

УДК 531.36

## О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАВНОВЕСИЙ К СПОСОБУ РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОСТОРОННИХ СВЯЗЕЙ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

© 2025 г. А. А. Буров<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”  
РАН, Москва, Россия

\*E-mail: [jtm@narod.ru](mailto:jtm@narod.ru)

Поступила в редакцию 22.06.2024 г.

После доработки 30.07.2024 г.

Принята к публикации 12.08.2024 г.

Рассматриваются два способа реализации односторонних голономных связей с кусочно-гладкими границами. Приводятся примеры, свидетельствующие как в пользу предлагаемых способов, так и против них. Также на примерах обсуждается чувствительность равновесий системы, стесненной голономными связями, задаваемыми кусочно-гладкими функциями, к способу реализации этих связей. Рассматриваются две задачи из механики систем, стесненных парой нерастяжимых невесомых тросов. В одной из задач, носящей, скорее всего, академический характер, отыскиваются равновесия и изучаются малые колебания около этих равновесий. Другая задача относится к тросовым системам, развертываемым у равномерно вращающегося небесного тела. Для нее отыскиваются относительные равновесия груза, подвешенного на паре тросов, и изучаются достаточные условия устойчивости этих относительных равновесий.

*Ключевые слова:* равновесия механических систем со связями, голономные связи, способы реализации связей, односторонние связи, негладкие связи

DOI: 10.31857/S1026351925020015, EDN: AMPPGX

**Введение.** Как известно, метод Рауса [1] и его модификации (см., например, [2, 3]) позволяют не только эффективно решать задачу о существовании установившихся движений, в частности равновесий механических систем, стесненных связями или обладающих первыми интегралами, но и исследовать достаточные условия их устойчивости и неустойчивости. Однако в ряде случаев, таких как, например, случай непрерывности, но лишь кусочной дифференцируемости функций, задающих налагаемые связи, при применении метода Рауса можно обнаружить некоторые затруднения, связанные, в частности, с дифференцированием негладких функций (см., например, [4]). Ниже обсуждаются возможные пути преодоления таких трудностей в случае, когда известна механическая природа связи.

**1. Подходы к реализации связей: основное положение.** В этом разделе приводятся некоторые мотивирующие примеры и связанные с ними подходы, касающиеся способов реализации связей.

*1.1. Мотивирующий пример.* Начнем с основного примера, размышления над которым привели к дальнейшим рассуждениям.

*Пример 1.* Тяжелая материальная точка движется в области вертикальной плоскости, задаваемой неравенством

$$f = |x| - y \leq 0, \quad (1.1)$$

где  $Ox$  – система отсчета, ось  $Ox$  которой горизонтальна, а ось  $Oy$  направлена вдоль восходящей вертикали. Потенциальная энергия имеет простой вид

$$U = mgy, \quad (1.2)$$

где  $m$  – масса точки,  $g > 0$  – ускорение силы тяжести. Понятно, что  $(0, 0)$  – точка строгого минимума потенциальной энергии в этой области, и соответствующее ей положение равновесия устойчиво в силу хотя бы принципа Горичелли (см., например, [5]). Спрашивается, как аккуратно доказать то, что точка  $(0, 0)$  – устойчивое положение равновесия.

Формально говоря, следует применить метод множителей Лагранжа: для отыскания критических точек и исследования их типа выписать функцию Лагранжа

$$W = U + mg\lambda f$$

и рассмотреть задачу на безусловный экстремум.

Однако трудность состоит прежде всего в том, что непрерывная функция  $y = |x|$ , определяющая границу неудерживающей связи (1.1), в точке  $(0, 0)$  недифференцируема в классическом смысле. Для преодоления возникающей трудности можно либо использовать обобщения понятия дифференцирования, либо применять какие-либо подходы, опирающиеся на представления о том, каким способом реализована наложенная связь (см., например, [6–9]).

*Замечание 1.* На самом деле, кусочная дифференцируемость функций, задающих связи, приводит к трудностям уже при выписывании уравнений движения в их классическом смысле. Точнее говоря, для их аккуратного выписывания требуются дополнительные предположения, касающиеся способов реализации связей.

Ради преодоления таких трудностей представим, что система стеснена не неудерживающей связью (1.1), а двумя неудерживающими связями (рис. 1)

$$\Sigma_1: (x, y): f_1 = x - y \leq 0, \quad \Sigma_2: (x, y): f_2 = -x - y \leq 0.$$

Будем считать, что каждая из этих связей реализована большими потенциальными силами, причем потенциал этих сил задается по правилу (ср., например, [9])

$$U_N = \frac{1}{2} N \Phi(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x}).$$

Здесь

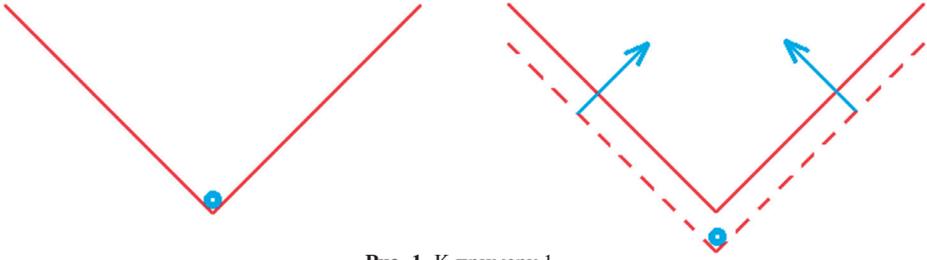


Рис. 1. К примеру 1.

