

УДК 539.411.8, 517.927, 519.6

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ У КОЛОННЫ, ОПИРАЕМОЙ НА ПОВОРОТНЫЕ ПРУЖИНЫ, В НЕЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

© 2025 г. В. В. Чистяков^{а,*}, С. М. Соловьев^{а,**}

^аФизико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, г. Санкт-Петербург, Россия
^{*}E-mail: v.chistyakov@mail.ioffe.ru, ^{**}e-mail: serge.soloviev@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

После доработки 03.10.2024 г.

Принята к публикации 03.10.2024 г.

Приводится свободный от традиционных упрощений (неизменные изгибная жесткость и длина) новый метод решения задачи Эйлера–Бернулли глобального продольного изгиба однородной колонны, опираемой поворотными пружинами жесткостей γ_1, γ_2 , Н·м. Метод базируется на естественных ограничениях на восстановленную длину оси. Получена, решена и верифицирована в важных частных случаях система из 3-х алгебраических и 1-го трансцендентного уравнений, связывающая критическое напряжение σ_{cr} с нелинейной диаграммой сжатия $\varepsilon(\sigma)$ материала, гибкостью колонны λ и величинами γ_1, γ_2 . Показано, что колонны одного материала с одинаковыми так называемыми приведенными жесткостями пружин имеют идентичные зависимости $\sigma_{cr}(\lambda)$. Показывается невозможность изгиба колонн с $\lambda \leq \lambda_{\min}(\gamma_1, \gamma_2)$ никакой продольной нагрузкой F для различных типов $\varepsilon(\sigma)$ (Рамберга–Осгуда, рациональная дробь, многочлен и др.).

Ключевые слова: продольный изгиб, поворотная пружина, критическое напряжение, восстановленная длина, минимальная гибкость, приведенная жесткость

DOI: 10.31857/S1026351925020034, EDN: AMWJNP

1. Введение. Задача определения критической нагрузки F_{cr} глобально-го, т.е. не локального продольного изгиба колонны с длиной l_0 , сечением S , минимальным моментом $J_x^{(II)}$ и радиусом i_x инерции II-го порядка и ее пост-критического поведения актуальна как с прикладной точки зрения, так и с фундаментальной – как общая проблема потери устойчивости механической системой.

Случай опирания колонны на две поворотные пружины с жесткостями γ_1 и γ_2 , Н·м, охватывает все или почти все реальные варианты фиксации, от идеальных шарниров ($\gamma_i = 0$) до жестких заделок ($\gamma_i \rightarrow \infty$) неподвижного (А) и подвижного (В) концов.

Традиционно [1–5] продольный изгиб при упругом опирании рассматривается в предположении закона Гука – пропорциональной связи между относительным укорочением ε и напряжением σ для материала колонны и в игнорировании пред-изгибного укорочения колонны ε_{cr} . Парадоксально получается, что из-за сжатия колонна увеличивает свою длину.

Интегрируемое же на отрезке $z \in [0, l_0]$ уравнение изгиба 2-го [1, 2] или 4-го [3–5] порядка для поперечной координаты $y(z)$ при линеаризации принимает обманчивый вид задачи на собственное значение линейного оператора. А она определяет “резонансные” критические значения продольной нагрузки $F_{cr}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ и относительный профиль $y(z)$, включая невозможные так называемые высшие моды с $n = 2, 3, \dots$, именно для этих “резонансов”.

Они возникают, как правило, из условия на равенство нулю определителя матрицы, вытекающей из краевых условий однородной системы линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов при частных решениях линейного дифференциального уравнения [5]. И здесь не обходится без логических противоречий.

Во-первых, при точном равенстве нагрузки критической величине $F = F_{cr}$ изгиба колонны еще не будет. Во-вторых, значения $F > F_{cr}$ не обращают определитель в ноль, и следовательно, дают нулевое решение однородной системы выше. (Учет же пред-изгибного укорочения колонны просто скорректирует “резонансное” значение, но не опишет пост-критическое поведение.) В-третьих, что делать с высшими “гармониками”, которые с точки зрения обращения в ноль определителя ничем не хуже основной.

Не ставя под сомнение все результаты, полученные в рамках традиционного подхода от Эйлера до наших дней, тем не менее остаются актуальными: а) проблема корректной постановки и корректного же решения этой чрезвычайно важной задачи; б) учет ранней нелинейности диаграммы сжатия $\varepsilon(\sigma, P_a)$ у многих инновационных материалов-композитов; в) учет пред-изгибных относительных деформаций ε_{cr} , возможно, порядка нескольких %.

Подход в рамках модели Тимошенко [3] требует также учета сдвиговых деформаций в сечении, возникающих как из-за изгиба оси колонны, так и действия поперечной пары сил реакции в опорах при $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Излагаемый ниже подход позволяет учесть эти деформации последовательным образом как возмущение. Однако, учет касательных напряжений τ , P_a на фоне нелинейных нормальных σ , P_a относится уже к теории пластичности.

2. Управляющее уравнение. На концы колонны действуют осевые силы $\pm F$, поперечные $-\pm N$, и пары $M_A = -\gamma_1 \arctg p_{r1} < 0$ и $M_B = -\gamma_2 \arctg p_{r2} > 0$, ($p_{r1} > 0$, $p_{r2} < 0$ – концевые наклоны оси), связанные соотношением $Nz_B = -M_A - M_B$, z_B – аппликата конца B (рис. 1а).

Из-за наличия пружин осевой наклон p не убывает монотонно с координатой z , но растет от $p_{r1} > 0$ до q_1 в точке перегиба 1, потом, проходя через ноль, убывает до $q_2 < 0$ в точке перегиба 2 и вновь растет до концевого $p_{r2} < 0$ (рис. 1б).

Уравнение равновесия для отсеченной части AZ от неподвижного конца A ($z=0$) до сечения t . $Z(z > 0)$, в котором действует изгибающий момент M_z , есть

$$\frac{J_x^{(II)} y_{zz}'' E_t}{(1 + y_z'^2)^{\frac{3}{2}}} + Fy - \gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} + Nz = 0, \quad y(0) = 0, y(z_B) = 0. \quad (2.1)$$

Фигурирующий в нем так называемый касательный модуль $E_t = d\sigma/d\varepsilon = (d\varepsilon/d\sigma)^{-1}$ определен для величин σ и ε на оси. Стандартной заменой $w = y - (\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} - Nz)/F$ — превышение отклонения y над линией равнодействующей сил F и N , проходящей через точки перегиба (рис. 1б): $y^{(1,p)} = (\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} - Nz)/F$ — уравнение (2.1) преобразуется к виду:

$$\frac{J_x^{(II)} \frac{dp}{dw} \left(p + \frac{N}{F} \right) E_t(p)}{(1 + p^2)^{3/2}} + Fw = 0, \quad w(p_{f1}) = -\frac{\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1}}{F},$$

$$w(p_{f2}) = \frac{\gamma_2 \operatorname{arctg} p_{f2}}{F}. \quad (2.2)$$

Его условное решение, пересчитанное для поперечного смещения $y(p)$:

$$y(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} - Nz}{F} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1}}{F} \right)^2 - \frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_{p_{f1}}^p \frac{\left(p' + \frac{N}{F} \right) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}}, & p_{f1} \leq p \leq q_1, \\ \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} - Nz}{F} + \sqrt{\frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_p^{q_1} \frac{\left(p' + \frac{N}{F} \right) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}}, & q_2 \leq p \leq q_1, \\ \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} - Nz}{F} - \sqrt{\frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_p^{q_1} \frac{\left(p' + \frac{N}{F} \right) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}}, & q_2 \leq p \leq p_{f1} \end{cases} \quad (2.3)$$

с продольной координатой z , определяемой на каждом из промежутков I, II и III (рис. 1б) из рекурсивного соотношения

$$dz = \frac{dy}{p} \Rightarrow z = \int \frac{dy}{p} dp.$$

В частности, в интервале (I) $p_{f1} \leq p \leq q_1$

$$z^{(I)} = \int_{p_{f1}}^p \frac{J_x^{(II)} E_t(\tilde{p}) d\tilde{p}}{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} \right)^2 - 2J_x^{(II)} \int_{p_{f1}}^{\tilde{p}} \frac{(Fp' + N) E_t(p') dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}}} =$$

