k} + \theta_{,k}\delta_{ij}/4)\text{Э}_{mnjk} + \Omega_{mn,i} - \Omega_{mk,k}\delta_{in} - \Omega_{nm,i} + \Omega_{nk,k}\delta_{im} + \Omega_{am,a}\delta_{in} - \Omega_{an,a}\delta_{im} = 0.$$

Сворачивая эти уравнения с δ_{in} или δ_{im}, учитывая, что $\Omega_{ij,j} = 0$, запишем уравнения совместности Папковича в форме, разрешенной относительно первых производных от компонентов псевдотензора Ω_{ij}:

$$\Omega_{ij,k} = (\gamma_{kb,a} + \theta_{,a}\delta_{kb}/4)\text{Э}_{ijab}. \tag{3.7}$$

Интегрируя (3.7) в квадратурах, получим:

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}^0 + \int\limits_{M_o}^{M_x} (\gamma_{kn,m} + \theta_{,m}\delta_{kn}/4)\text{Э}_{ijmn}dx_k. \tag{3.8}$$

Необходимыми и достаточными условиями существования квадратур (3.8) является следующая система уравнений:

$$R_{ijab} = (\gamma_{pn,m} + \theta_{,m}\delta_{pn}/4)_{,q}\text{Э}_{ijmn}\text{Э}_{pqab} = 0, \tag{3.9}$$

где R_{ijab} — тензор Римана–Кристоффеля.

Сворачивая уравнения (3.9) с δ_{ib} или δ_{ja}, получим следующую систему уравнений:

$$R_{ij} = R_{pijq}\delta_{pq} = (\gamma_{ij,q} + \theta_{,q}\delta_{ij}/4)_{,q} - (\gamma_{iq,j} + \theta_{,j}\delta_{iq}/4)_{,q} - (\gamma_{pj,p} + \theta_{,p}\delta_{pj}/4)_{,i} +$$
$$+ (\gamma_{pp,j} + \theta_{,j}\delta_{pp}/4)_{,i} + \delta_{ij}\left((\gamma_{pq,p} + \theta_{,p}\delta_{pq}/4)_{,q} - (\gamma_{pp,q} + \theta_{,q}\delta_{pp}/4)_{,q}\right) = 0, \tag{3.10}$$

где R_{ij} — тензор Риччи.

Свернем (3.10) с δ_{ij} и найдем:

$$R = R_{ij}\delta_{ij} = 2\left[(\gamma_{pq,p} + \theta_{,p}\delta_{pq}/4)_{,q} - (\gamma_{pp,q} + \theta_{,q}\delta_{pp}/4)_{,q}\right] = 0. \quad (3.11)$$

Комбинируя (3.10) и (3.11), получим систему уравнений, называемую в механике сплошной 3D-среды уравнениями совместности Сен-Венана [19]:

$$R_{ij} - R\delta_{ij}/2 =$$
$$= (\gamma_{ij,q} + \theta_{,q}\delta_{ij}/4)_{,q} - (\gamma_{iq,j} + \theta_{,j}\delta_{iq}/4)_{,q} - (\gamma_{pj,p} + \theta_{,p}\delta_{pj}/4)_{,i} + \theta_{,ij}\delta_{pp}/4 = 0. \quad (3.12)$$

Тензор в правой части уравнения (3.12) известен как тензор Эйнштейна [20].

4. Обобщенные формулы Чезаро. Запишем (3.12) в виде алгебраической системы десяти уравнений относительно десяти вторых производных от деформации “изменения объема”:

$$\theta_{,ij} = -2(\Box\gamma_{ij} - \gamma_{iq,jq} - \gamma_{jq,iq} + \gamma_{pq,pq}\delta_{ij}/3). \quad (4.1)$$

Здесь $\Box(...) = (...)_{,kk}$ – оператор Д’Аламбера (оператор Лапласа в 4D).

Проинтегрировав уравнения (4.1) в квадратурах, получим:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0(z_i - z_i^0) - 2\int_{M_o}^{M_x}(z_i - x_i)(\Box\gamma_{ij} - \gamma_{iq,jq} - \gamma_{jq,iq} + \gamma_{pq,pq}\delta_{ij}/3)dx_j. \quad (4.2)$$

Необходимыми и достаточными условиями существования квадратур (4.2) является следующая система уравнений:

$$(\gamma_{ia} - \gamma_{iq,aq} - \gamma_{aq,iq} + \gamma_{pq,pq}\delta_{ia}/3)_{,b}\,Э_{abjk} = 0. \quad (4.3)$$

Соотношения (4.3) в некотором смысле являются предельными – из них не могут быть получены дальнейшие квадратуры. Это уравнение имеет третий порядок и записывается через компоненты тензора-девиатора деформаций. В то же время известные в механике сплошной среды условия интегрируемости (уравнения совместности деформаций Сен-Венана) записываются относительно компонент тензора деформаций и имеют второй порядок.