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma_1, \\ k(x - y)^2, & (x, y) \notin \Sigma_1, \end{cases} \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma_2, \\ k(x + y)^2, & (x, y) \notin \Sigma_2, \end{cases}$$

где  $k$  – размерный параметр (“коэффициент упругости”),  $N > 0$  – безразмерный параметр.

Если обозначить  $\bar{\Sigma}_1 = R^2 \setminus \Sigma_1$ ,  $\bar{\Sigma}_2 = R^2 \setminus \Sigma_2$ , то потенциал, реализующий эти связи, можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \\ 2k(x^2 + y^2), & (x, y) \in \bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2, \\ k(x - y)^2, & (x, y) \in \bar{\Sigma}_1 \cap \Sigma_2, \\ k(x + y)^2, & (x, y) \in \Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_2. \end{cases}$$

В области  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \{(x, y) : |x| + y \leq 0\}$  функция  $W$  – гладкая:

$$W = mgy + Nk(x^2 + y^2).$$

Тогда для отыскания равновесий можно, как обычно, исследовать ее критические точки, задаваемые уравнениями

$$W_x = 2Nkx = 0, \quad W_y = mg + 2kNy = 0. \tag{1.3}$$

Отвечающие им равновесия

$$x(N) = 0, \quad y(N) = -\frac{mg}{2kN}, \tag{1.4}$$

расположены в рассматриваемой области, причем

$$x(N) = x_0 + \epsilon x_1 = 0 + \epsilon \cdot 0, \quad y(N) = y_0 + \epsilon y_1 = 0 + \epsilon \left(-\frac{mg}{2k}\right), \quad \epsilon = \frac{1}{N}.$$

С увеличением жесткости  $N \rightarrow \infty$  имеем  $\epsilon \rightarrow 0$ , и положение равновесия стремится к началу координат – интуитивно понятному равновесию исходной системы, стесненной связью.

Так как в этой же области вторые производные имеют вид

$$W_{xx} = W_{yy} = 2Nk, \quad W_{xy} = 0,$$

то оба коэффициента Пуанкаре положительны при всех значениях  $N > 0$  и это равновесие устойчиво, что и требовалось.

*Замечание 2.* Нетрудно распространить приведенные выше рассуждения на случай удерживающей связи, предполагая, что бусинка скользит по тонкой проволочке, изогнутой в виде графика функции  $y = |x|$ . В этом случае подход, опирающийся на введение упругого потенциала, например в виде, предложенном выше, позволяет корректно выписать уравнения движения.

*1.2. Подход к реализации односторонних связей* (“подход I”). Согласно ([10], стр. 84), “В механических системах с удерживающими связями большое значение имеет число наложенных связей, прямо связанное с числом степеней свободы. В системах с неудерживающими связями дело обстоит по-другому.” В этой же монографии приводится пример одной связи, имеющей угловые точки и представленной как пересечение областей, ограниченных парой поверхностей (рис. 19 на стр. 84 цитируемой монографии).

Исходя из соображений, изложенных выше, сформулируем следующий подход к описанию движения системы, стесненной кусочно-гладкой неудерживающей связью.

Пусть механическая система, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T,$$

оказывается стесненной неудерживающей связью вида

$$f(\mathbf{q}) \leq 0, \tag{1.5}$$

где  $f: M^n(\mathbf{q}) \rightarrow R$  — определенная в локальных координатах кусочно-гладкая функция на конфигурационном многообразии  $M^n$ . Пусть  $\Sigma$  — определяемая неравенством (1.5) область, в которой допустимо движение.

Предположим, что область, в которой допустимо движение, может быть представлена в виде пересечения  $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , двух областей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , таких, что

$$\Sigma_1: f_1(\mathbf{q}) \leq 0; \quad \Sigma_2: f_2(\mathbf{q}) \leq 0, \tag{1.6}$$

причем границы  $\partial\Sigma_1$  и  $\partial\Sigma_2$

$$\partial\Sigma_1: f_1(\mathbf{q}) = 0; \quad \partial\Sigma_2: f_2(\mathbf{q}) = 0,$$

этих областей пересекаются трансверсально.

Если механическое происхождение связи таково, что она может быть реализована посредством потенциальных сил с потенциалом вида (ср., например, [8])

$$U_N = \frac{1}{2} N \Phi(\mathbf{q}), \quad \Phi(\mathbf{q}) = \Phi_1(\mathbf{q}) + \Phi_2(\mathbf{q}), \tag{1.7}$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{q}: f_1(\mathbf{q}) \leq 0, \\ f_1^2, & \mathbf{q}: f_1(\mathbf{q}) > 0, \end{cases} \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{q}: f_2(\mathbf{q}) \leq 0, \\ f_2^2, & \mathbf{q}: f_2(\mathbf{q}) > 0, \end{cases}$$

то движение исходной системы, стесненной связью, приближается движением освобожденной от связи системы с “пенализирующим” потенциалом (1.7) при стремлении к бесконечности безразмерного параметра  $N > 0$ .