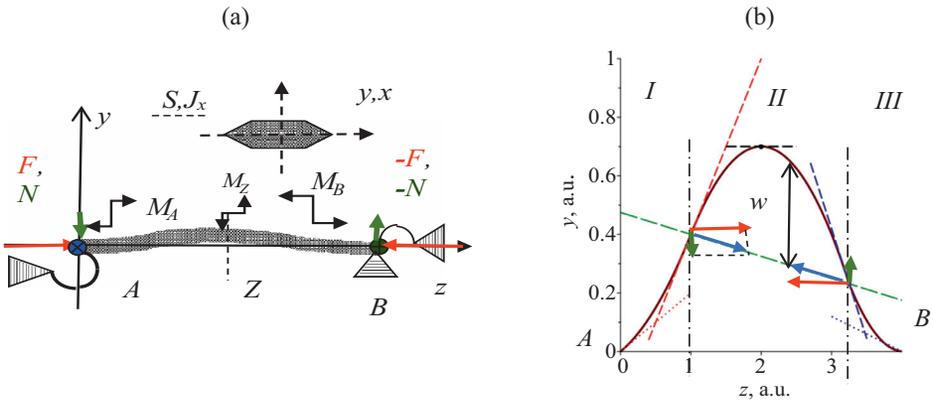


Рис. 1. а) Схема нагружения изогнутой колонны; б) профиль изгиба в шкале отношений: вертикальный черный штрих-пунктир – границы областей выпуклости I, II и III $y(z)$, красные точки – наклон оси p_{f1} в т. А, красный пунктир – наклон q_1 в точке перегиба (т.п.) 1, синие точки – наклон оси p_{f2} в т. В, синий пунктир – наклон q_2 в т.п. 2, зеленый длинный пунктир – линия точек перегиба, горизонт. черный пунктир – касательная в точке максимума отклонения y .

$$\equiv \int_{p_{f1}}^p \frac{J_x^{(II)} E_t(\tilde{p})(1 + \tilde{p}^2)^{-3/2} d\tilde{p}}{\sqrt{2J_x^{(II)} \int_{\tilde{p}}^{q_1} \frac{(Fp' + N) E_t(p') dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}}}. \tag{2.4}$$

В (2.3) помимо неизвестных наклонов p_{f1}, p_{f2}, q_1, q_2 фигурирует также неизвестная сила N .

Аналогичным образом [6, 7] определяется элементарная длина деформированной оси

$$dl = dz(1 + p^2)^{1/2} = \frac{dy}{p}(1 + p^2)^{1/2}$$

и оси восстановленной – $d\Lambda = \frac{dl}{1 - \varepsilon} = \frac{dy}{p} \frac{\sqrt{1 + p^2}}{1 - \varepsilon}$.

3. Система уравнений для неизвестных параметров. Фигурирующие в (2.3) неизвестные наклоны оси $q_{1,2}$ в точках перегиба (рис. 1б), определяются из условий обращения в ноль величин $w(q_1)$ и $w(q_2)$ (2.2) – подкоренного выражения в (2.3) на участке I:

$$w(q_1) = 0 \Leftrightarrow (\gamma_1 \arctg p_{f1})^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{E_t(p'F + N) dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}} \tag{3.1}$$

и аналогично для участка III, если интегрировать с противоположного конца т. В:

$$w(q_2) = 0 \Leftrightarrow (\gamma_2 \operatorname{arctg} p_{f2})^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f2}}^{q_2} \frac{(Fp' + N) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}}. \quad (3.2)$$

Изменение функции $w(p)$ (2.2) между точками перегиба равно нулю:

$$\int_{q_2}^{q_1} \frac{(Fp' + N) E_t(p') dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}} = 0. \quad (3.3)$$

Также сила N связана уравнением баланса внешних пар (рис. 1а):

$$N \left(\int_{p_{f1}}^{q_1} dz^{(I)}(p) + \int_{q_2}^{q_1} dz^{(II)}(p) + \int_{q_2}^{p_{f2}} dz^{(III)}(p) \right) = \gamma_1 \operatorname{arctg} p_{f1} + \gamma_2 \operatorname{arctg} p_{f2}. \quad (3.4)$$

Следующее условие на восстановленную длину оси [6,7] делает полной систему уравнений (3.1)–(3.4):

$$\int d\Lambda = \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-\varepsilon} \frac{dy^{(I)}(p)}{p} + \int_{q_2}^{q_1} \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-\varepsilon} \frac{dy^{(II)}(p)}{p} + \int_{q_2}^{p_{f2}} \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-\varepsilon} \frac{dy^{(III)}(p)}{p} = l_0. \quad (3.5)$$

То есть, подставляя осевое нормальное напряжение

$$\sigma_{ax} = \frac{F}{S\sqrt{1+p^2}}$$

в диаграмму сжатия $\varepsilon_{ax}(\sigma_{ax})$ – согласно закону Рамберга–Осгуда [8], кубическому [6], линейному и т.д. теоретически возможно разрешить эту систему независимых уравнений (3.1)–(3.5) относительно $p_{f1,2}(F)$, $q_{1,2}(F)$, $N(F)$ и подставить в (2.3) для $y(p)$, предварительно выразив продольную координату $z(p)$, и тем самым получить в параметрической форме профиль изгиба под действием закритической нагрузки F .

4. Неизвестные параметры в начале изгиба. В области малых наклонов оси $p \ll 1$ система (3.1)–(3.5) допускает приближенное решение $p_{f1,2}(F)$, $q_{1,2}(F)$, $N(F)$ для последующей подстановки в (2.3) и нахождения формы изгиба $[z(p), y(p)]$ [6, 7].

Прежде стоит отметить, что при $p \ll 1$ величины

$$(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}p^2 = 1 + o(p), \quad E_t(p) = E_t(p^2) = E_t(0) + o(p),$$

$$\operatorname{arctg} p_{f1} \approx p_{f1}, \quad \operatorname{arctg} p_{f2} \approx p_{f2}.$$

Также можно считать, что в начале изгиба аппликата точки В равна предизгибному значению длины:

$$z_B \approx l_0 (1 - \varepsilon_{cr}) = l_0 \left(1 - \varepsilon \left(\frac{F}{S} \right) \right).$$

Тогда поперечная компонента в реакциях опор

$$N \approx \frac{\gamma_1 p_{f1} + \gamma_2 p_{f2}}{l_0 (1 - \varepsilon(F/S))} = \frac{p_{f1}}{l_0 (1 - \varepsilon(F/S))} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \right). \quad (4.1)$$

Из (3.3) следует согласно теореме о среднем в интеграле:

$$\int_{q_2}^{q_1} \frac{(Fp' + N) E_t(p') dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E_t(\tilde{p})}{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{F(q_1^2 - q_2^2)}{2} + N(q_1 - q_2) \right) = 0, \quad q_2 < \tilde{p} < q_1.$$

После сокращения на $q_1 - q_2 \neq 0$ и множитель с $E_t(\tilde{p})$ получается:

$$N \approx -\frac{F(q_1 + q_2)}{2} = -\frac{F p_{f1}}{2} \left(\frac{q_1}{p_{f1}} + \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \cdot \frac{q_2}{p_{f2}} \right). \quad (4.2)$$

Применение той же теоремы в (3.1) и (3.2) с учетом (4.2):

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \arctg p_{f1})^2 &\approx \gamma_1^2 p_{f1}^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{E_t(p'F + N) dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2J_x^{(II)} \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{E_t \left(p'F - F \frac{q_1 + q_2}{2} \right) dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}} \approx J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p}) (q_1^2 - p_{f1}^2 - (q_1 + q_2)(q_1 - p_{f1})) \Rightarrow \\ &\gamma_1^2 p_{f1}^2 \approx J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p}) (q_1 - p_{f1})(p_{f1} - q_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_2 \arctg p_{f2})^2 &\approx \gamma_2^2 p_{f2}^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f2}}^{q_2} \frac{E_t(p'F + N) dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}} = \\ &= 2J_x^{(II)} \int_{p_{f2}}^{q_2} \frac{E_t \left(p'F - F \frac{q_1 + q_2}{2} \right) dp'}{(1 + p'^2)^{3/2}} \approx J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p}) (q_2^2 - p_{f2}^2 - (q_1 + q_2)(q_2 - p_{f2})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_2^2 p_{f2}^2 \approx J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p}) (q_2 - p_{f2})(p_{f2} - q_1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, приравниванием (4.1) и (4.2), а в (4.3) и (4.4) делением обеих частей на $p_{f1}^2 J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p})$ и $p_{f2}^2 J_x^{(II)} FE_t(\tilde{p})$ соответственно получается система

$$\begin{aligned}
 \frac{F \cancel{p_{f1}} \left(\frac{q_1}{p_{f1}} + \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \cdot \frac{q_2}{p_{f2}} \right)}{2} &\approx \frac{\cancel{p_{f1}}}{l_0 (1 - \varepsilon(F/S))} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \right), \\
 \left(\frac{q_1}{p_{f1}} - 1 \right) \left(1 - \frac{q_2}{p_{f2}} \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \right) &\approx \frac{\gamma_1^2}{J_x^{(II)} FE_t}, \\
 \left(\frac{q_2}{p_{f2}} - 1 \right) \left(1 - \frac{q_1/p_{f1}}{p_{f2}/p_{f1}} \right) &\approx \frac{\gamma_2^2}{J_x^{(II)} FE_t}.
 \end{aligned}$$