Покажем, что так же, как и амплитуда шарового тензора θ, псевдотензор Ω_{ij} выражается через γ_{ij} с точностью до линейных полиномов. Действительно, из (3.8) имеем:

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}^0 + \frac{1}{4}\theta_m^0(z_n - z_n^0)Э_{ijmn} + \int_{M_0}^{M_z}\left[\gamma_{kn,m} + (x_n - z_n)\theta_{,mk}/4\right]Э_{ijmn}dx_k.$$

Учитывая (4.1), получим:

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}^0 + \frac{1}{4}\theta_m^0(z_n - z_n^0)Э_{ijmn} +$$
$$+\int_{M_0}^{M_z}\left[\gamma_{kn,m} - (x_n - z_n)(\Box\gamma_{mk} - \gamma_{mq,qk} - \gamma_{kq,qm} + \gamma_{pq,pq}\delta_{mk}/3)/2\right]Э_{ijmn}dx_k. \quad (4.4)$$

Аналогичным образом преобразуем квадратуры для перемещений (3.5):

$$R_i = R_i^0 + \frac{1}{4}\theta^0(z_i - z_i^0) - \frac{1}{2}\Omega_{ab}^0 Э_{abij}(z_j - z_j^0) +$$
$$+\int_{M_0}^{M_z}\left[\gamma_{ij}dx_j - (y_i - z_i)\frac{1}{4}\theta_{,j}dx_j + (y_l - z_l)\frac{1}{2}\Omega_{ab,j}Э_{abil}dx_j\right].$$

Окончательно, проводя интегрирование по частям в слагаемых, содержащие производные от θ и учитывая уравнения (4.1), найдем:

$$R_i = R_i^0 + \frac{1}{2}\Omega_{ab}^0(z_c - z_c^0)Э_{abci} + \frac{1}{4}\theta^0(z_i - z_i^0) + \frac{1}{4}\theta_j^0 P_{ij}(z - z^0) + r_i, \tag{4.5}$$

где введены следующие обозначения:

$$P_{ij}(z - x) = (z_i - x_i)(z_j - x_j) - (z_k - x_k)(z_k - x_k)\delta_{ij}/2, \tag{4.6}$$

$$r_i = \int_{M_0}^{M_z}\left[\gamma_{ij} + (x_n - z_n)\gamma_{jn,i} - (x_m - z_m)\gamma_{ji,m} -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}P_{ia}(z - x)(\Box\gamma_{aj} - \gamma_{aq,qj} - \gamma_{jq,qa} + \gamma_{pq,pq}\delta_{aj}/3)\right]dx_j. \tag{4.7}$$

Таким образом, получены обобщенные формулы Чезаро для пространства событий, позволяющие определить R_i из (4.5)–(4.7), Ω_{ij} из (4.4) и θ из (4.2) через γ_{ij}, причем γ_{ij} должны удовлетворять уравнениям совместности (4.3).

5. Анализ возможных кинематических состояний в 4D пространстве. Приведем анализ обобщенных формул Чезаро (4.6) в 4D пространстве событий с точки зрения классификации физических процессов, определяемых метрическим тензором γ_{ij} (2.7). Сначала рассмотрим кинематическое состояние, в котором отсутствуют все три простейших кинематических состояния: $\gamma_{ij}=0$, $\theta=0$ и $\Omega_{ij}=0$, затем состояния, в которых имеют место два из трех простейших состояний. В завершении рассмотрим три состояния, содержащие только одно из перечисленных простейших кинематическоих состояний.

1. При $\gamma_{ij}=0$, $\theta=0$ и $\Omega_{ij}=0$ перемещения характеризуются постоянным 4-вектором $R_i=R_i^0$. Этому состоянию не соответствует никакого физического процесса, так как для него имеет место постоянный метрический тензор. Выбор $R_i=R_i^0$ определяется субъективизмом при выборе системы координат.

2. При $\gamma_{ij}=0$, $\theta=0$ перемещения являются линейным по координатам 4-вектором $R_i = \Omega_{ab}^0(z_c - z_c^0)Э_{abci}/2$. Это состояние не может соответствовать какому-либо физическому процессу, так как оно определяется постоянным метрическим тензором. Величина $R_i = \Omega_{ab}^0(z_c - z_c^0)Э_{abci}/2$ вновь определяется только субъективизмом исследователя при выборе системы координат.