В дальнейшем для удобства будут употребляться обозначения  $\bar{\Sigma}_1 = M^n \setminus \Sigma_1$ ,  $\bar{\Sigma}_2 = M^n \setminus \Sigma_2$ ,  $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2$

*Замечание 3.* Вообще говоря, уравнения связей вида (1.6) определены с точностью до положительного, отделенного от нуля множителя: соотношения вида

$$k_1(\mathbf{q})f_1(\mathbf{q}) \leq 0, \quad k_2(\mathbf{q})f_2(\mathbf{q}) \leq 0,$$

$$k_1^{**} \geq k_1(\mathbf{q}) \geq k_1^* > 0, \quad k_2^{**} \geq k_2(\mathbf{q}) \geq k_2^* > 0$$

задают те же области  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  в пространстве положений<sup>1</sup>. Как можно видеть, в областях  $\bar{\Sigma}_1 \cap \Sigma_2$  и  $\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma}_2$  наличие таких множителей, вообще говоря, существенно не сказывается на динамике в пределе при  $N \rightarrow \infty$ . Этого нельзя сказать относительно предельной динамики в области  $\bar{\Sigma}$ . Иными словами, в каждом конкретном случае требуется отдельное рассмотрение, исходя из предположений о механическом происхождении связей.

Возникает вопрос, насколько универсален подход, описанный выше. Для ответа на него рассмотрим еще один пример.

*1.3. “Демотивирующий” пример. Пример 2.* Тяжелая материальная точка движется в области вертикальной плоскости, задаваемой неравенством

$$f = -|x| - y \leq 0, \quad (1.8)$$

где  $Ox$  — вновь система отсчета, ось  $Ox$  которой горизонтальна, а ось  $Oy$  направлена вдоль восходящей вертикали. Потенциальная энергия имеет простой вид (1.2). Интуитивно ясно, что точка  $(0, 0)$  должна быть положением равновесия, расположенным на границе этой области, причем это положение равновесия неустойчиво, поскольку в пересечении этой области с его любой, сколь угодно малой окрестностью имеются точки, которым отвечают меньшие значения потенциальной энергии. Спрашивается, можно ли в этом убедиться, используя подход к описанию односторонних связей, аналогичный обсуждавшемуся выше.

Будем считать, что для реализации связи использована механическая конструкция следующего вида. Пусть  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  — прямолинейные лучи, задаваемые соотношениями

$$\mathcal{R}_1: f_1 = x - y = 0, \quad x \leq 0; \quad \mathcal{R}_2: f_2 = -x - y = 0, \quad x \geq 0. \quad (1.9)$$

Эти лучи имеют общую точку — начало координат. Движение осуществляется в области  $\Sigma$ , допускающей представление в виде  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , где

$$\Sigma_1: f_1 = x - y \leq 0, \quad x \leq 0; \quad \Sigma_2: f_2 = -x - y \leq 0, \quad x \geq 0.$$

Область, в которой движение невозможно, обозначим  $\bar{\Sigma} = R^2 \setminus \Sigma$ .

<sup>1</sup> Здесь  $k_1^*$ ,  $k_1^{**}$ ,  $k_2^*$  и  $k_2^{**}$  — положительные постоянные.

Пусть

$$\mathcal{R}_{1\delta}: f_{1\delta} = x - y = \delta, \quad x \leq \delta; \quad \mathcal{R}_{2\delta}: f_{2\delta} = -x - y \leq \delta, \quad x \geq -\delta \quad (1.10)$$

семейства лучей, параметризованные с помощью параметра  $\delta$ :  $0 \leq \delta \leq \delta_*$ , где постоянная  $\delta_*$  достаточно мала. При этом лучи (1.9) отвечают значению  $\delta = 0$ . Лучи  $\mathcal{R}_{1\delta}$  и  $\mathcal{R}_{2\delta}$  при изменении параметра  $\delta$  в указанном диапазоне образуют полуполосы  $\mathcal{S}_{1\delta}$  и  $\mathcal{S}_{2\delta}$  соответственно.

*Замечание 4.* На эти лучи, в пределе при  $\delta = 0$  задающие границы связи, можно смотреть как на тонкие, бесконечные в одном направлении проволоочки  $R_{1\delta}$  и  $R_{2\delta}$ , полученные из проволочек  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  сдвигом вдоль перпендикуляра к самой себе на расстояние  $\delta/\sqrt{2}$ .

Для того, чтобы освободиться от связей, составим потенциал по следующему правилу. Пусть

$$U_N = \frac{1}{2} N \Phi(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x}),$$

Здесь

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma, \\ k(x - y)^2, & (x, y) \in \mathcal{S}_{1\delta}, \end{cases} \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma, \\ k(x + y)^2, & (x, y) \in \mathcal{S}_{2\delta}, \end{cases}$$

а  $N > 0$  – безразмерный параметр.

В дальнейшем предполагается, что параметр  $N$  настолько велик, что частица не попадает в область  $\overline{\Sigma} \setminus (\mathcal{S}_{1\delta} \cup \mathcal{S}_{2\delta})$ , и поэтому потенциал в этой области не выписывается. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Sigma, \\ k(x - y)^2, & (x, y) \in \mathcal{S}_{1\delta} \setminus \mathcal{S}_{2\delta}, \\ k(x + y)^2, & (x, y) \in \mathcal{S}_{2\delta} \setminus \mathcal{S}_{1\delta}, \\ 2k(x^2 + y^2), & (x, y) \in \mathcal{S}_{1\delta} \cap \mathcal{S}_{2\delta}. \end{cases}$$

В области  $\mathcal{S}_{1\delta} \cap \mathcal{S}_{2\delta}$  функция  $W$  – гладкая:

$$W = mgy + Nk(x^2 + y^2).$$

Ее критические точки также определяются уравнениями (1.3), они также имеют вид (1.4). И вновь эти равновесия представимы в виде

$$x(N) = x_0 + \epsilon x_1 = 0 + \epsilon \cdot 0, \quad y(N) = y_0 + \epsilon y_1 = 0 + \epsilon \left( -\frac{mg}{2k} \right), \quad \epsilon = \frac{1}{N}. \quad (1.11)$$

С увеличением жесткости  $N \rightarrow \infty$  имеем  $N \rightarrow 0$ , и эти равновесия, изображенные на рис. 2, стремятся к интуитивно понятному равновесию исходной, стесненной неудерживающей связью (1.8) системы – к началу координат.

