

УДК 539.3

РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЬЕЗОПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

© 2025 г. С. А. Калоеров^а, *, А. В. Сероштанов^а, **

^аДонецкий государственный университет, Донецк, ДНР, Россия
*E-mail: kaloerov@mail.ru, **e-mail: aleks.serosht@gmail.com

Поступила в редакцию 19.03.2024 г.

После доработки 25.09.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Даны решения периодической и двоякопериодической задач об изгибе пьезоплиты с эллиптическими отверстиями или трещинами с анализом результатов численных исследований. При этом используются комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, голоморфные вне отверстий функции представляются рядами Лорана по отрицательным степеням переменных из соответствующих конформных отображений и на основе периодичности или двоякопериодичности электромагнитоупругого состояния плиты коэффициенты рядов от всех отверстий выражаются через коэффициенты рядов от одного, так называемого основного отверстия. Определение последних коэффициентов осуществляется из граничных условий на контуре основного отверстия обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для плиты с круговыми отверстиями или трещинами с полным или частичным учетом пьезосвойств, без их учета. Установлены закономерности влияния на значения изгибающих моментов и их концентрацию геометрических характеристик рассматриваемых плит и физико-механических свойств их материалов.

Ключевые слова: тонкая пьезоплита с отверстиями и трещинами, периодическая задача, двоякопериодическая задача, комплексные потенциалы

DOI: 10.31857/S1026351925020029, EDN: AMQILM

1. Введение. Тонкие пластинки из пьезоматериалов широко используются в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–8]. Зачастую эти элементы, находящиеся в условиях поперечного изгиба (и называемые тогда тонкими плитами) имеют отверстия и трещины, около которых под действием различных внешних факторов возникают высокие концентрации механических моментов (а следовательно, и напряжений), что нужно учитывать при проектировании конструкций. В работах [9–14] предложены различные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пьезоплит простой геометрической формы из

материалов, имеющих простейшую микроструктуру. Однако в большинстве случаев элементы конструкций изготавливаются из материалов, обладающих общими электромагнитоупругими свойствами, более того, они являются многосвязными. При исследованиях ЭМУС многосвязных сред наиболее достоверные результаты дает использование комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит [15] при их определении обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [16].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов построены решения задач об изгибе пьезоплиты с периодическим или двоякопериодическим рядами эллиптических отверстий или трещин. При этом задачи сведены к определению неизвестных коэффициентов рядов из переопределенных системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярного разложения. Для плиты с круговыми отверстиями или трещинами проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических свойств материалов плит и геометрических характеристик отверстий, трещин.

Пусть тонкая электромагнитоупругая плита ослаблена бесконечным рядом одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий с контурами L_l ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с центрами вдоль одной прямой (рис. 1), принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy с началом в центре отверстия с контуром L_0 , называемого основным. Обозначим полуоси эллипсов через a, b , угол между полуосью a и осью Ox , отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, — через φ , расстояние между центрами соседних отверстий — через h_x . Контур отверстия свободны от нагрузок или жестко подкреплены, на них внешние воздействия (механические и электромагнитные) отсутствуют, на бесконечности плита находится под действием механических изгибающих и крутящих моментов $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ и моментов индукций $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$.

Если для решения рассматриваемой задачи использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругого изгиба тонких плит, то это решение сводится к определению производных функций $W'_k(z_k)$ ($k=1, 4$) обобщенных комплексных переменных [15, 17]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1.1)$$

где μ_k — корни известного характеристического уравнения, из граничных условий на контурах вида

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} \delta_{k,s} W_k''(t_{kp}) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.2)$$

где $\delta_{k,s} = dz_k/ds$; s — длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; g_{ikp} — постоянные, причем, если контур L_p не подкреплен, то

$$g_{1kp} = p_k / \mu_k, \quad g_{2kp} = q_k, \quad g_{3kp} = d_{yk}, \quad g_{4kp} = b_{yk},$$

p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} — известные постоянные; если же контур L_p жестко подкреплен, то

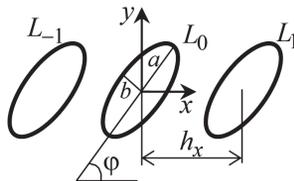


Рис. 1. Схема плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий.

$$g_{1kp} = 1, \quad g_{2kp} = \mu_k, \quad g_{3kp} = d_{yk}, \quad g_{4kp} = b_{yk}.$$

Исходя из общих представлений комплексных потенциалов, в рассматриваемом случае производные функций имеют вид

$$\begin{aligned} W'_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}(z_k), \\ W''_k(z_k) &= \Gamma_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где Γ_k — постоянные, определяемые из решения известной системы линейных уравнений 8-го порядка, правыми частями которой служат заданные на бесконечности значения моментов;

$$\Phi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \Phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_k \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_k)}, \quad (1.4)$$

ζ_{kl} — переменные, определяемые из конформных отображений [18]

$$z_k = z_{kl} + R_k \left(\zeta_{kl} + \frac{m_k}{\zeta_{kl}} \right) \quad (1.5)$$

внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях (1.1):

$$\begin{aligned} z_{kl} &= lh_x, \\ R_k &= \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) + ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2}, \\ m_k &= \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) - ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2R_k}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

a_{kln} — неизвестные коэффициенты рядов Лорана.