Предельным переходом

$$\chi_1 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{q_1}{p_{f1}} \geq 1, \quad \chi_2 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{q_2}{p_{f2}} \geq 1, \quad \chi_3 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \leq 0$$

она преобразуется к

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \chi_3}{Fl_0 (1 - \varepsilon(F/S))} + \frac{\chi_1 + \chi_2 \chi_3}{2} &= 0, \\
 (\chi_1 - 1)(1 - \chi_2 \chi_3) &= \frac{\gamma_1^2}{J_x^{(II)} FE_t}, \\
 (\chi_2 - 1) \left(1 - \frac{\chi_1}{\chi_3} \right) &= \frac{\gamma_2^2}{J_x^{(II)} FE_t}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Систему (4.5) через подстановку $\chi_3 \chi_2 = \tau$, $\chi_1 - 1 = \eta$, $\chi_3 - // -$ можно свести к уравнению 4-й степени, которое через резольвентное – 3-й возможно разрешить и, затем подставив результат в исходное 4-й, найти все необходимые величины χ_i , $i = 1, 2, 3$. Однако, громоздкость самого уравнения, резольвентного уравнения, решения этого резольвентного и, наконец, решение исходного делают более предпочтительным численное решение.

Задав сетку значений по величине F_i , $i = 1, 2, \dots, n \gg 1$, можно решением (4.5) сформировать массивы $\{\chi_{1i}, \chi_{2i}, \chi_{3i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ и выразить все наклоны $q_1 = \chi_1 p_{f1}$, $p_{f2} = \chi_3 p_{f1}$, $q_2 = \chi_2 \chi_3 p_{f1}$, подставить в условие на восстановленную длину (3.5) и, разрешив его, получить зависимость $p_{f1}(F)$, через которую – все параметры прогиба.

Однако в действительности закритическое поведение зачастую сопряжено с разрушением колонны, и шест у спортсмена-прыгуна – одно из немногих счастливых исключений. Да и сам изгиб, особенно в случае консоли [9], уже нельзя назвать продольным. Потому несравненно больший интерес представляет сама критическая нагрузка/напряжение $F_{cr} = \sigma_{cr} S$, от которых следует оберегать колонну. В [6, 7] величина F_{cr} определялась через построение уже упомянутого графика наклона $p_f(F)$, имевшего пороговый характер.

5. Соотношения для критического напряжения. Однако значение порога F_{cr}/σ_{cr} можно получить без построения графика $p_i(F)$, но предельным переходом $p_{f1}, p_{f2}, q_1, q_2, N \rightarrow 0$ в соотношениях (3.1)–(3.5).

Восстановленная длина интервала I с учетом (2.4) и (3.1) записывается как

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{dz^{(I)}(p)\sqrt{1+p^2}}{1-\varepsilon} = \\ &= \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{J_x^{(II)} E_t(p) dp \sqrt{1+p^2}}{(1-\varepsilon) \left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2J_x^{(II)} F \int_p^{q_1} \frac{\left(p' - \frac{q_1+q_2}{2}\right) E_t(p') dp'}} = \left| \frac{p = q_1 \tau}{p' = q_1 \tau'} \right| = \\ &= \int_{\frac{p_{f1}}{q_1}}^1 \frac{J_x^{(II)} E_t(q_1 \tau) q_1 d\tau \sqrt{1+(q_1 \tau)^2}}{(1-\varepsilon) \left(1+(q_1 \tau)^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2J_x^{(II)} F \int_{\tau}^1 \left(q_1 \tau' - \frac{q_1+q_2}{2}\right) \left(1+(q_1 \tau')^2\right)^{-\frac{3}{2}} E_t(q_1 \tau') q_1 d\tau'}} = \\ &= \int_{\frac{p_{f1}}{q_1}}^1 \frac{J_x^{(II)} E_t(q_1 \tau) q_1 d\tau \sqrt{1+(q_1 \tau)^2}}{(1-\varepsilon) \left(1+(q_1 \tau)^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{J_x^{(II)} F q_1^2 \left(1-\tau^2 - \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)(1-\tau)\right) \left(1+(q_1 \tau)^2\right)^{-\frac{3}{2}} E_t(q_1 \tau)}} = \\ &= \int \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2 - a(1-\tau)}} = \arcsin \left(\frac{\tau - 0.5a}{1 - 0.5a} \right) + \text{const} \Big| \\ &= \frac{J_x^{(II)} E_t(q_1 \tilde{\tau}) \sqrt{1+(q_1 \tilde{\tau})^2}}{(1-\varepsilon(q_1 \tilde{\tau})) \left(1+(q_1 \tilde{\tau})^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(1+(q_1 \tilde{\tau})^2\right)^{-\frac{3}{2}} J_x^{(II)} F E_t(q_1 \tilde{\tau})}} \arcsin \left(\frac{\tau - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)}{1 - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)} \right) \Big|_{\frac{p_{f1}}{q_1}} \end{aligned}$$

При $p_{f1}, p_{f2}, q_1, q_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\sqrt{J_x^{(II)} E_t}}{(1-\varepsilon)\sqrt{F}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\frac{1}{\chi_1} - 0.5 \left(1 + \frac{\chi_2 \chi_3}{\chi_1}\right)}{\left| 1 - 0.5 \left(1 + \frac{\chi_2 \chi_3}{\chi_1}\right) \right|} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{J_x^{(II)} E_t}}{(1-\varepsilon)\sqrt{F}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{1 - 0.5(\chi_1 + \chi_2 \chi_3)}{0.5(\chi_1 - \chi_2 \chi_3)} \right) \right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Аналогично для участка III, поменяв местами индексы в соотношениях для χ_i , —

$$\Lambda_3 = \left| \begin{array}{l} \chi_1 \leftrightarrow \chi_2 \\ \chi_3 \rightarrow \frac{1}{\chi_3} \end{array} \right| = \frac{\sqrt{J_x^{(II)} E_t}}{(1-\varepsilon)\sqrt{F}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\chi_3 - 0.5(\chi_3\chi_2 + \chi_1)}{0.5(\chi_2\chi_3 - \chi_1)} \right) \right). \quad (5.2)$$

Для среднего участка II между точками перегиба

$$\begin{aligned} dz^{(II)} &= -\frac{J_x^{(II)} E_t}{F} \frac{p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \frac{J_x^{(II)} q_1}{F} \int_p^{q_1} \frac{\left(p' + \frac{N}{F}\right) E_t dp'}{(1+p'^2)^{3/2}}}}, \text{ и} \\ \Lambda_2 &= \int_{q_1}^{q_2} \frac{(1+p^2)^{1/2} dz^{(II)}(p)}{1-\varepsilon} = \\ &= -\sqrt{\frac{J_x^{(II)}}{F}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{E_t dp}{(1-\varepsilon)(1+p^2) \sqrt{2 \int_p^{q_1} (1+p'^2)^{-\frac{3}{2}} \left(p' + \frac{N}{F}\right) E_t dp'}} = \left| \begin{array}{l} p = q_1 \tau \\ p' = q_1 \tau' \\ q_1 > |q_2| \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{J_x^{(II)}}{F}} \int_{\frac{q_2}{q_1}}^1 \frac{E_t d\tau}{(1-\varepsilon)(1+(q_1\tau)^2) \sqrt{\left(1-\tau^2 - \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)(1-\tau)\right) \left(1+(q_1\tilde{\tau})^2\right)^{-\frac{3}{2}} E_t(q_1\tilde{\tau})}} = \\ &= \sqrt{\frac{J_x^{(II)}}{F}} \frac{E_t(q_1\tilde{\tau})}{(1-\varepsilon(q_1\tilde{\tau})) \left(1+(q_1\tilde{\tau})^2\right) \sqrt{E_t(q_1\tilde{\tau}) \left(1+(q_1\tilde{\tau})^2\right)^{-\frac{3}{2}}}} \times \\ &\times \left(\arcsin \left(\frac{1 - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)}{1 - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)} \right) - \arcsin \left(\frac{\frac{q_2}{q_1} - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)}{1 - 0.5 \left(1 + \frac{q_2}{q_1}\right)} \right) \right). \end{aligned}$$