*Замечание 5.* Равновесие (1.11) располагается внутри области  $\mathcal{S}_{1\delta} \cap \mathcal{S}_{2\delta}$  при выполнении условия

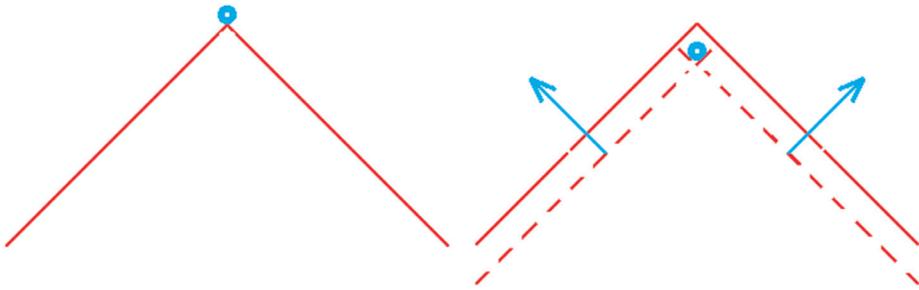


Рис. 2. К примеру 2.

$$N > N_* = \frac{mg}{2k\delta}.$$

И вновь, так как в этой же области вторые производные имеют вид

$$W_{xx} = W_{yy} = 2Nk, \quad W_{xy} = 0,$$

то оба коэффициента Пуанкаре положительны при всех значениях  $N > 0$ , и это равновесие устойчиво при любых, сколь угодно больших положительных значениях параметра  $N$ , что, вообще говоря, противоречит механической интуиции. Такое противоречие указывает прежде всего на то, что при описании движения в каждой конкретной задаче надо исходить из того способа, каким реализуются связи.

Тем не менее, сформулируем подход к описанию движения системы, стесненной кусочно-гладкой неудерживающей связью, отличающийся от подхода, описанного выше.

1.4. *Иной подход к реализации односторонних связей (“подход II”).* Пусть механическая система, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T,$$

оказывается стесненной неудерживающей связью вида

$$f(\mathbf{q}) \leq 0,$$

где  $f: M^n(\mathbf{q}) \rightarrow R$  – определенная в локальных координатах кусочно-гладкая функция на конфигурационном многообразии  $M^n$ . Пусть  $\Sigma$  – определяемая неравенством (1.5) область, в которой допустимо движение.

Пусть область  $\bar{\Sigma}$ , в которой движение недопустимо, может быть представлена в виде пересечения двух компактных областей  $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2$ , где

$$\bar{\Sigma}_1: f_1(\mathbf{q}) > 0; \quad \bar{\Sigma}_2: f_2(\mathbf{q}) > 0,$$

причем границы областей таковы, что  $\partial\Sigma_1 = \partial\bar{\Sigma}_1$  и  $\partial\Sigma_2 = \partial\bar{\Sigma}_2$

Пусть  $S_{1\delta}$  и  $S_{2\delta}$  – пересечение окрестностей границ  $\partial\Sigma_1$  и  $\partial\Sigma_2$  с областями  $\bar{\Sigma}_1$  и  $\bar{\Sigma}_2$  соответственно.

Если механическое происхождение связи таково, что она может быть реализована посредством потенциальных сил с потенциалом вида

$$U_N = \frac{1}{2}N\varphi(\mathbf{q}), \quad \varphi(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{q} \in \Sigma, \\ f_1^2, & \mathbf{q} \in S_{1\delta} \setminus S_{2\delta}, \\ f_2^2, & \mathbf{q} \in S_{2\delta} \setminus S_{1\delta}, \\ f_1^2 + f_2^2, & \mathbf{q} \in S_{1\delta} \cap S_{2\delta}, \end{cases} \quad (1.12)$$

то движение исходной системы, стесненной связью, приближается движением освобожденной от связи системы с “пенализирующим” потенциалом (1.12) при стремлении к бесконечности безразмерного параметра  $N > 0$ .

*Замечание 6.* В рассуждениях предполагается, что параметр  $N$  можно выбрать настолько большим, что система не попадает в область  $\bar{\Sigma} \setminus (S_{1\delta} \cup S_{2\delta})$ . Поэтому потенциал в указанной области не выписывается.

*Замечание 7.* На случай употребимости данного подхода также распространяются соображения, изложенные в Замечании 3.

Остается еще раз подчеркнуть, что областью приложения обоих сформулированных подходов является малая окрестность тех точек исходной связи, в которых задающие ее соотношения теряют гладкость.

*1.5. Еще один пример.* Рассмотрим еще один пример, позволяющий обсудить вопрос о грубости результатов, получающихся в результате предложенных подходов к описанию связей, или, более точно, чувствительность результатов к способу задания связи.

*Пример 3.* Тяжелая материальная точка движется в первом координатном углу вертикальной плоскости, задаваемом неравенствами

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

где  $Oxy$  – вновь система отсчета, ось  $Ox$  которой горизонтальна, а ось  $Oy$  направлена вдоль восходящей вертикали. Интуитивно ясно, что в задаче имеется семейство неизолированных, и потому неустойчивых, положений равновесия

$$\forall x \geq 0, \quad y = 0.$$

Спрашивается, какие выводы о существовании и устойчивости таких равновесий можно сделать в рамках представленного выше подхода I.