В силу периодичности ЭМУС механические моменты и моменты индукций в точках z_k и $z_k + h_x$ будут одинаковыми. Тогда из выражений для моментов следуют равенства $W''_k(z_k) = W''_k(z_k + h_x)$, из которых на основании (1.3) получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k + h_x). \quad (1.7)$$

Из равенств (1.4) и (1.5) следует, что

$$\zeta_{kl}(z_k + h_x) = \zeta_{kl+1}(z_k), \quad \Phi'_{kln}(z_k + h_x) = \Phi'_{kl+1,n}(z_k). \quad (1.8)$$

Подставляя выражения (1.8) в (1.7) и переобозначая индексы суммирования, находим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kl+1,n}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kl-1,n} \Phi'_{kln}(z_k).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях $\Phi'_{kln}(z_k)$, будем иметь $a_{kln} = a_{kl-1,n} = a_{kn}$. Тогда для производных комплексных потенциалов окончательно будем иметь

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \Psi_{kn}(z_k), \quad W''_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \Psi'_{kn}(z_k), \quad (1.9)$$

где

$$\Psi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_{kln}(z_k), \quad \Psi'_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi'_{kln}(z_k). \quad (1.10)$$

Теперь для определения неизвестных постоянных a_{kn} нужно удовлетворять граничным условиям (1.2) лишь на контуре одного, основного отверстия, в качестве которого возьмем контур центрального отверстия L_0 . На остальных контурах в силу периодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически.

Граничным условиям (1.2) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 20]. Для этого на контуре L_0 основного отверстия выберем систему точек $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ ($m = \overline{1, M_0}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (1.9) в граничные условия (1.2) в точках $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$, для определения неизвестных постоянных a_{kn} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik0} \delta_{k,s} \Psi'_{kn}(t_{km}) a_{kn} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik0} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M_0}). \quad (1.11)$$

Кроме уравнений (1.11), для контура основного отверстия должно выполняться условие

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{k1} = 0, \quad (1.12)$$

следующее из однозначности прогиба при полном обходе контура L_0 .

Систему (1.11), дополненную уравнением (1.12), для определения постоянных a_{kn} , будем решать методом сингулярного разложения [21, 22]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W'_k(z_k)$ будут известными, и по ним с использованием известных формул можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты

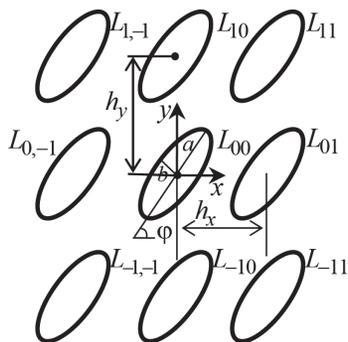


Рис. 2. Схема плиты с двоякопериодической системой эллиптических отверстий.

индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы). При этом, если эллипсы переходят в трещины, то для их концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) k_{1M}^{\pm} и k_{2M}^{\pm} по известным формулам

$$k_{1M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[p_k \sin^2 \varphi + q_k \cos^2 \varphi - 2r_k \sin \varphi \cos \varphi \right] M_k,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(q_k - p_k) \cos \varphi \sin \varphi + r_k (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right] M_k, \quad (1.13)$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a}}{2R_k} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kn},$$

причем “+” и “-” у КИМ в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

2. Решение двоякопериодической задачи. Пусть теперь плита имеет m ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) одинаковых бесконечных рядов одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий или трещин с контурами L_{ml} ($m, l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), полуосями a, b (рис. 2). Как и выше, расстояния между центрами соседних отверстий в горизонтальных рядах обозначим через h_x , расстояния между центрами отверстий в вертикальных рядах – через h_y , угол между полуосями a и осью Ox – через φ . Контуров отверстий свободны от загрузений или жестко подкреплены, на них внешние механические и электромагнитные воздействия отсутствуют, на бесконечности плита находится под действием механических $M_x^{\infty}, M_y^{\infty}, H_{xy}^{\infty}$ и моментов индукций $M_{dx}^{\infty}, M_{dy}^{\infty}, M_{bx}^{\infty}, M_{by}^{\infty}$.

Для плиты с двоякопериодической системой отверстий производные комплексных потенциалов имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmnl}(z_k) a_{kmnl},$$

$$W_k''(z_k) = \Gamma_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kmln}(z_k) a_{kmln}, \quad (2.1)$$

где

$$\varphi_{kmln}(z) = \frac{1}{\zeta_{kml}^n}, \quad \varphi'_{kmln}(z_k) = -\frac{n}{R_k \zeta_{kml}^{n-1} (\zeta_{kml}^2 - m_k)}, \quad (2.2)$$

ζ_{kml} – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kml} + R_k \left(\zeta_{kml} + \frac{m_k}{\zeta_{kml}} \right), \quad (2.3)$$

причем $z_{kml} = lh_x + \mu_k mh_y$; R_k, m_k – величины, вычисляемые по формулам (1.6).