3. Аналогичными свойствами обладает состояние, при котором $\gamma_{ij}=0$ и $\Omega_{ij}=0$. Для него перемещения являются линейными по координатам $R_i=\theta_0(z_i-z_i^0)/4$. Поэтому метрический тензор вновь является постоянным метрическим тензором. Рассматриваемое кинематическое состояние интересно тем, что величина $R_i=\theta_0(z_i-z_i^0)/4$ расширяет представление "обобщенных смещений как твердого тела" по сравнению с 3D-пространством.

4. При $\theta=0$ и $\Omega_{ij}=0$ перемещения определяют по определению гармоническое поле:

$$R_{k,k} = 0 \quad R_{i,j} - R_{j,i} = 0$$

Этому состоянию соответствует переменный метрический тензор. Следовательно, ему существуют физические процессы, которые не связаны с кинематическими состояниями θ и Ω_{ij}.

5. При $\Omega_{ij}=0$ перемещения являются потенциальным 4-вектором $R_i=Y_i$: $Y_{i,j}-Y_{j,i}=0$. Такие кинематические состояния не содержат антисимметричных деформаций. Так как классическая электродинамика является по существу средой с антисимметричным тензором "деформаций", то рассматриваемое кинематическое состояние условно можно связывать с "неэлектромагнитными взаимодействиями".

6. При $\theta=0$ перемещения являются вихревым 4-вектором $R_i=J_i$: $J_{i,i}=0$. Такие кинематические состояния определяются симметричным тензором-девиатором $\gamma_{ij}\neq 0$ и антисимметричным тензором деформаций $\omega_{ij}\neq 0$ в пространственно-временном континууме. Для рассматриваемого кинематического состояния отсутствует шаровой тензор деформации $\theta=0$. Шаровой тензор деформаций связывают обычно с "сильным" взаимодействиями. Поэтому рассматриваемое кинематическое состояние можно условно назвать "электро-слабыми взаимодействиями".

7. При $\gamma_{ij}=0$ компоненты 4D вектора перемещения (4.5)–(4.7) определяются квадратичным полиномом по кординатам. Этому состоянию соответствует переменный метрический тензор,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{4}(z_i - z_i^0)\theta_j^0 + \frac{1}{4}(z_j - z_j^0)\theta_i^0 + \frac{1}{16}(z_k - z_k^0)(z_k - z_k^0)\theta_i^0\theta_j^0\,,$$

компоненты которого являются квадратичными по координатам функциями. Рассматриваемому процессу для пространственно-временного континуума соответствуют физические процессы, определяемые вектором

$$R_i = \frac{1}{4}\theta_j^0 P_{ij}(z - z^0)\,,$$

связанные исключительно с 4D деформацией изменения объема в фиксированной точке.

Отметим, что в соответствии с обобщенной формулой Чезаро (4.2), при $\gamma_{ij}=0$ изменение объема в некоторой точке пространства пропорционально расстоянию до этой точки, $\theta=\theta^0+\theta_i^0(z_i-z_i^0)$. Это соответствует сути эффекта Хаббла в космологии. В данном случае эффект Хаббла трактуется исключительно как геометрический эффект.

Рассмотрим далее компоненты вектора скорости $R_{i,k}N_k$и вычислим ее пространственные компоненты, проводя свертку с δ^*_{ip};

$$v_p = R_{i,k}N_k\delta^*_{ip} = (\theta^0_j N_j)(z_i - x_i)\delta^*_{ip} - (\theta^0_i \delta^*_{ip})(z_k - x_k)N_k. \qquad (5.1)$$

Предположим, что $\theta^0_a\delta^*_{ia} = 0.$ Тогда с учетом (5.1) найдем

$$v^2 = v_p v_q \delta^*_{pq} = (\theta^0_j N_j)(\theta^0_b N_b)\left[(z_i - x_i)(z_a - x_a)\delta^*_{ia}\right].$$

Из последнего равенства получим следующее выражение для пространственных компонент вектора скорости

$$v = (\theta^0_j N_j)\sqrt{(z_i - x_i)(z_a - x_a)\delta^*_{ia}}.$$

Следовательно, по определению, последнее выражение чисто геометрически определяет закон, описывающий расширение рассматриваемой среды [20]. В космологии такой закон называется эфектом Хаабла. В таком случае величину $H = (\theta_j^0 N_j)$ можно трактовать как постоянную Хаабла. Предположим теперь, что в правой части равенства (5.1) второе слагаемое не равно нулю. Так как величина $(z_k - x_k)N_k$ определяет время, то это слагаемое $(\theta^0_i\delta^*_{ip})(z_k - x_k)N_k$ дает геометрическое доказательство того факта, что эффект расширения среды происходит с постоянным ускорением, что связывается в литературе с наличием темной материи [21].