Связь представляет собой объединение двух неудерживающих связей

$$f_1 = x \geq 0, \quad f_2 = y \geq 0.$$

Теперь для того, чтобы освободиться от этих связей, составим потенциал по правилу

$$U_N = \frac{1}{2}N\varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x}),$$

Здесь

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) : y \geq 0, \\ ky^2, & (x, y) : y < 0, \end{cases} \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) : x \geq 0, \\ kx^2, & (x, y) : x < 0, \end{cases}$$

где  $k > 0$  – вновь размерный параметр (“коэффициент упругости”), а  $N > 0$  – безразмерный параметр. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \\ k(x^2 + y^2), & (x, y) : x < 0, y < 0, \\ kx^2, & (x, y) : x < 0, y \geq 0, \\ ky^2, & (x, y) : x \geq 0, y < 0. \end{cases}$$

В области  $y < 0, x > 0$  функция  $W$  – гладкая:

$$W = mgy + Nky^2.$$

Ее критические точки задаются уравнениями

$$W_x = 0, \quad W_y = mg + 2Nky = 0.$$

На отвечающих им неизолированных равновесиях

$$x(N) = x_*, \quad y(N) = -\frac{mg}{2kN}, \quad \forall x_* > 0$$

напряжена лишь одна из компонент связи, причем

$$x(N) = x_*, \quad y(N) = y_0 + \varepsilon y_1 = 0 + \varepsilon \left( -\frac{mg}{2k} \right), \quad \varepsilon = \frac{1}{N}. \quad (1.13)$$

С увеличением жесткости  $N \rightarrow \infty$  имеем  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и каждое неизолированное положение равновесие (1.13) стремится к определенному неизолированному положению равновесия исходной системы, стесненной связью (рис. 3).

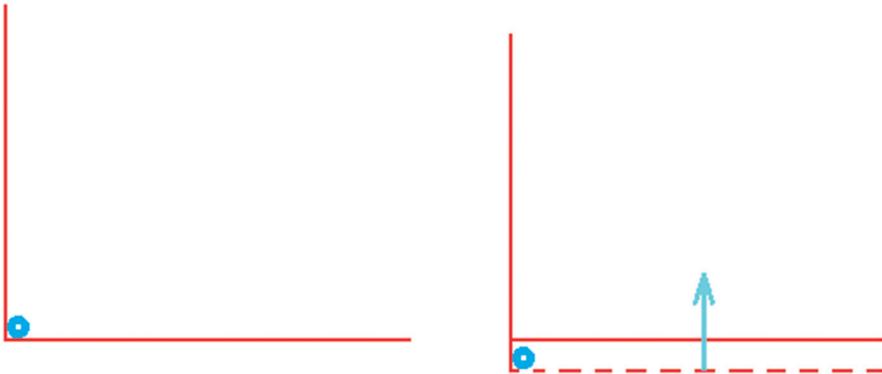


Рис. 3. К примеру 3.

Так как в этой же области вторые производные имеют вид

$$W_{xx} = W_{xy} = 0, \quad W_{yy} = 2kN,$$

то один из коэффициентов Пуанкаре равен тождественно нулю значениях  $N > 0$ , и это равновесие неустойчиво, что и требовалось. Впрочем, вывод о неустойчивости можно было сделать и из неизолированности найденных равновесий.

Заметим, что рассмотренная в примере система негрубая, что должно как-то сказаться по крайней мере на равновесиях. Об этом речь пойдет ниже.

**2. Другой способ реализации связей.** Возникает вопрос, в какой мере полученные результаты относительно существования и устойчивости найденных в предыдущем разделе равновесий чувствительны к выбору способу реализации связей. Для ответа на этот вопрос предположим, что прямые, ограничивающие область, где возможно движение, подвешены и подпружинены несколько иным образом.

Пусть  $a = (c, s) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  – единичный вектор в системе отсчета  $Oxy$ . Тогда  $x = x_0 + cp$ ,  $y = y_0 + sp$ ,  $p \in R$  – параметрическое задание прямой, проходящей через точку  $(x_0, y_0)$  вдоль вектора  $a$ . Будем считать, что связи задаются соотношениями вида

$$f \leq 0, \quad f = s(x - x_0) - c(y - y_0)$$

при  $\alpha = \alpha_0$ .

Заменим связь на силовое воздействие. Будем считать, что прямая, определяющая связь, может быть повернута вокруг точки  $(x_0, y_0)$  на угол  $\delta\alpha$ . Пусть такому повороту препятствует воздействие со стороны “витой пружины, работающей на кручение”. В этом случае будем считать, что на систему действует момент силы с потенциалом

$$U_N = \frac{N}{2} \cdot \begin{cases} 0, & \delta\alpha \geq 0, \\ k\delta\alpha^2, & \delta\alpha < 0 \end{cases}$$

или

$$U_N = \frac{N}{2} \cdot \begin{cases} 0, & \delta\alpha \leq 0, \\ k\delta\alpha^2, & \delta\alpha > 0, \end{cases}$$

в зависимости от того, в какой полуплоскости пребывает точка в случае, когда приближаемая связь односторонняя. Здесь и далее в этом примере  $k$  – размерный параметр (“коэффициент упругости на кручение”),  $N > 0$  – безразмерный параметр.