В силу двоякопериодичности ЭМУС механические моменты и моменты индукций в точках z и $z + h_x + \mu_k h_y$ будут одинаковыми. Тогда из выражений для моментов следует, что $W_k''(z_k) = W_k''(z_k + h_x + \mu_k h_y)$, и на основании (2.1) находим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y). \quad (2.4)$$

Как и в случае периодической задачи, в данном случае из (2.3) и (2.2) легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \zeta_{kml}(z_k + h_x + \mu_k h_y) &= \zeta_{km+1, l+1}(z_k), \\ \varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y) &= \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом зависимостей (2.5) преобразуем равенства (2.4). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{km-1, l-1, n} \varphi'_{kmln}(z_k). \end{aligned}$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kmln}(z_k)$, будем иметь $a_{kmln} = a_{km-1, l-1, n} = a_{kn}$. Тогда для комплексных потенциалов окончательно будем иметь выражения

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi_{kn}(z_k), \quad W_k''(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi'_{kn}(z_k), \quad (2.6)$$

где

$$\xi_{kn}(z_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{kmln}(z_k), \quad \xi'_{kn}(z_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi'_{kmln}(z_k). \quad (2.7)$$

Для определения неизвестных постоянных a_{kn} удовлетворим граничным условиям лишь на контуре основного отверстия L_0 . На остальных контурах, в силу двоякопериодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически. Как и в случае периодической задачи, учитывая функции (2.6), из граничных условий на контуре основного отверстия обобщенным методом наименьших квадратов для определения коэффициентов рядов получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. Эта система получается из (1.11), с заменой в последней функций $\psi'_{kn}(z_k)$ на функции $\xi'_{kn}(z_k)$. Последняя система, дополненная уравнением (1.12), опять решается методом сингулярного разложения, и после ее решения вычисляются основные характеристики ЭМУС, а в случае трещин и КИМ для их концов по формулам (1.13).

Как частные случаи из приведенных решений периодической и двоякопериодической задач электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения аналогичных задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи ЭМУ, проводя вычисления для плиты с модельным материалом с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad v'_{ij} = \lambda_{gp} v_{ij},$$

где g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули, v_{ij} — коэффициенты электромагнитной проницаемости, λ_g , λ_p , λ_{gp} — параметры, которые характеризуют пьезосвойства модельного материала. Для задач ЭМУ $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

3. Описание результатов численных исследований. Были проведены исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $\text{BaTiO}_3\text{--CoFe}_2\text{O}_4$ (материал М1) [23, 24]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия CdSe , а пьезомагнитные и магнитные — BaTiO_3 (материал М2) [25]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные — CoFe_2O_4 (материал М3) [25].

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах Лорана (1.9) или (2.6) и количество коллокационных точек M_0 на контуре L_0 основного отверстия, в которых удовлетворялись граничные условия при получении уравнений системы (1.11), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контуре не начинали выполняться с достаточно высокой степенью точности (пока модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). При этом количество учитываемых в рядах (1.10) и (2.7) членов, т.е. отверстий в периодической задаче и рядов и отверстий в двоякопериодической задаче, увеличивалось до тех пор, пока значения получаемых изгибающих моментов не переставали изменяться в пятой значащей цифре. Как показывают исследования, для получения таких результатов в случае расстояний c между отверстиями больших их радиуса a ($c > a$) в рядах Лорана нужно оставлять до 10 членов, на контуре L_0 брать до 20 коллокационных точек, в рядах (1.10) и

(2.7) учитывать до 15 отверстий по каждую сторону от основного отверстия. При этом время выполнения программы реализации всего алгоритма для одного случая на персональных компьютерах средней производительности занимает 3–5 секунд. Для более близких расстояний между контурами отверстий нужно брать гораздо больше членов в рядах Лорана, коллокационных точек на контуре L_0 , отверстий (в периодической задаче) и рядов отверстий (в двоякопериодической задаче). При этом выполнение программы занимает гораздо больше времени. В описываемых ниже случаях в рядах Лорана оставлялось от 10 до 120 (для весьма близких расстояний между отверстиями) членов, на контуре L_0 бралось от 20 до 500 равномерно удаленных (по параметру параметрического задания эллипсов) друг от друга точек, в рядах (1.10) и (2.7) оставлялось до 100 отверстий по каждую сторону от основного отверстия.

Ниже описаны полученные результаты только для плит с круговыми отверстиями или трещинами, когда плиты на бесконечности изгибались одно-сторонними механическими изгибающими моментами $M_x^\infty = m_x$ или $M_y^\infty = m_y$, а также когда на бесконечности действовали одинаковые двусторонние моменты $M_x^\infty = M_y^\infty = m_{xy}$.

В табл. 1 для плиты с периодическим рядом круговых отверстий радиуса a ($b = a$) при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ с точностью до множителя m_y в случае задачи ЭМУ, в зависимости от отношения c/a (рис. 3), где c – расстояние между контурами соседних отверстий, и центрального угла θ , отсчитываемого от направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов M_s/m_y около контура L_0 на площадках, перпендикулярных к нему. Для некоторых значений c/a на рис. 4 изображены графики распределения этих моментов по контуру отверстия. Данные для $c/a = \infty$ относятся к случаю пластинки с одним отверстием.