В пределе $p_{fi}, q_i \rightarrow 0$ получаются не зависящая явно от отношений p_{fi} и q_i величина

$$\Lambda_2 = \sqrt{\frac{J_x^{(II)} E_t(F/S)}{F}} \frac{\pi}{(1-\varepsilon(F/S))} \quad (5.3)$$

и предельное выражение (3.5) с учетом (5.1–3) для восстановленной длины изогнутой и сжатой оси:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{J_x^{(II)}}{F}} \frac{\sqrt{E_t(F/S)}}{(1 - \varepsilon(F/S))} \left(2\pi - \arcsin\left(\frac{\chi_3 - 0.5(\chi_1 + \chi_3\chi_2)}{0.5(\chi_3\chi_2 - \chi_1)}\right) - \arcsin\left(\frac{1 - 0.5(\chi_1 + \chi_3\chi_2)}{0.5(\chi_1 - \chi_3\chi_2)}\right) \right) = l_0. \quad (5.4)$$

Заменой $F = \sigma S$, $l_0 = \lambda i_x$ и введением так называемых приведенных жесткостей пружин $\mu_i = \gamma_i / (Si_x)$, $i = 1, 2$ Па с учетом (4.5) получается система уравнений, определяющая зависимость критического напряжения σ от гибкости колонны λ и величин μ_i :

$$\frac{\mu_1 + \mu_2\chi_3}{\sigma\lambda(1 - \varepsilon(\sigma))} + \frac{\chi_1 + \chi_2\chi_3}{2} = 0, \quad (\chi_1 - 1)(1 - \chi_2\chi_3) = \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)},$$

$$(\chi_2 - 1)\left(1 - \frac{\chi_1}{\chi_3}\right) = \frac{\mu_2^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1 - \varepsilon(\sigma))}} \left(2\pi - \arcsin\left(\frac{\chi_3 - 0.5(\chi_1 + \chi_3\chi_2)}{0.5(\chi_2\chi_3 - \chi_1)}\right) - \arcsin\left(\frac{1 - 0.5(\chi_1 + \chi_2\chi_3)}{0.5(\chi_1 - \chi_2\chi_3)}\right) \right) \left(E_t = \left(\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\right)^{-1} \right). \quad (5.5)$$

Как уже отмечалось ранее, подсистему из 3-х алгебраических уравнений (5.5) возможно решить через громоздкое уравнение 4-й степени относительно $\tau = \chi_2\chi_3 < 0$. Потому разумнее рассмотреть негромоздкие частные случаи и подыскать малый параметр для приближенного общего решения.

Но уже без решения (5.5) видно то, что при одинаковых приведенных жесткостях пружин μ_n , $n = 1, 2$ у двух геометрически различающихся колонн из одного материала зависимости критических напряжений от гибкости $\sigma(\lambda)$ будут идентичными. При одном и том же конечном наклоне оси $p_{f1} \ll 1$ идентичны будут и ключевые параметры изгиба в самом его начале: $q_1 = \chi_1 p_{f1}$, $p_{f2} = \chi_3 p_{f1}$, $q_2 = \chi_2 \chi_3 p_{f1}$ и отношение $N/F = -0.5(\chi_1 + \chi_2\chi_3) p_{f1}$.

6. Случай равных жесткостей пружин. В этом важном случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$). Поперечная реакция N отсутствует, и сдвиговые деформации в сечении будут минимальны. Изгиб симметричен – предельные соотношения наклонов оси суть $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $\chi_3 = -1$, и (5.5) имеет решение:

$$\chi^2 - 1 = \frac{\mu^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1 - \varepsilon(\sigma))}} \left(\pi - \arcsin\left(1 + \frac{\mu^2}{\sigma E_t(\sigma)}\right)^{-1/2} \right),$$

или:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1 - \varepsilon(\sigma))}} \left(\pi - \arctg\left(\frac{\sqrt{\sigma E_t(\sigma)}}{\mu}\right) \right), \quad \mu = \frac{\gamma}{Si_x}. \quad (6.1)$$

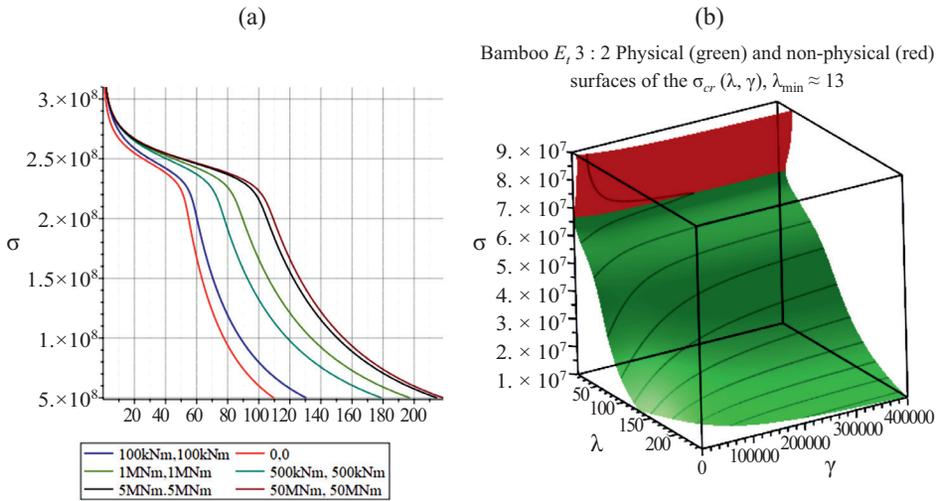


Рис. 2. а) Зависимость $\sigma_{cr}(\lambda)$, Па (6.1) для двутавра $S=51.3 \text{ см}^2$, $i_x=3.6 \text{ см}$, сплав Al 6061 T6 [10] для одинаковых жесткостей пружин в диапазоне $\gamma=0-50 \text{ МН} \cdot \text{м}$; б) 3d-график $\sigma_{cr}(\lambda, \gamma)$ для бамбуковых колонн $100 \times 100 \times 20$ [11], зеленым – физический лист, красным – нефизический.

Примененное к двутавру ($S=51.3 \text{ см}^2$, $i_x=3.6 \text{ см}$) из алюминиевого сплава Al 6061 T6 [10], формула (6.1) задает семейство линий (рис. 2а) при жесткостях γ от 0 до 50 МН·м. Или же для прямоугольно-трубчатых клееных бамбуковых колонн $100 \times 100 \times 20$ (рис. 2б) [11] – поверхность на 3d-графике. В первом случае использовалась инженерная диаграмма Рамберга–Осгуда, во втором – касательный модуль $E_t(\sigma)$ моделировался рациональной дробью 3:2 регрессией на опытных данных, а сама диаграмма $\varepsilon(\sigma)$ – интегрированием $1/E_t(\sigma)$.

Видно из графиков: 1) для крайних значений жесткости $\gamma=0$ и 50 МН·м, для колонн из сплава при каждом значении напряжения σ , Па соответствующие гибкости λ отличаются в 2 раза, как это и должно быть для случаев идеальных шарниров и жестких заделок; 2) при любой жесткости γ существует минимальная гибкость $\lambda_{\min}(\gamma)$, при которой колонна не выгибается ни при какой продольной нагрузке; 3) над линией $\lambda=\lambda_{\min}(\gamma)$ смыкаются физические и нефизические листы (рис. 2б), имевшие место для всех видов испытанных диаграмм, включая идеальный случай закона Гука; 4) относительный прирост сопротивления за счет пружин больше у длинных колонн, и он исчезает по мере приближения к минимальному значению гибкости λ_{\min} ; 5) этот выигрыш быстро выходит на насыщение уже при жесткостях $\gamma \sim 5 \text{ МН} \cdot \text{м}$ для сплава и $\gamma \sim 300-400 \text{ кН} \cdot \text{м}$ для дерева.