Вернемся к рассмотрению примера 1.

*Пример 1 (продолжение).* Прежде всего рассмотрим случай, когда исходная связь предполагается двусторонней. Тогда имеются две прямые, по которым одновременно должна скользить изучаемая точка. Пусть это будут, например, прямые

$$x = a_1 + p_1c_1, \quad y = a_1 + p_1s_1, \quad p_1 \in R,$$

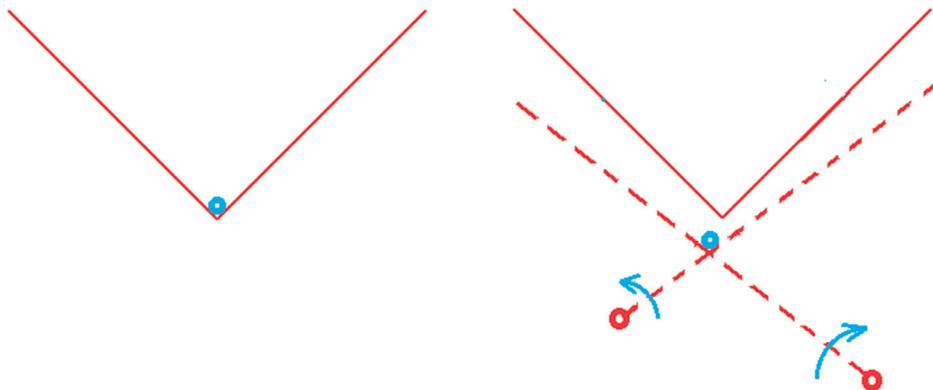


Рис. 4. К примеру 1 (продолжение).

$$c_1 = \cos(\alpha_{01} + \delta\alpha_1), \quad s_1 = \sin(\alpha_{01} + \delta\alpha_1), \quad \alpha_{01} = \frac{\pi}{4},$$

$$x = a_2 + p_2 c_2, \quad y = -a_2 + p_2 s_2, \quad p_2 \in R,$$

$$c_2 = \cos(\alpha_{02} + \delta\alpha_2), \quad s_2 = \sin(\alpha_{02} + \delta\alpha_2), \quad \alpha_{02} = \frac{3\pi}{4}.$$

Нетрудно видеть, что точки, отвечающие нулевым значениям параметров  $p_1, p_2$ , выбраны на прямых, определяющих исходную связь (рис. 4).

Вычисления показывают, что прямые пересекаются в точке с координатами

$$X = \frac{a_1 c_2 (c_1 - s_1) + a_2 c_1 (s_2 + c_2)}{c_1 s_2 - s_1 c_2}, \quad Y = \frac{a_1 s_2 (c_1 - s_1) + a_2 s_1 (s_2 + c_2)}{c_1 s_2 - s_1 c_2}.$$

Тогда потенциальную энергию запишем в виде

$$U' = mgY + \frac{Nk}{2}(\delta\alpha_1^2 + \delta\alpha_2^2). \quad (2.1)$$

Поскольку в дальнейшем параметр  $N$  предполагается неограниченно возрастающим, то вместо потенциальной энергии в виде (2.1) удобнее пользоваться выражением

$$U = \varepsilon mgY + \frac{k}{2}(\delta\alpha_1^2 + \delta\alpha_2^2), \quad \varepsilon = \frac{1}{N}. \quad (2.2)$$

Равновесия системы определяются из соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial \delta\alpha_1} = \varepsilon mg \frac{\partial Y}{\partial \delta\alpha_1} + k\delta\alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta\alpha_2} = \varepsilon mg \frac{\partial Y}{\partial \delta\alpha_2} + \delta\alpha_2 = 0. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что в пределе, при  $\varepsilon = 0$ , уравнение (2.3) имеет единственное решение

$$\delta\alpha_1 = \delta\alpha_2 = 0.$$

Поэтому при малых значениях  $\epsilon \neq 0$  будем искать решение в виде

$$\delta\alpha_1 = 0 + \epsilon\delta A_1 + \dots, \quad \delta\alpha_2 = 0 + \epsilon\delta A_2 + \dots \quad (2.4)$$

Подстановка выражений (2.4) в уравнения (2.3), разложение левых частей в ряд по  $\epsilon \neq 0$  и решение возникающих уравнений дают

$$\delta A_1 = \frac{mg}{k}a_1, \quad \delta A_2 = \frac{mg}{k}a_2.$$

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\epsilon \rightarrow 0$ , найденное равновесие стремится к равновесию системы, стесненной связью.

Для исследования достаточных условий устойчивости найденного равновесия вычислим на нем вторую вариацию потенциальной энергии. Вычисления показывают, что выражение для второй вариации имеет вид

$$\begin{aligned} 2\delta^2 U = & \left( 1 - 2a_1(a_1 - a_2) \left( \frac{mg}{k} \right)^2 \epsilon^2 + \dots \right) \xi_1^2 + \\ & + 2 \frac{mg}{k} \epsilon \left( (a_1 - a_2) + 2(a_1^2 + a_2^2) \frac{mg}{k} \epsilon + \dots \right) \xi_1 \xi_2 + \\ & + \left( 1 + 2a_2(a_1 - a_2) \left( \frac{mg}{k} \right)^2 \epsilon^2 + \dots \right) \xi_2^2. \end{aligned}$$

При достаточно малых значениях  $\epsilon$  эта квадратичная форма положительно определена, и равновесие устойчиво по Ляпунову вне зависимости от значений параметров  $a_1$  и  $a_2$ .