Таблица 1. Значения моментов M_s/m_y около контуров круговых отверстий в зависимости от c/a

Материал	θ , рад.	c/a							
		∞	10	5	2	1	0.5	0.1	0.01
M1	0	1.845	1.889	1.987	2.410	3.284	5.186	20.63	181.74
	$\pi/6$	1.400	1.430	1.493	1.733	2.126	2.747	4.48	5.21
	$\pi/3$	0.570	0.574	0.582	0.609	0.647	0.693	0.76	0.75
	$\pi/2$	0.215	0.208	0.195	0.167	0.153	0.151	0.16	0.17
M2	0	2.184	2.223	2.308	2.678	3.476	5.322	20.89	187.19
	$\pi/6$	1.457	1.480	1.531	1.734	2.093	2.671	4.28	5.07
	$\pi/3$	0.336	0.333	0.328	0.321	0.330	0.350	0.39	0.41
	$\pi/2$	0.231	0.223	0.208	0.179	0.164	0.162	0.17	0.19
M3	0	1.719	1.767	1.871	2.320	3.228	5.158	20.56	179.82
	$\pi/6$	1.537	1.577	1.658	1.962	2.451	3.207	5.28	6.14
	$\pi/3$	0.600	0.614	0.641	0.721	0.810	0.897	1.01	0.98
	$\pi/2$	-0.008	-0.008	-0.009	-0.009	-0.008	-0.006	-0.01	0.00

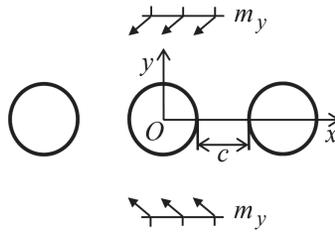


Рис. 3. Схема плиты с периодическим рядом круговых отверстий.

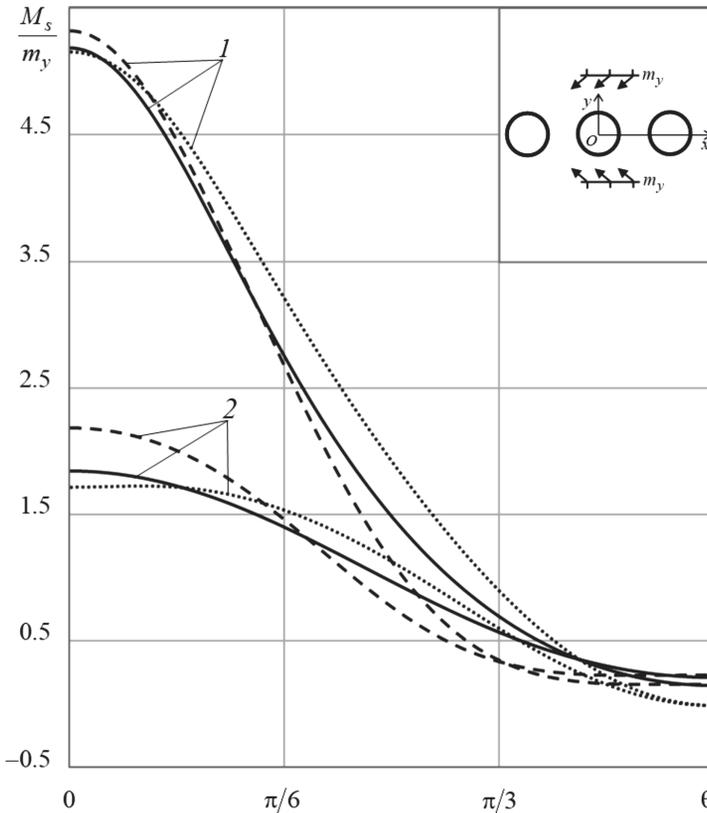


Рис. 4. Графики распределения моментов M_s/m_y , в зависимости от θ [рад] вблизи контура кругового отверстия L_0 при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$. Сплошные, штриховые и пунктирные линии относятся к плите из материалов М1, М2 и М3 соответственно. $l - c/a = 0.5$, $l - c/a = \infty$.

Из данных табл. 1 и рис. 4 следует, что при сближении отверстий друг с другом наблюдается значительная концентрация моментов (следовательно, и напряжений) около контуров отверстий вблизи перемычек, тогда как вдали от перемычек (в окрестности точки, соответствующей $\theta = \pi/2$) значения

Таблица 2. Значения моментов M_s/m_y в контурной точке перемычки плиты с круговыми отверстиями в зависимости от c/a для различных задач

Материал	Задача	c/a				
		∞	1	0.5	0.1	0.01
М1	ЭМУ	1.845	3.284	5.186	20.63	181.74
	ЭУ	1.845	3.284	5.186	20.63	181.74
	МУ	1.835	3.277	5.179	20.62	181.55
	ТУ	1.835	3.277	5.180	20.62	181.55
М2	ЭМУ	2.184	3.476	5.322	20.89	187.19
	ЭУ	2.063	3.414	5.281	20.83	186.26
	МУ	2.113	3.424	5.283	20.85	186.80
	ТУ	1.876	3.325	5.225	20.68	182.37
М3	ЭМУ	1.719	3.228	5.158	20.56	179.82
	ЭУ	1.565	3.144	5.076	20.29	172.98
	МУ	1.694	3.211	5.144	20.53	179.03
	ТУ	1.508	3.106	5.039	20.20	170.95