Величина гибкости λ в (6.1) имеет минимум при критическом напряжении $\sigma(\gamma)$, получаемом из условия

$$\frac{d \ln \lambda}{d \sigma} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2E_t(\sigma)} \frac{dE_t(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{E_t(\sigma)(1-\varepsilon(\sigma))} - \quad (6.2)$$

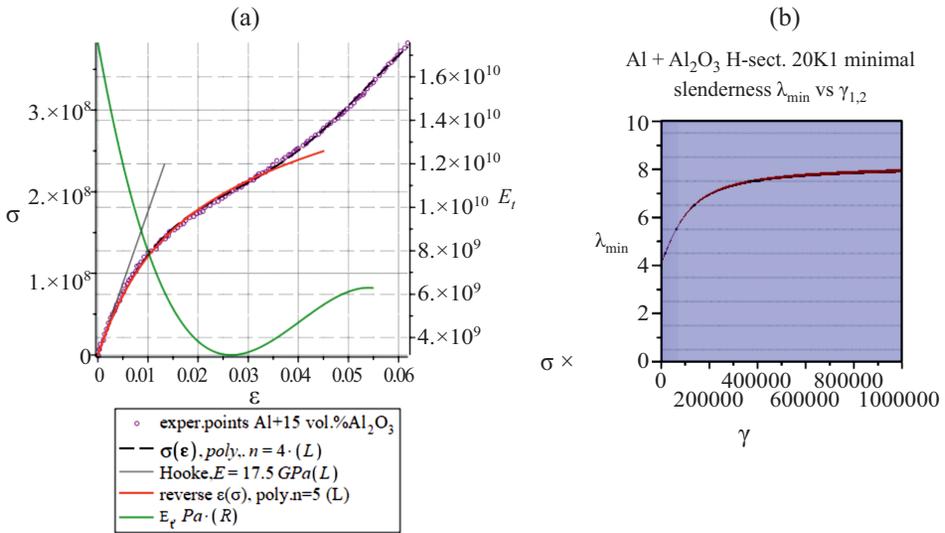


Рис. 3. а) Диаграмма сжатия композита Al + 15% Al₂O₃; кружки – экспериментальные точки [12], черный пунктир – $\sigma(\epsilon)$, Па многочлен 4-го порядка, серый сплошной – закон Гука, $E = 17.5$ GPa(L); красный – зависимость $\epsilon(\sigma)$ многочлен 5-го порядка, зеленый (прав.) – касательный модуль упругости E_t , Па; б) минимальная гибкость как функция жесткости одинаковых пружин γ , Н·м для двутавра 20К1 из композита.

$$-\frac{\sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} + \sqrt{\frac{\sigma}{E_t(\sigma)}} \frac{dE_t(\sigma)}{d\sigma}}{2\mu \left(\pi - \arctg \left(\frac{\sqrt{\sigma E_t(\sigma)}}{\mu} \right) \right) \left(1 + \frac{\sigma E_t(\sigma)}{\mu^2} \right)} = 0.$$

(Физический и нефизический листы графика, вероятно, свидетельствуют о теоретической возможности бифуркации формы изгиба, реально неосуществимой.)

Так, для композита 85 вес.% Al + 15 вес.% Al₂O₃ экспериментальная диаграмма сжатия $\sigma(\epsilon)$ [12] идеально ($\text{adj-R}^2 = 0.999$) интерполировалась многочленом 4-й степени по относительной деформации ϵ , а обратная зависимость $\epsilon(\sigma)$ – хорошо многочленом 5-й степени по напряжению σ вплоть до точки перегиба $\epsilon_{pr} = 0.0265$ (условный предел текучести) (рис. 3а). Пропорциональный участок у диаграммы достаточно узок $\epsilon_{pr} < 0.003$, и касательный модуль упругости E_t быстро падает в >4 раза на отрезке от $[0, \epsilon_{pr}]$ за которым имеется зона упрочнения. С определенными оговорками можно назвать этот композит “без-гуковским” по аналогии с без-омическими варисторами в электронике. И применение закона Гука для получения зависимостей $\sigma(\lambda, \gamma)$ здесь будет грубым приближением.

Построением в одних осях 3d-графиков: $\lambda(\gamma, \sigma)$ по формуле (6.1) и цилиндрической поверхности $d \ln \lambda / d\sigma = 0$ – по (6.2) для так называемого колонного

двутавра 20K1 ($S = 52.69 \text{ см}^2$, $i_x = 4.99 \text{ см}$) из вышеописанного композита и проектированием линии их пересечения на плоскость ($O\gamma l\lambda$) – получается кривая для $\lambda_{\min}(\gamma)$. (рис. 3б, красн. лин.). Примечательно, что в отсутствие пружин ($\gamma_{1,2} = 0$) минимальная гибкость близка к чисто умозрительному значению $\lambda_{\min}^{\text{Hookе}} = 0.75\sqrt{3}\pi \approx 8.16$, получающемуся из (6.2) для идеальной гуковской диаграммы сжатия при $\gamma(\mu) = 0$ и предельном напряжении $\sigma = E_0/3$ (треть от модуля Юнга!). При росте жесткости пружин кривая $\lambda_{\min}(\gamma)$ выходит монотонно на примерно вдвое большее значение, как и должно быть в случае жесткой заделки концов.

Величина λ_{\min} представляет ценность как максимальная длина в радиусах инерции i_x образца для корректного снятия диаграммы сжатия материала. Расчеты показывают (рис. 3б), что наилучшее закрепление образца – жесткая заделка обоих концов. При этом для $i_x \sim 5 \text{ см}$ (20K1) длина образца $l_0 \sim 40 \text{ см}$, и никакое продольное усилие не приведет к изгибу.

Также проектирование негибких колонн (stubs) должно вестись с учетом λ_{\min} .

7. Шарнир + пружина. Этот несимметричный случай $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$, также допускает точное решение (5.5). Очевидно, $\chi_2 = 1$, и система просто решается

$$\chi_1 = -\frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} + \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}\right)^2 + \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}},$$

$$\chi_3 = -\frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} - \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}\right)^2 + \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}}.$$

Подстановка в выражение для гибкости λ дает уравнение, в неявном виде определяющее зависимость $\sigma(\lambda, \mu_1)$:

$$\lambda = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1-\varepsilon(\sigma))}} \times \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \left(\left(1 + \frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} \right) \left(\left(1 + \frac{\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} \right)^2 + \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)} \right)^{-1/2} \right) \right), \quad (7.1)$$

которое преобразуется к более удобному для вычислений виду

$$\lambda = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1-\varepsilon(\sigma))}} \left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \left(\frac{\sqrt{\sigma E_t(\sigma)}}{\mu_1} + \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \frac{1}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} \right) \right). \quad (7.2)$$

Предельным переходом $\mu_1 \rightarrow 0$ получается опирание колонны на два идеальных шарнира:

$$\lambda = \frac{\pi\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1-\varepsilon(\sigma))}}.$$

В случае же $\mu_1 \rightarrow \infty$ (идеальный шарнир + жесткая заделка) (7.2) переходит в

$$\lambda = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1-\varepsilon(\sigma))}} \left(\frac{3\pi}{2} - \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \frac{1}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} \right) \right), \quad (7.3)$$

разрешаемое относительно комбинации

$$\psi = \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \frac{1}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}$$

в трансцендентном уравнении

$$\psi \left(\frac{3\pi}{2} - \text{arctg} \psi \right) = 1 \Rightarrow \psi_0 = 0.2225481584.$$

Таким образом, функция $\lambda(\sigma)$ имеет вид

$$\lambda = \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \frac{1}{\psi(-\varepsilon(\sigma))} = \frac{4\,493\,409\,459}{-\varepsilon(\sigma)} \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \quad (7.4)$$

Численные расчеты для двутавра 20К1 с диаграммами сжатия $\varepsilon(\sigma)$ – полиномиальной $n=5$ (рис. 3а) и подчиняющейся закону Гука $\sigma = E_0\varepsilon$ – дают резко отличающиеся кривые (рис. 4а) вплоть до значений гибкости $\lambda \sim 100$ (~5 м). Следовательно, необходим точный учет $\varepsilon(\sigma)$: в подобных материалах: эйлеровское приближение абсолютно бесполезно.