Заключение. Построены три последовательные квадратуры соотношений Коши в 3D пространстве и 4D пространстве событий: для деформации изменения объема, псевдотензора поворотов и вектора перемещений, записанные только через компоненты тензора-девиатора деформаций. Указанные квадратуры с точностью до полиномов определяются интегро-дифференциальными операторами от компонент тензора-девиатора деформаций. Установлена новая, неклассическая система уравнений совместности третьего дифференциального порядка, которая включает уравнения совместности относительно компонент тензора-девиатора деформаций (пять уравнений в 3D пространстве и девять уравнений в 4D-пространстве событий, так как $\gamma_{ij}\delta_{ij} = 0$). Полученные обобщенные формулы Чезаро получены исключительно из геометрических соображений, отражают свойство сплошности рассматриваемого пространства. Проведен качественный анализ кинематических состояний в пространстве событий. Предложены физические трактовки исследуемых кинематических состояний, в соответствии в которыми, например, вихревая часть поля перемещений определяет кинематику электромагнитных взаимодействий, а потенциальная часть определяет кинематику "сильных" взаимодействий.

Авторы благодарят члена-корр. Е.В. Ломакина за внимательное ознакомление и ценные замечания по тексту статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М.: Наука, 1947.
2. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988. 197 с.
3. *Георгиевский Д.В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщенных кинематических соотношениях Коши // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2014. № 1. 127–134.
4. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium // Russ. J. Math. Phys. 2015. V. 22. P. 6–8.
5. *Cesăro E.* Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Nuovo Cim. 1906. V. 12. P. 143–154.
6. *Лурье С.А., Белов П.А.* Обобщенные формулы Чезаро и уравнения совместности третьего порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2023. № 4. с. 61–64.
http://doi.org/10.55959/msu0579-9368-1-64-4-11
7. *Poynting J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening on loaded wires when twisted // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1909. V. 82. № 557. P. 546–559.
http://doi.org/10.1098/rspa.1909.0059
8. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.М.; Наука, 1980. 512с.
9. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Линейный эффект Пойнтинга при кручении и растяжении криволинейно-анизотропных трубок // Доклады РАН. 2015. Т. 464. № 1. С. 35–38.
http://doi.org/10.7868/S086956521525009X
10. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Эффект Пойнтинга для цилиндрически – анизотропных нано/микротрубок // Физическая механика. 2016. № 1. С. 5–14
11. *Lurie S.A., Belov P.A.* On the nature of the relaxation time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity // Contin. Mech. Thermodyn. 2020. № 32. P. 709–728.
https://doi.org/10.1007/s00161-018-0718-7
12. *Lomakin E.V., Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskiy L.N.* On the generalized heat conduction laws in the reversible thermodynamics of a continuous medium // Doklady Physics. 2018. V. 63. P. 503–507.
https://doi.org/10.1134/S102833581812011X
13. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Spherically symmetric problem of general relativity for a fluid sphere // J. Mod. Phys. 2024. V. 15. № 3. P. 401–415.
https://doi.org/10.4236/jmp.2024.154017
14. *Vasiliev V., Fedorov L.* Spherically symmetric problem of general relativity for an elastic solid sphere // J. Mod. Phys. 2023. V. 14. № 6. P. 818–832.
https://doi.org/10.4236/jmp.2023.146047
15. *Müller W.H., Vilchevskaya E.N., Eremeyev V.A.* Electrodynamics from the viewpoint of modern continuum theory — A review // Z. Angew. Math. Mech. 2023. V. 103. № 3. e202200179.
https://doi.org/10.1002/zamm.202200179
16. *Girifalco, Louis A.* The space–time continuum // The Universal Force: Gravity – Creator of Worlds. Oxford: Oxford Academic, 2007. № 1. P. 188–194.
https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199228966.003.0014

17. *Millette P.A.* Elastodynamics of the Spacetime Continuum: A Spacetime Physics Theory of Gravitation, Electromagnetism and Quantum Physics. New Mexico, USA: American Research Press, 2017. http://ptep-online.com/index files/books.htm
18. *Belov P.A., Lurie S.A.* Mechanistic model of gravitation // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. P. 2240–2250.
https://doi.org/10.1134/S1995080223060094
19. *Sokolnikoff I.S.* Tensor analysis: theory and applications to geometry and mechanics of continua. Wiley, New York: 1964.
20. *Вайнберг С.* Космология. М.: УРСС, 2013. С. 57–59.
21. *Блинников С.И., Долгов А.Д.* Космологическое ускорение // УФН. 2019. Т. 189. № 6. С. 561–602.