этих моментов изменяются незначительно. Значения моментов вблизи точек перемычек растут с уменьшением длин перемычек, и при расстояниях между соседними отверстиями менее их радиусов ($c \leq a$) здесь возникает очень высокая концентрация моментов. Если расстояние между соседними отверстиями больше двух диаметров отверстий ($c \geq 4a$), то влияние одного контура на значения моментов около других незначительно, им можно пренебречь и считать плиту ослабленной одним отверстием. Наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из “наиболее анизотропного” по упругим свойствам материала М2. Правда, при сближении отверстий друг с другом влияние “степени анизотропии” уменьшается, но оно все время остается.

На получаемые в результате решения задачи значения моментов заметно влияет учет пьезосвойств материала плиты. Это видно из данных табл. 2 и рис. 5. В табл. 2 для некоторых расстояний между круговыми отверстиями периодического ряда, при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ для задач ЭМУ, ЭУ, МУ и ТУ приведены значения моментов M_s/m_y в точке перемычки, соответствующей углу $\theta = 0$, а на рис. 5 для наиболее пьезоактивного материала М3 при $c = a$ представлены графики распределения этих моментов в задачах ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ (штрихпунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия). Видно, что учет пьезосвойств материала оказывает значительное влияние на значения изгибающих моментов M_s/m_y и при исследованиях концентрации моментов в элементах конструкций, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Как показывают расчеты, при уменьшении отношения b/a длин полюсей эллиптического отверстия L_0 , значения изгибающих моментов M_s

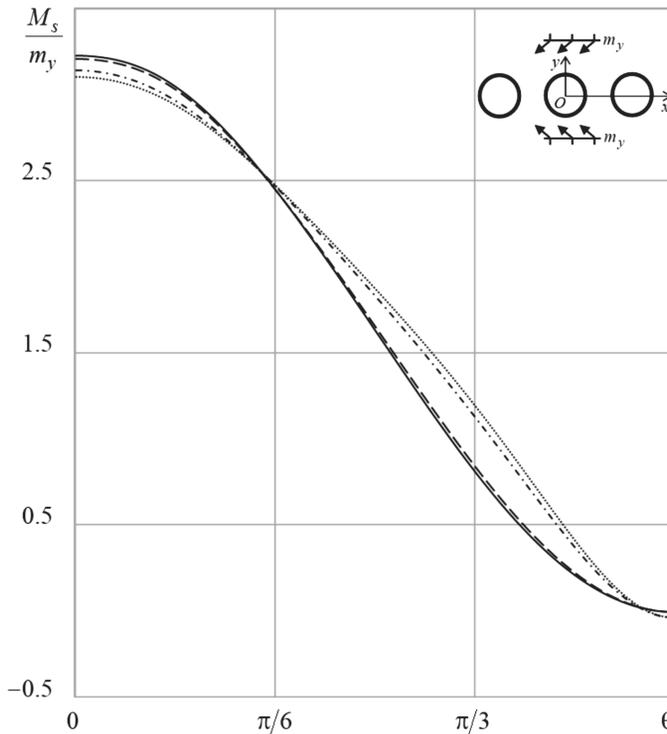


Рис. 5. Графики распределения моментов M_s/m_y в зависимости от θ [рад] около контура отверстия L_0 в плите из материала МЗ с круговыми отверстиями для задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ (штрихпунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия).

вблизи концов большой оси отверстия по модулю бесконечно растут, но на небольшом удалении от этих концов по контуру резко уменьшаются, а затем незначительно изменяются от точки к точке. При $b/a \leq 10^{-3}$ эллипсы можно считать трещинами и вычислять для их концов КИМ. При этом КИМ значительно зависят от угла φ наклона тещин к оси Ox .

В табл. 3 для плиты из материала МЗ с периодическим рядом трещин длины $2l$, когда расстояние между их центрами $h_x = 3l$ и плита изгибается моментами $M_y = m_y$ или $M_x^\infty = m_x$, с точностью до множителей $m_y\sqrt{l}$ или $m_x\sqrt{l}$ приведены значения КИМ в зависимости от угла φ наклона трещин к оси Ox (рис. 6, а). При этом для трещин принималось, что $b/a = 10^{-4}$. Как видно, с увеличением угла φ значения КИМ k_1^\pm уменьшаются при действии моментов $M_y^\infty = m_y$ и растут при действии моментов $M_x^\infty = m_x$. Коэффициент $k_1^\pm = 0$, если трещины направлены вдоль направления растягивающих усилий (направления σ_y^∞ или σ_x^∞ , которым соответствуют M_y^∞ и M_x^∞), и достигает максимального значения, когда они перпендикулярны направлению растягивающих усилий. Значения k_2^\pm сравнительно малы; для трещин, параллельных и перпендикулярных направлениям растягивающих усилий (для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$), $k_2^\pm = 0$; в случае

Таблица 3. Значения КИМ для вершин периодического ряда наклоненных под углом φ трещин