Тем не менее при $\varepsilon = \sigma/E_0$ в пренебрежении критическим укорочением получается

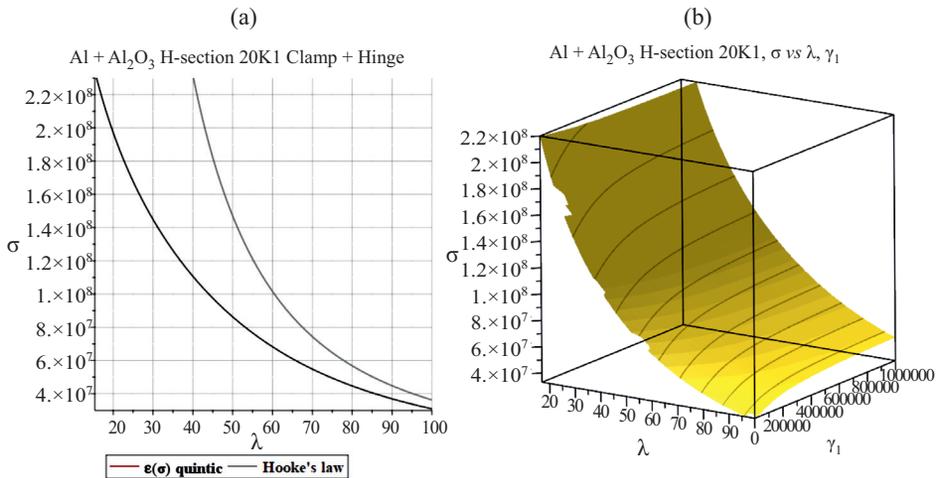


Рис. 4. а) Зависимости $\sigma(\lambda)$, Па (7.4) для опирания колонны на идеальный шарнир и жесткую заделку для линейной (сер.) и полиномиальной $n=5$ (черн.) диаграмм сжатия, двутавр 20К1, Al + 15% Al₂O₃; б) зависимость σ , Па, от λ , γ_1 , Н·м (8.3) для того же профиля.

$$\sigma_{cr} = \frac{20.2E_0}{\lambda^2} \Rightarrow F_{cr} = \frac{20.2J_x^{(II)}E_0}{l_0^2} \approx 2.046 \frac{\pi^2 J_x^{(II)}E_0}{l_0^2},$$

и коэффициент длины

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2.046}} \approx 0.699 \approx 0.7$$

совпадает с принятым значением.

8. Жесткая заделка + пружина. Полагаем $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \rightarrow \infty$. В этом случае $\chi_3 = p_{f2}/p_{f1} \rightarrow 0$, $\chi_2 = q_2/p_{f2} \rightarrow \infty$. Однако будут конечными пределы

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} (\mu_2 \chi_3) = \omega = \mu_1 M_2/M_1 < 0 \text{ (рис. 1a) и } \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \chi_2 \chi_3 = \tau < 0.$$

Алгебраические уравнения в (5.5) в пределе примут вид

$$(a) \frac{\mu_1 + \omega}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} + \frac{\chi_1 + \tau}{2} = 0,$$

$$(b) \chi_3 (\chi_2 - 1) (\chi_3 - \chi_1) = \frac{\mu_2^2 \chi_3^2}{\sigma E_t(\sigma)} \Rightarrow \tau \chi_1 = -\frac{\omega^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \quad (8.1)$$

$$(c) (\chi_1 - 1)(1 - \tau) = \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)} \Rightarrow \chi_1 + \tau = \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)} + 1 - \frac{\omega^2}{\sigma E_t(\sigma)}.$$

Выразив из уравнений (8.1a) и (8.1c) сумму $\chi_1 + \tau$ через неизвестную ω , получим с учетом (8.1b) для произведения $-\tau \chi_1$ — уравнение для ее (ω) нахождения:

$$\omega^2 - 2\omega \left(\frac{E_t(\sigma)}{\lambda(1 - \varepsilon(\sigma))} \right) - \sigma E_t(\sigma) - \mu_1^2 - \frac{2\mu_1 E_t}{\lambda(1 - \varepsilon(\sigma))} = 0.$$

$$\text{Нужный корень здесь } \omega_1 = \frac{E_t(\sigma)}{\lambda(1 - \varepsilon(\sigma))} - \sqrt{\left(\frac{E_t(\sigma)}{\lambda(1 - \varepsilon(\sigma))} + \mu_1 \right)^2 + \sigma E_t(\sigma)} < 0.$$

А неизвестные τ и χ_1 суть отрицательный и положительный корни квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} w^2 + 2 \left(\frac{\mu_1 + \omega_1}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} \right) w - \frac{\omega_1^2}{\sigma E_t(\sigma)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = -\frac{\mu_1 + \omega_1}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} + \sqrt{\left(\frac{\mu_1 + \omega_1}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} \right)^2 + \frac{\omega_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}}, \\ \chi_2 \chi_3 = -\frac{\mu_1 + \omega_1}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} - \sqrt{\left(\frac{\mu_1 + \omega_1}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} \right)^2 + \frac{\omega_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}}. \end{cases} \quad (8.2) \end{aligned}$$

Выразив из (8.2) аргументы арксинусов в (5.5), получим итоговое уравнение для нахождения взаимосвязи между величинами σ , λ и μ_1 :

$$\begin{aligned}
 Q = \mu_1 + \omega_1 = \mu_1 + \frac{E_t(\sigma)}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} - \sqrt{\left(\frac{E_t(\sigma)}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} + \mu_1\right)^2 + \sigma E_t(\sigma)}, \lambda = \\
 = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1-\varepsilon(\sigma))}} \left(2\pi - \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{E_t(\sigma)} \lambda^2 (1-\varepsilon(\sigma))^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{Q}\right)^2}} \right] - \right. \\
 \left. - \arcsin \left[-\frac{1 + \frac{\sigma \lambda (1-\varepsilon(\sigma))}{Q}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{E_t(\sigma)} (\lambda(1-\varepsilon(\sigma)))^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{Q}\right)^2}} \right] \right). \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

Численное моделирование (8.3) для двутавра 20К1 из композита алюминий+трехокись алюминия дает поверхность, λ -сечения которой демонстрируют значительный рост критического напряжения σ , Па с коэффициентом жесткости пружины $\gamma_1, \text{H} \cdot \text{м}$ (рис. 4б). (“Обгрызанный” край поверхности – воспроизведен (рис. 4а) – вероятно связан с микроскопическим превышением аргумента арксинуса над единицей из-за накопления ошибок при объемном численном разрешении (Maple 2023) громоздкого уравнения (8.3) для графической 3d-реализации функции 2-х переменных.)

В пределе $\mu_1 \rightarrow 0$ получается эквивалентное (7.3) уравнение (один арксинус при этом отнимает $\pi/2$) для той же группы

$$\psi = \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \frac{1}{\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}$$

и точно такое же решение (7.4).

9. Общий случай ограниченных жесткостей. Система (5.5) также может быть разрешена в общем случае через сходящийся ряд по назначенному малому параметру. Таким параметром может быть

$$\xi = \max \left\{ \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \frac{\mu_2^2}{\sigma E_t(\sigma)} \right\} \ll 1.$$

В этом случае в нулевом приближении $\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)} = 1$. Тогда из 1-го уравнения (5.5)

$$\frac{2\mu_1 + 2\mu_2 \chi_3^{(0)}}{\sigma \lambda (1-\varepsilon(\sigma))} + \chi_1^{(0)} + \chi_2^{(0)} \chi_3^{(0)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_3^{(0)} = -\frac{1 + \frac{2\mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}}{1 + \frac{2\mu_2}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))}} = -1 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + 2\mu_2}.$$

Подстановка далее $\chi_i^{(1)} = \chi_i^{(0)} + \delta_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$ дает линейную систему

$$\frac{\mu_2\delta_3}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} + \frac{\delta_1 + \delta_2\chi_3^{(0)} + \delta_3}{2} = 0, \quad \delta_1(1 - \chi_3^{(0)}) = \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)},$$

$$\delta_2 \left(1 - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \right) = \frac{\mu_2^2}{\sigma E_t(\sigma)},$$

решение которой дает 1-е приближение по ξ :

$$\chi_1^{(1)} = 1 + \frac{\mu_1^2}{2\sigma E_t(\sigma)} \times \left(1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + \mu_1 + \mu_2} \right),$$

$$\chi_2 = 1 + \frac{\mu_2^2}{2\sigma E_t(\sigma)} \times \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + \mu_1 + \mu_2} \right),$$

$$\chi_3^{(1)} = -1 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + 2\mu_2} + 2\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) \times$$

$$\times \frac{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + (\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)))^2(\mu_2^2 - \mu_1^2)}{E_t(\sigma)(\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + \mu_1 + \mu_2)(\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma)) + 2\mu_2)^2}. \quad (9.1)$$