Полученный результат интуитивно ясен, он обусловлен прежде всего грубостью рассмотренной механической системы.

Теперь применим тот же подход к примеру 3.

*Пример 3 (продолжение).* Также рассмотрим случай, когда исходная связь предполагается двусторонней. Тогда имеются две прямые, по которым одновременно должна скользить изучаемая точка. Пусть этими прямыми будут

$$x = a_1 + p_1 c_1, \quad y = p_1 s_1, \quad p_1 \in R,$$

$$c_1 = \cos(\alpha_{01} + \delta\alpha_1), \quad s_1 = \sin(\alpha_{01} + \delta\alpha_1), \quad \alpha_{01} = 0,$$

$$x = p_2 c_2, \quad y = a_2 + p_2 s_2, \quad p_2 \in R,$$

$$c_2 = \cos(\alpha_{02} + \delta\alpha_2), \quad s_2 = \sin(\alpha_{02} + \delta\alpha_2), \quad \alpha_{02} = \frac{\pi}{2}.$$

Вновь точки, отвечающие нулевым значениям параметров  $p_1, p_2$ , выбраны на прямых, определяющих исходную связь. Точка пересечения прямых определяется соотношениями

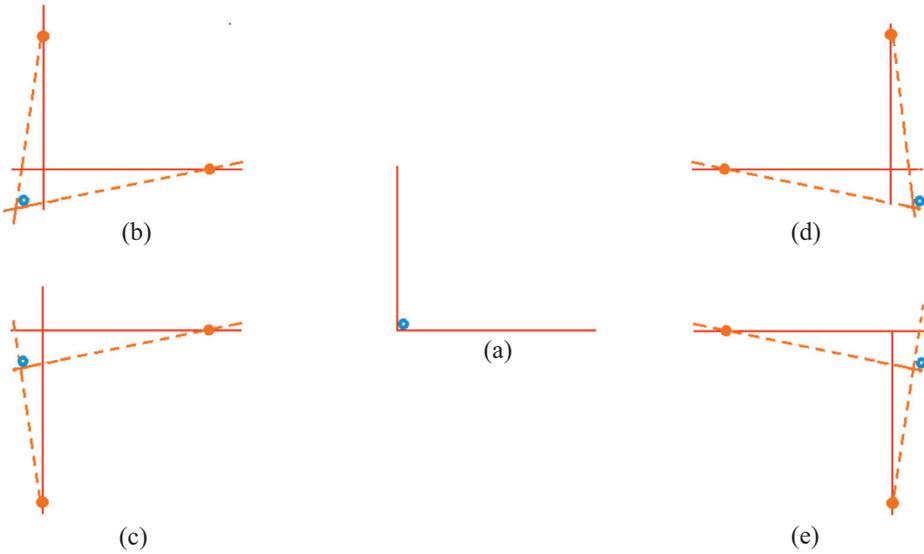


Рис. 5. К примеру 3 (продолжение).

$$X = \frac{c_2(a_1s_1 + a_2c_1)}{c_1s_2 - c_2s_1}, \quad Y = -\frac{s_1(a_1s_2 + a_2c_2)a_1s_2 + a_2c_2}{c_1s_2 - c_2s_1}.$$

Для начала будем считать обе исходные связи удерживающими и, как и в примере 1, воспользуемся выражением (2.2) для потенциала. Равновесия системы также определяются из соотношений (2.3).

Нетрудно видеть, что в пределе, при  $\varepsilon = 0$  уравнение (2.3) имеет единственное решение

$$\delta\alpha_1 = \delta\alpha_2 = 0.$$

Поэтому при малых значениях  $\varepsilon \neq 0$  будем искать решение в виде

$$\delta\alpha_1 = 0 + \varepsilon\delta A_{11} + \varepsilon^2\delta A_{12} + \dots, \quad \delta\alpha_2 = 0 + \varepsilon\delta A_{21} + \varepsilon^2\delta A_{22} + \dots.$$

Подстановка выражений (2.4.) в уравнения (2.3), разложение левых частей в ряд по  $\varepsilon \neq 0$  и решение возникающих уравнений дают

$$\delta A_{11} = \frac{mg}{k}a_1, \quad \delta A_{12} = 0, \quad \delta A_{21} = 0, \quad \delta A_{22} = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 a_1 a_2.$$

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  найденное равновесие стремится к равновесию системы, стесненной связью.

В зависимости от знаков величин  $a_1$  и  $a_2$  возможны четыре различных ситуации (рис. 5): из равновесия предельной системы (а) для этих ситуаций могут иметь место изображенные на этом рисунке расположения (b)–(e).

Для исследования достаточных условий устойчивости найденного равновесия вычислим на нем вторую вариацию потенциальной энергии. Вычисления показывают, что выражение для второй вариации имеет вид

$$\begin{aligned} 2\delta^2 U = & \left( 1 - 2a_1^2 \left( \frac{mg}{k} \right)^2 \epsilon^2 + \dots \right) \xi_1^2 + \\ & + \frac{mg}{k} \epsilon \left( a_2 + 2a_1^2 \frac{mg}{k} \epsilon + \dots \right) \xi_1 \xi_2 + (1 + \dots) \xi_2^2. \end{aligned}$$

При достаточно малых значениях  $\epsilon$  эта квадратичная форма положительно определена, и равновесие устойчиво по Ляпунову вне зависимости от значений параметров  $a_1$  и  $a_2$ .