Способ загрузки	КИМ	φ						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$M_y^\infty = m_y$	k_1^\pm	1.284	1.097	0.768	0.461	0.215	0.056	0.000
	k_2^\pm	0.000	0.048	0.084	0.128	0.148	0.114	0.000
$M_x^\infty = m_x$	k_1^\pm	0.000	0.078	0.280	0.526	0.749	0.901	0.955
	k_2^\pm	0.000	-0.130	-0.176	-0.095	0.120	0.338	0.000

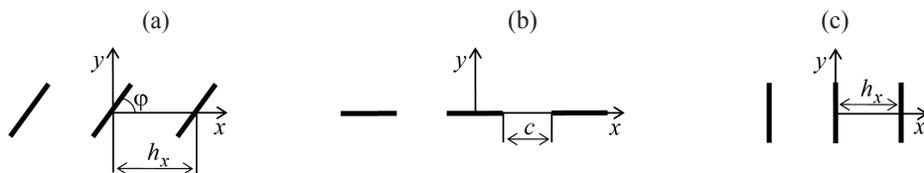


Рис. 6. Схема плиты с периодическим рядом трещин в зависимости от: (а) – угла φ наклона трещин, (б) – расстояния между трещинами при $\varphi = 0^\circ$, (с) – расстояния между трещинами при $\varphi = 90^\circ$.

Таблица 4. Значения КИМ k_1^\pm для вершин трещин вдоль оси Ox в зависимости от c/l

	c/l						
∞	10	5	2	1	0.5	0.1	0.01
1.0	1.012	1.036	1.128	1.284	1.564	2.984	9.009

действия $M_x^\infty = m_x$ при $\varphi \leq \pi/4$ около концов трещин в плите возникают зоны сжатий в направлении трещин ($k_2^\pm < 0$).

Как влияет расстояние между трещинами на значения КИМ, показывают данные табл. 4 и табл. 5. В табл. 4 для плиты с периодическим рядом трещин длины $2l$ вдоль оси Ox (рис. 6, б), находящейся под действием моментов $M_y^\infty = m_y$, с точностью до множителя $m_y \sqrt{l}$ приведены значения КИМ k_1^\pm в зависимости от c/l , где $c = h_x - 2l$ – расстояние между вершинами соседних трещин, а в табл. 5 для плиты с периодическим рядом перпендикулярных оси Ox трещин (рис. 6, с) при действии моментов $M_x^\infty = m_x$ с точностью до множителя $m_x \sqrt{l}$ даны значения тех же КИМ k_1^\pm , а также моментов M_s/m_x около центров трещин, в зависимости от h_x/l . При этом $k_2^\pm = 0$.

Как следует из данных табл. 4 и табл. 5, при сближении друг с другом расположенных вдоль одной линии трещин значения КИМ растут, и при близких расстояниях между трещинами эти значения становятся весьма большими, что может приводить к разрушению плиты. При сближении параллельных друг другу трещин КИМ для их концов наоборот уменьшаются, а моменты в точках перемычек сначала также уменьшаются, а затем при весьма близких расстояниях между трещинами растут.

Таблица 5. Значения КИМ k_1^\pm для вершин и моментов M_s/m_x около центров трещин, перпендикулярных оси Ox в зависимости от h_x/l при действии моментов $M_x^\infty = m_x$

Материал	Величина	h_x/l				
		∞	1	0.5	0.1	0.01
M1	k_1^\pm	1.000	0.625	0.446	0.208	0.095
	M_s/m_x	0.231	0.042	0.006	0.018	0.154
M2	k_1^\pm	1.000	0.622	0.447	0.209	0.082
	M_s/m_x	0.609	0.131	0.022	0.035	0.314
M3	k_1^\pm	1.000	0.776	0.586	0.272	0.114
	M_s/m_x	0.125	0.039	0.013	0.016	0.115

Таблица 6. Значения моментов M_s/m_y или M_s/m_{xy} около контуров круговых отверстий в зависимости от c/a

θ , рад.	c/a									
	∞	1	0.5	0.1	0.01	∞	1	0.5	0.1	0.01
	Изгиб моментами $M_y^\infty = m_y$					Изгиб моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = m_{xy}$				
0	2.184	2.342	2.743	5.029	14.65	2.793	2.798	3.246	6.325	19.20
$\pi/12$	2.002	2.092	2.314	2.847	1.80	2.586	2.559	2.831	3.649	2.41
$\pi/6$	1.457	1.413	1.409	1.091	0.43	2.015	1.876	1.910	1.545	0.63
$\pi/4$	0.767	0.650	0.587	0.361	0.12	1.534	1.270	1.162	0.726	0.25
$\pi/3$	0.336	0.254	0.233	0.158	0.06	1.567	1.424	1.359	0.958	0.35
$5\pi/12$	0.230	0.195	0.198	0.284	0.20	1.881	2.044	2.209	2.607	1.58
$\pi/2$	0.231	0.203	0.197	0.516	1.72	2.042	2.351	2.671	4.790	13.53

Для плиты с двоякопериодической системой круговых отверстий радиуса a ($b=a$) из материала M2 при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ (односторонний изгиб) или $M_x^\infty = M_y^\infty = m_{xy}$ (двухсторонний изгиб) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и отношения c/a , где c – расстояние между контурами соседних отверстий, в табл. 6 даны значения изгибающих моментов M_s/m_y или M_s/m_{xy} около контуров на площадках, перпендикулярных к нему.