Аналогично находятся поправки 2-го порядка $\delta_1^{(2)}$, $\delta_2^{(2)}$, $\delta_3^{(2)}$ решением линейной системы

$$\delta_1^{(2)} + \chi_3^{(0)}\delta_2^{(2)} + \delta_3^{(2)} \left(1 + \frac{2\mu_2}{\sigma\lambda(1-\varepsilon(\sigma))} \right) = -\delta_2^{(1)}\delta_3^{(1)},$$

$$\delta_1^{(2)}(1 - \chi_3^{(0)}) = \delta_1^{(1)}(\delta_3^{(1)} + \chi_3^{(0)}\delta_2^{(1)}), \quad (9.2)$$

$$\delta_2^{(2)}(\chi_3^{(0)} - 1) = \delta_2^{(1)}(\delta_1^{(1)} - \delta_3^{(1)}) + \frac{\mu_2^2\delta_3^{(1)}}{\sigma E_t(\sigma)}.$$

Подстановка полученных результатов в ключевую формулу для λ в (5.5) и последующее численное моделирование дает хорошие результаты для коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2 \leq 200\,000 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Здесь мерилom точности служили точно решаемые частные случаи равных жесткостей ($\gamma_1 = \gamma_2$) и шарнир + пружина ($\gamma_2 = 0$) (рис. 5а). В первом случае “гребень” – проекция линии пересечения поверхности $\sigma(\gamma_1, \gamma_2)$ при заданном значении $\lambda = 50$ и биссекториальной плоскости

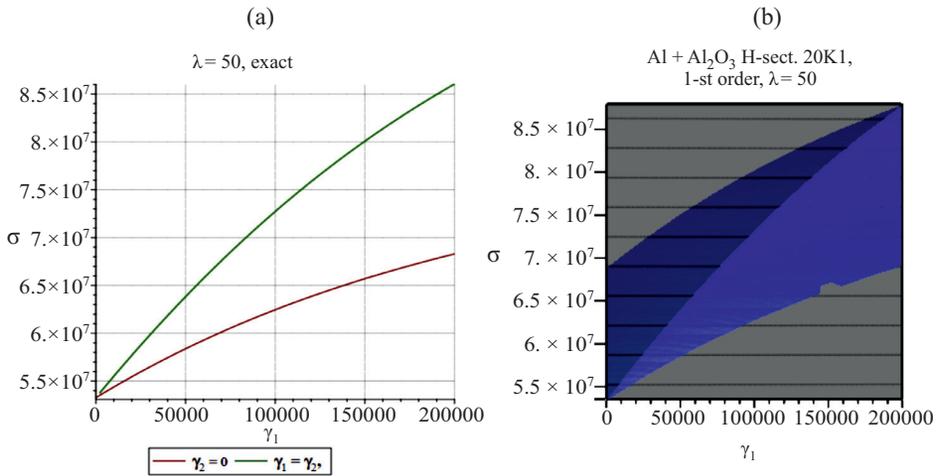


Рис. 5. а) Кривые $\sigma(\gamma_1 = \gamma_2, \text{Н} \cdot \text{м})$, Па и $\sigma(\gamma_1, \gamma_2 = 0)$, Па для двутавра 20К1 из композита Al + 15 вес.% Al₂O₃ при $\lambda = 50$ (~2.5 м); б) проекция “ребра” поверхности σ , Па, от γ_1, γ_2 , Н·м с величинами χ_i по (9.1) на координатную плоскость ($O\sigma\gamma_1$) (граница синего с верхним сине-серым) и линия ее пересечения с ($O\sigma\gamma_1$) (граница синего с нижним серым).

$\gamma_1 = \gamma_2$ на координатную плоскость ($O\sigma\gamma_1$) – верхняя граница синего с сине-серым (рис. 5б) должна давать ту же кривую, что и (6.1) при том же λ – зеленая линия (рис. 5а). Во втором случае ($\gamma_2 = 0$) должны совпадать кривые – бордовая (рис. 5а) и нижняя граница синей области с чисто серой (рис. 5б).

Визуально проекции, полученные уже в 1-м приближении (9.1), хорошо совпадают с соответствующими точными кривыми, получаемыми из (6.1) и (7.2). Второе приближение (9.2) чуть улучшает хорошую точность в выбранном диапазоне жесткостей и расширяет сам диапазон. Для меньших гибкостей знаменатель в малом параметре ξ становится больше, сам параметр – меньше, и точность приближения возрастает.

Примечательно, что при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ изгиб участка II оси несимметричен относительно серединной перпендикулярной плоскости его хорды. “Тетива” – нуль-пара $\{\mathbf{F} + \mathbf{N}, -\mathbf{F} - \mathbf{N}\}$ (рис. 1а) изгибает “лук” – участок между точками перегиба – несимметрично: ключевая аксиома статики об освобождении от связей к деформируемому твердому телу неприменима.

10. Заключение. Таким образом, в рамках гипотезы плоских сечений математически корректно поставлена, инновационным методом решена и верифицирована полная гомотопия задач, связанных с потерей устойчивости у сжимаемой однородной колонны, опираемой поворотными пружинами произвольных жесткостей. Выведены соотношения, связывающие критическое напряжение выгибания с гибкостью колонны из материала с произвольной диаграммой сжатия: со сколь угодно узким квази-пропорциональным участком или вообще без него. В пренебрежении деформаций сдвига эти соотношения номинально точны для важных частных случаев – равные жесткости, шарнир + пружина, заделка + пружина, и носят приближенный (по малому параметру) характер – в общем случае ограниченных приведенных

жесткостей. Показано, что изготовленные из одного материала и разные по геометрическим параметрам колонны, опорные пружины которых имеют попарно одинаковые такие жесткости, характеризуются идентичными кривыми “критическое напряжение – гибкость”, и потому – равными минимальными сжимаемыми гибкостями (не длинами!). Метод категорически исключает так называемые высшие моды, этот побочный продукт математических упрощений.

Аппарат метода не выходит за пределы элементарной математики (решение систем алгебраических уравнений), вузовского курса математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве вычислительного средства использовался продукт Maple 2023. Потому в плане большей приближенности к практике транслируемых студентам знаний и расширения использования компьютерных вычислительных пакетов метод может использоваться в курсах прикладной механики и сопротивления материалов при изучении тем “Продольный изгиб” и “Диаграммы сжатия”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hu Ku., David C. Lai.* Effective length factor for restrained beam-column // *J. Struct. Eng.* 1986. V. 112. № 2. P. 241–256.
<https://doi.org/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281986%29112%3A2%28241%29>
2. *Huang Z.-F., Tan K.-H.* Rankine approach for fire resistance of axially-and-flexurally restrained steel columns // *J. Constr. Steel Res.* 2003. V. 59. № 12. P. 1553–1571.
[https://doi.org/10.1016/s0143-974x\(03\)00103-2](https://doi.org/10.1016/s0143-974x(03)00103-2)
3. *Cai Jian Guo, Xu Yi Xiang, Feng Jian, Zhang Jin.* Buckling and post-buckling of rotationally restrained columns with imperfections // *Scie. China. Phys., Mech. & Astron.* 2012. V. 55. P. 1519–1522.
<https://doi.org/10.1007/s11433-012-4811-9>
4. *Yayli M. Ö., Yerel Kandemir S.* Buckling analysis of a column with rotational springs at both ends in aircraft column // *Sustainable Aviation*, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. P. 159–165.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-34181-1_14
5. *Cao K., Guo Y.-J., Xu J.* Buckling analysis of columns ended by rotation-stiffness spring hinges // *Int. J. of Steel Struct.* 2016. V. 16. P. 1–9.
<https://doi.org/10.1007/s13296-016-3001-4>
6. *Chistyakov V. V., Soloviev S. M.* Buckling in inelastic regime of a uniform console with symmetrical cross section: computer modeling using Maple 18 // *Discr. & Contin. Mod. & Appl. Comp. Sci.* 2023. V. 31. № 2. P. 174–188.
<https://doi.org/10.22363/2658-4670-2023-31-2-174-188>
7. *Чистяков В.В.* Аналитическое и численное моделирование продольного изгиба в пластическом режиме однородной консоли с симметричным сечением // *ЖТФ.* 2023. Вып. 12. С. 1712–1716.
<https://doi.org/10.61011/JTF.2023.12.56801.f207-23>
8. *Ramberg, W., Osgood, W.R.* Description of stress–strain curves by three parameters // *Technical Note.* 1943. № 902.
9. *Анахаев К.Н.* К расчету нелинейного продольного изгиба стержня // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 92–98.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921040024>

10. Wang Y.Q., Yuan H.X., Chang T, Du X.X., Yu M. Compressive buckling strength of extruded aluminum alloy I-section columns with fixed-pinned end conditions // Thin-Walled Struct. 2017. V. 119. P. 396–403.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.06.034>
11. Zhou Sh.R., Shi L.L., Xiong G., Kang Sh.B., Qin Y.L., Yan H.Q. Global buckling behavior of bamboo scrimber box columns under axial compression: Experimental tests and numerical modelling // J. Build. Eng. Part A. 2023. P. 10543.
<https://doi.org/10.1016/j.job.2022.105435>
12. Chen Jiao, Zhipeng Chen, Qiuwei Zhang et al. Compressive strength and impact resistance of Al₂O₃/Al composite structures fabricated by digital light processing // Ceram. Int. 2022. V. 48. № 24. P. 36091–36100.
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.08.150>

A NEW METHOD FOR DETERMINING THE BUCKLING RESISTANCE IN THE NONLINEAR RANGE OF STRAINS FOR A COLUMN SUPPORTED BY ROTATIONAL STIFFENERS.