GENERALIZED CESARO FORMULAS IN 3D AND 4D ELASTICITY THEORIES

S. A. Lurie[a, b, *], P. A. Belov[a, **]

[a] *Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow*
[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow.*

**E-mail: salurie@mail.ru, **e-mail; belovp@yandex.ru*

Generalized Cesaro formulas are found, allowing to determine the displacement field with an accuracy of up to quadratic polynomials through integro-differential operators from the strain tensor-deviator in 3D elasticity theory and 4D elasticity theory. It is shown that quadratures for the pseudovector (pseudotensor in 4D elasticity) of local rotations and deformation of volume change are determined by the strain deviator field with an accuracy of up to linear polynomials in coordinates. Conditions for the existence of the listed quadratures are presented in the form of five (nine for 4D) third-differential order compatibility equations with respect to the strain tensor-deviator components.

Keywords: kinematic model, Cesaro formulas, compatibility equations, generalized compatibility equations, generalized Cesaro formulas

REFERENCES

1. *Lejbenzon L.S.* Kurs teorii uprugosti [Course in the theory of elasticity]. Moskva, Nauka, 1947. 465 p.
2. *Pobedrya B.E., Sheshenin S.V., Xolmatov T.* Zadacha v napryazheniyax [Problem in stresses]. Tashkent, FAN, 1988. 192 p.
3. *Georgievskij D.V.* Uravneniya sovmestnosti v sistemax, osnovanny`x na obobshhyonny`x kinematicheskix sootnosheniyax Koshi [Compatibility equations in systems based on generalized Cauchy kinematic relations]. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela. 2014. № 1. P. 127–134.

4. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium. Russ. J. Math. Phys. 2015. V. 22. P. 6–8.
5. *Cesăro E.* Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Nuovo Cim. 1906. V. 12. P. 143–154.
6. *Lur`e S.A., Belov P.A.* Obobshhenny`e formuly` Chezaro i uravneniya sovmestnosti tret`ego poryadka [Generalized Cesaro formulas and third-order compatibility equations] // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mechanika. 2023. № 4. P. 61–64.
7. *Poynting J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening on loaded wires when twisted // Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1909. V. 82. № 557. P. 546–559.
8. *Lur`e A.I.* Nelinejnaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moskva, Nauka, 1980. 512 p.
9. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Linear Poynting's effect at torsion and extension of curvilinearly anisotropic tubes // Doklady Physics. 2015. V. 60. № 9. P. 396–399.
10. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Poynting's effect of cylindrically anisotropic nano/microtubes. Physical Mesomechanics, 2016. V. 19. № 3. P. 229–238.
11. *Lurie S.A., Belov P.A.* On the nature of the relaxation time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity // Continuum Mech. Thermodyn. 2020. № 32. P. 709–728.
12. *Lomakin E.V., Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskiy L.N.* On the Generalized Heat Conduction Laws in the Reversible Thermodynamics of a Continuous Medium // Doklady Physics. 2018. V. 63. № 12. P. 503–507.
13. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Spherically Symmetric Problem of General Relativity for a Fluid Sphere // Journal of Modern Physics. 2024. № 15. P. 401–415.
14. *Vasiliev V., Fedorov L.* Spherically Symmetric Problem of General Relativity for an Elastic Solid Sphere // Journal of Modern Physics 2023. № 14. P. 818–832.
15. *Müller W.H., Vilchevskaya E.N., Eremeyev V.A.* Electrodynamics from the viewpoint of modern continuum theory—A review // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2023. V. 103. № 4.
16. *Girifalco Louis A.* The space–time continuum. The Universal Force: Gravity – Creator of Worlds, Oxford Academic. 2007. № 1. P. 188–194.
17. *Millette P.A.* Elastodynamics of the Spacetime Continuum: A Spacetime Physics Theory of Gravitation, Electromagnetism and Quantum Physics. New Mexico, American Research Press, Rehoboth. 2017. 342 p.
18. *Belov P.A, Lurie S.A.* Mechanistic Model of Gravitation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 6. P. 2237–2247.
19. *Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York, Wiley, 1964. 361 p.
20. *Vajnberg C.* Kosmologiya [Cosmology]. Moskva: URSS, 2013. 608 p.
21. *Blinnikov S.I., Dolgov A.D.* Kosmologicheskoe uskorenie [Cosmological acceleration] // UFN. 2019. № 189. P. 561–602