Как видно из данных табл. 6, в случае двоякопериодической задачи при одностороннем изгибе плиты в зонах высокой концентрации моментов вблизи точек горизонтальных перемычек (при $\theta=0$) значения моментов, как и в случае периодической задачи, растут, но для близких расстояний между контурами отверстий они значительно меньше, чем в случае периодической задачи (ср. данные табл. 6 с соответствующими данными табл. 1). В случае двустороннего изгиба плиты с двоякопериодической системой отверстий значения моментов в точках горизонтальных перемычек (в окрестности точки,

соответствующей $\theta = 0$) несколько увеличиваются по сравнению с односторонним изгибом, а в зонах вертикальных переемычек (в окрестности точки, соответствующей $\theta = \pi/2$) они значительно выше, чем при одностороннем изгибе.

В заключение отметим, что полученные числовые результаты для анизотропной плиты с периодическим или двоякопериодическим рядами круговых отверстий (задача ТУ) хорошо согласуются с известными из литературы.

Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [15] решена периодическая и двоякопериодическая задачи об изгибе плиты с эллиптическими (в частном случае круговыми) отверстиями или прямолинейными трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана, учета периодичности и двоякопериодичности электромагнитоупругого состояния плиты и удовлетворения граничным условиям на одном из контуров обобщенным методом наименьших квадратов [16, 19, 20] задача сведена к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений [21, 22]. Для плиты с круговыми отверстиями или трещинами проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических свойств ее материала и геометрических характеристик отверстий или трещин.

Работа выполнена в рамках государственного задания (регистрационный номер: 124012400354-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практическое применение. М.: Иностран. лит., 1949. 717 с.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Под ред. У.Мэзона. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
3. *Бичурин М.И., Петров В.М., Филиппов Д.А., Сринивасан Г., Нан С.В.* Магнитоэлектрические материалы. М.: Акад. Естественных наук, 2006. 296 с.
4. *Пятаков А.П.* Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюл. Рос. магнит. о-ва. 2006. Т. 5. № 2. С. 1–3.
5. *Nan C.-W., Bichurin M.I., Dong S., Viehland D., Srinivasan G.* Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions // *J. Appl. Phys.* 2008. V. 103. № 3. P. 031101.
<https://doi.org/10.1063/1.2836410>
6. *Tian R., Liu J., Liu X.* Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers // *Acta Mech. Solida Sin.* 2020. V. 33. P. 368–380.
<https://doi.org/10.1007/s10338-019-00129-z>
7. *Srinivas S., Jiang Y.L.* The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // *Acta Mater.* 2005. V. 53. № 15. P. 4135–4142.
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>

8. *Бочкарев С.А., Лекомцев С.В.* Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 2. С. 35–48.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.04>
9. *Eringen A.C., Maugin G.A.* *Electrodynamics of Continua I*. New York: Springer, 1990. 436 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3226-1>
10. *Librescu L., Hasanyan D., Ambur DR* Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2004. V. 39. № 5. P. 723–739.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(03\)00023-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(03)00023-4)
11. *Shen W., Zhang G., Gu S., Cong Y.* A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect // *Acta Mech. Solida Sin.* 2022. V. 35. № 2. P. 185–197.
<https://doi.org/10.1007/s10338-021-00271-7>
12. *Ieşan D.* On the bending of piezoelectric plates with microstructure // *Acta Mech.* 2008. V. 198. № 3. P. 191–208.
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0527-8>
13. *Xu S.-P., Wang W.* Bending of piezoelectric plates with a circular hole // *Acta Mech.* 2009. V. 203. P. 127–135.
<https://doi.org/10.1007/s00707-008-0025-7>
14. *Gales C., Baroju N.* On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2014. V. 94. № 1–2. P. 55–71.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201200219>
15. *Калоеров С.А.* Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. 2022. № 1. С. 20–38.
16. *Калоеров С.А., Паршикова О.А.* Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // *Прикладная механика.* 2012. Т. 48. № 3. С. 103–116.
17. *Калоеров С.А., Сероштанов А.В.* Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты // *ПМТФ.* 2022. Т. 63. № 4. С. 143–155.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20220415>
18. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // *Теорет. и прикл. механика.* 1995. № 25. С. 45–56.
19. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
20. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
21. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008. V. 29. № 4. P. 1322–1342.
<https://doi.org/10.1137/050639193>
22. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008. V. 29. № 4. P. 1343–1362.
<https://doi.org/10.1137/05063920X>
23. *Tian W.-Y., Gabbert U.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *Europ. J. Mech. Part A.* 2004. V. 23. № 1. P. 599–614.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>

24. *Yamamoto Y., Miya K.* Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987. 450 p.
25. *Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R.* Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Materials. 2009. V. 41. № 3. P. 329–338.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>