V. V. Chistyakov^{a, *}, S. V. Soloviev^{a, **}

*a Physical and Technical Institute of RAS named after A.F.Ioffe,
Saint-Peterbourg, Russia*

**E-mail: v.chistyakov@mail.ioffe.ru, **e-mail: serge.soloviev@mail.ioffe.ru*

An innovational method for solving the Euler–Bernoulli problem of an overall buckling of the uniform column supported by rotational springs of stiffnesses γ_1 , γ_2 , N·m free from traditional simplifications (invariable flexural stiffness and length) is given. It is based on a natural and comprehensive constraint on the restored axis length. A system of algebraic equations relating the critical stress σ_{cr} to the nonlinear compression diagram $\varepsilon(\sigma)$ of the material, the slenderness of the column λ and the values γ_1 , γ_2 has been obtained, solved and verified in important special cases. It is shown that columns of the same material with the same so-called the reduced spring stiffnesses have identical dependencies $\sigma_{cr}(\lambda)$. It is shown that columns with $\lambda \leq \lambda_{\min}(\gamma_1, \gamma_2)$ cannot be buckled by any axial load F for various types of $\varepsilon(\sigma)$ (Ramberg–Osgood, rational fraction, polynomial, etc.).

Keywords: overall buckling, rotational spring, critical stress, restored length, reduced stiffness

Introduction. The problem of determining the critical load F_{cr} of a global, i.e. non-local buckling of a column with length l_0 , cross-section S , minimum moment $J_x^{(II)}$ and radius i_x of inertia of the second order and its post-critical behavior is relevant both from an applied point of view and from a fundamental point of view, as a general problem of stability loss by a mechanical system.

The case of the column supported by two rotational springs with stiffnesses γ_1 and γ_2 , N·m, covers all homotopy of real supporting options, from ideal hinge ($\gamma_i=0$) to clamp ($\gamma_i \rightarrow \infty$) for the fixed (A) and movable (B) ends.

Traditionally, [1–5] buckling under semirigid support is considered under the assumption of Hooke's law, a proportional relationship between the strain of the ε and the stress of the σ for the column material, and ignoring the pre-flexural shortening of the column ε_{cr} . Paradoxically, it turns out that due to compression, the column increases its length.

The governing equation of the 2nd [1, 2] or 4th [3–5] order for the transverse coordinate $y(z)$ integrated on the segment $z \in [0, l_0]$ because of linearization takes the deceptive form of an eigenvalue problem for the linear differential operator. And it determines the “resonant” critical values of the longitudinal load $F_{cr}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ and the relative profiles $y(z)$, including impossible multiple-S-shaped higher modes with $n = 2, 3, \dots$, for these “resonances”.

They appear, as a rule, from the equality to zero for the determinant of a homogeneous system of linear equations due to the boundary conditions with respect to coefficients before partial solutions of a linearized differential equation [5]. And here it is not without logical contradictions.

Firstly, in case when the load is exactly the critical one $F = F_{cr}$, there will be no buckling yet. Secondly, the values $F > F_{cr}$ do not turn the determinant to zero, and therefore give the trivial compressive solution of the homogeneous system above. (Taking into account the pre-buckling shortening of the column will simply correct the “resonance” value, but will not describe the post-critical behavior.) Thirdly, what to do with the higher “harmonics”, which, from the point of view of turning the determinant into zero, are no worse than the main one.

Without questioning all the prior results obtained within the framework of the traditional approach from Euler to nowadays, nevertheless, the following remain relevant: a) the problem of the correct formulation and correct solution of this extremely important problem; b) taking into account the early nonlinearity of the compressive diagram $\varepsilon(\sigma)$ in many innovative composite materials; c) taking into account the pre-buckling strain ε_{cr} , possibly on the order of several %.

The approach within the framework of the Timoshenko model [3] also requires taking into account shear deformations in the cross-section, which arise both due to the buckling of the column axis and the action of a transverse pair of reaction forces in the supports at $\gamma_1 \neq \gamma_2$. The approach described below allows us to take into account these deformations in a sequential way as a perturbation. However, taking into account the shear stresses τ, Pa along with nonlinear normal ones σ, Pa refers to the theory of plasticity.

REFERENCES

1. *Hu Ku., David C. Lai.* Effective length factor for restrained beam-column // J. Struct. Eng. 1986. V. 112. № 2. P. 241–256.
<https://doi.org/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281986%29112%3A2%28241%29>
2. *Huang Z.-F., Tan K.-H.* Rankine approach for fire resistance of axially-and-flexurally restrained steel columns // J. Constr. Steel Res. 2003. V. 59. № 12. P. 1553–1571.
[https://doi.org/10.1016/s0143-974x\(03\)00103-2](https://doi.org/10.1016/s0143-974x(03)00103-2)
3. *Cai Jian Guo, Xu Yi Xiang, Feng Jian, Zhang Jin.* Buckling and post-buckling of rotationally restrained columns with imperfections // Scie. China. Phys., Mech. & Astron. 2012. V. 55. P. 1519–1522.
<https://doi.org/10.1007/s11433-012-4811-9>

4. *Yaylı M. Ö., Yerel Kandemir S.* Buckling analysis of a column with rotational springs at both ends in aircraft column // *Sustainable Aviation*, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. P. 159–165.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-34181-1_14
5. *Cao K., Guo Y.-J., Xu J.* Buckling analysis of columns ended by rotation-stiffness spring hinges // *Int. J. of Steel Struct.* 2016. V. 16. P. 1–9.
<https://doi.org/10.1007/s13296-016-3001-4>
6. *Chistyakov V. V., Soloviev S. M.* Buckling in inelastic regime of a uniform console with symmetrical cross section: computer modeling using Maple 18 // *Discr. & Contin. Mod. & Appl. Comp. Sci.* 2023. V. 31. № 2. P. 174–188.
<https://doi.org/10.22363/2658-4670-2023-31-2-174-188>
7. *Chistyakov V. V.* Analytical and numerical modelling of a buckling in a plastic regime of a homogeneous console with symmetrical cross section/ *Technical Physics ” 2023*, iss. 12, p. 1588–1591,
<https://doi.org/10.61011/TP.2023.12.57715.f207-23>
8. *Ramberg, W., Osgood, W. R.* Description of stress–strain curves by three parameters // *Technical Note.* 1943. № 902.
9. *Anakhaev K.N.* On the Calculation of Nonlinear Buckling of a Bar / *Mechanics of Solids*, 2021. v. 56, № 5. p. 684–689.
<https://doi.org/10.3103/S002565442105006X>
10. *Wang Y.Q., Yuan H.X., Chang T, Du X.X., Yu M.* Compressive buckling strength of extruded aluminum alloy I-section columns with fixed-pinned end conditions // *Thin-Walled Struct.* 2017. V. 119. P. 396–403.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.06.034>
11. *Zhou Sh.R., Shi L.L., Xiong G., Kang Sh.B., Qin Y.L., Yan H.Q.* Global buckling behavior of bamboo scrimber box columns under axial compression: Experimental tests and numerical modelling // *J. Build. Eng. Part A.* 2023. P. 10543.
<https://doi.org/10.1016/j.jobe.2022.105435>
12. *Chen Jiao, Zhipeng Chen, Qiuwei Zhang et al.* Compressive strength and impact resistance of Al_2O_3/Al composite structures fabricated by digital light processing // *Ceram. Int.* 2022. V. 48. № 24. P. 36091–36100.
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.08.150>