SOLUTIONS OF PERIODIC AND DOUBLY PERIODIC BENDING PROBLEMS OF A THIN PIEZO PLATE WITH HOLES OR CRACKS

S. A. Kaloerov^{a,*}, A. V. Seroshtanov^{a,**}

^aDonetsk State University, Donetsk, DPR, Russia

*E-mail: kaloerov@mail.ru, **e-mail: aleks.serosht@gmail.com

The solutions of periodic and doubly periodic problems of bending of a piezo plate with elliptical holes or cracks are given with an analysis of the results of numerical studies. In this case, complex potentials of the theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates are used, holomorphic functions outside the holes are represented by Laurent series in negative powers of variables from the corresponding conformal mappings and, based on the periodicity or doubly periodicity of the electro-magneto-elastic state of the plate, the coefficients of the series from all the holes are expressed through the coefficients of the series from one, the so-called main hole. The determination of the last coefficients is carried out from the boundary conditions on the contour of the main hole using the generalized least squares method. The results of numerical studies for a plate with circular holes or cracks with full or partial consideration of piezo properties, without taking them into account, are described. The patterns of influence on the values of bending moments and their concentration of the geometric characteristics of the discussed plates and the physico-mechanical properties of their materials are established.

Keywords: thin piezo plate with holes and cracks, periodic problem, doubly periodic problem, complex potentials.

REFERENCES

1. *Cady W.G.* Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals. New York: McGraw-Hill Book Company, 1946. 806 p.
2. *Berlincourt D., Curran D.R., Jaffe H.* Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. Ed. by W.P. Mason. New York: Academic Press, Physical Acoustics, 1964. P. 169–270.
3. *Bichurin M.I., Petrov V.M., Filippov D.A., et al.* Magnetoelectric Composites. Akad. Estestv., Moscow, 2006; Jenny Stanford Publishing, 2019.
4. *Pyatakov A.P.* Magnetoelectric Materials and Their Application in Practice // Bul. Ros. Magnit. Obshchestva. 2006. Vol. 5. № 2. P. 1–3.

5. *Nan C.-W., Bichurin M.I., Dong S., Viehland D., Srinivasan G.* Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions // *J. Appl. Phys.* 2008. V. 103. № 3. P. 031101.
<https://doi.org/10.1063/1.2836410>
6. *Tian R., Liu J., Liu X.* Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers // *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2020. V. 33. P. 368–380.
<https://doi.org/10.1007/s10338-019-00129-z>
7. *Srinivas S., Jiang Y.L.* The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // *Acta Mater.* 2005. V. 53. P. 4135–4142.
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>
8. *Bochkarev S.A., Lekontsev S.V.* Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells made of piezoelectric material // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2019. № 2. P. 35–48.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.04>
9. *Eringen A.C., Maugin G.A.* *Electrodynamics of Continua I.* New York: Springer, 1990. 436 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3226-1>
10. *Librescu L., Hasanyan D., Ambur DR* Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // *International journal of non-linear mechanics.* 2004. V. 39. № 5. P. 723–739.
<https://doi.org/10.1007/s00707-008-0025-7>
11. *Shen W., Zhang G., Gu S., Cong Y.* A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect // *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2022. V. 35. № 2. P. 185–197.
<https://doi.org/10.1007/s10338-021-00271-7>
12. *Ieşan D.* On the bending of piezoelectric plates with microstructure // *Acta Mech.* 2008. V. 198. № 3. P. 191–208.
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0527-8>
13. *Xu S.-P., Wang W.* Bending of piezoelectric plates with a circular hole // *Acta Mech.* 2009. V. 203. P. 127–135.
<https://doi.org/10.1007/s00707-008-0025-7>
14. *Gales C., Baroiu N.* On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2014. V. 94. № 1–2. P. 55–71.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201200219>
15. *Kaloerov S.A.* Osnovnye sootnosheniia prikladnoi teorii izgiba tonkikh elektromagnitno-prugikh plit [The main relations of the applied theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates] // *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences.* 2022. № 1. P. 20–38.
16. *Kaloerov S.A., Parshikova O.A.* Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates // *International Applied Mechanics.* 2012. V. 48. № 3. P. 319–331.
<https://doi.org/10.1007/s10778-012-0523-0>
17. *Kaloerov S.A., Seroshchanov A. V.* Solving the problem of electro-magneto-elastic bending of a multiply connected plate // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2022. V. 63. № 4. P. 676–687.
<https://doi.org/10.1134/S0021894422040150>

18. *Kaloerov S. A., Goryanskaya E. S.* The two-dimensional stressed state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks // *Journal of Mathematical Sciences*. 1997. V. 84. № 6. P. 1497–1504.
<https://doi.org/10.1007/BF02398809>
19. *Voevodin V.V.* Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebrы [Computational Basis of Linear Algebra]. Moskov, Nauka, 1977. 304 p.
20. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer methods for mathematical computations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977. XII, 259 p.
21. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008. V. 29. № 4. P. 1322–1342.
<https://doi.org/10.1137/050639193>.
22. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008. V. 29. № 4. P. 1343–1362.
<https://doi.org/10.1137/05063920X>.
23. *Tian W.-Y., Gabbert U.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *Europ. J. Mech. Part A*. 2004. V. 23. P. 599–614.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>
24. *Yamamoto Y., Miya K.* Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987. 450 p.
25. *Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R.* Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // *Mech. Materials*. 2009. V. 41. P. 329–338.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>