Вместе с тем, ситуация становится совершенно другой, если теперь предположить, что связи, наложенные на систему, неудерживающие, и точка в пределе может совершать движение лишь в первом квадранте. Вычисления показывают, что для способов реализации связей, отвечающих рис. 5(b) и 5(c), существует единственное положение равновесия, в то время как для способов реализации, отвечающих рис. 5(d) и 5(e), равновесия не существуют. Таким образом, как показывает пример, решения оказываются чувствительными к способу реализации связей.

**3. Некоторые задачи.** Опираясь на результаты, представленные выше, рассмотрим две задачи.

*Задача 1.* В вертикальной плоскости на двух сделанных из одного и того же материала почти нерастяжимых невесомых тросах  $T_a$  и  $T_b$ , длины которых составляют  $a$  и  $b$  соответственно, к точкам  $A$  и  $B$  подвешена тяжелая точка  $P$  массы  $m$  таким образом, что  $\angle APB = \pi/2$  (рис. 6). Ставится задача исследования свойств равновесий.

*Решение.* Пусть  $m$  — масса точки,  $g$  — ускорение силы тяжести. Пусть  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_b$  — круги с центрами в точках  $A$  и  $B$  с радиусами, равными  $a$  и  $b$  соответственно,  $\partial\Sigma_a$  и  $\partial\Sigma_b$  — окружности, ограничивающие эти круги.

Наличие троса  $T_a$  препятствует движению вне круга  $\Sigma_a$ , т.е. в области  $\bar{\Sigma}_a = R^2 \setminus \Sigma_a$ . Аналогично, наличие троса  $T_b$  препятствует движению вне круга  $\Sigma_b$ , т.е. в области  $\bar{\Sigma}_b = R^2 \setminus \Sigma_b$ . Таким образом, движение точки  $P$  может осуществляться лишь в лунке  $\Sigma = \Sigma_a \cap \Sigma_b$ . В областях  $\Sigma_{ab}^- = \Sigma_a \setminus \Sigma_b$  и  $\Sigma_{ab}^+ = \Sigma_b \setminus \Sigma_a$  движение системы ограничено лишь одной связью. В области  $\Sigma_{ab}^- = R^2 \setminus (\Sigma_a \cup \Sigma_b)$  движение невозможно.

Введем систему отсчета  $Oxy$  с началом в точке  $O$ -той точке пересечения окружностей  $\partial\Sigma_a$  и  $\partial\Sigma_b$ , которая находится под точкой  $B$ . Будем считать, что ось  $Ox$  направлена горизонтально вправо, а ось  $Oy$  направлена вертикально вверх. Обозначим  $(x, y)$  координаты точки  $P$ .

В этом случае потенциальная энергия точки  $P$  записывается как

$$U_g = mgy,$$

а уравнения связей, определяемые из условий нерастяжимости тросов, записываются как

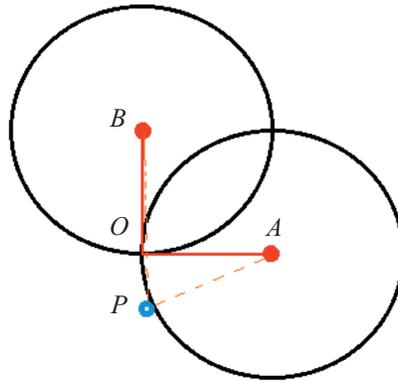


Рис. 6. К задаче 1: тяжелая точка, подвешенная на двух тросах.

$$f_a = \frac{1}{2}(r_a - a) \leq 0, \quad f_b = \frac{1}{2}(r_b - b) \leq 0,$$

$$r_a = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}, \quad r_b = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}.$$

Следуя методике, описанной выше, заменим воздействие каждой из связей на соответствующую силу. Тогда потенциальная энергия системы в соответствующих областях примет следующий вид:

$$U = \begin{cases} mgy, & (x, y) \in \Sigma_{ab}, \\ mgy + Nkf_a^2, & (x, y) \in \Sigma_{\bar{a}b}, \\ mgy + Nkf_b^2, & (x, y) \in \Sigma_{a\bar{b}}, \\ mgy + Nk(f_a^2 + f_b^2), & (x, y) \in \Sigma_{\bar{a}\bar{b}}. \end{cases}$$

Здесь  $k$  – размерная величина (“коэффициент упругости”),  $N$  – безразмерный параметр, который будет считаться сколь угодно большим.

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что в областях  $\Sigma_{ab}$ ,  $\Sigma_{\bar{a}}$  и  $\Sigma_{a\bar{b}}$  равновесий нет для достаточно больших значений параметра  $N$ . Поэтому приведем выкладки лишь для области  $\Sigma_{\bar{a}\bar{b}}$ . Уравнения равновесий можно записать как (ср., например, с [9])

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \lambda_a k \frac{x - a}{r_a} + \lambda_b k \frac{x}{r_b} = 0, \tag{3.1}$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = mg + \lambda_a k \frac{y}{r_a} + \lambda_b k \frac{y - b}{r_b} = 0, \tag{3.2}$$

$$(x - a)^2 + y^2 - a^2 = \epsilon \lambda_a, \quad x^2 + (y - b)^2 - b^2 = \epsilon \lambda_b, \quad \epsilon = \frac{1}{N}. \tag{3.3}$$

Если  $\epsilon$  довольно мало, т.е.  $N$  довольно велико, то решение алгебраической системы из четырех уравнений (3.1)–(3.3) относительно четырех неизвестных  $(x, y, \lambda_a, \lambda_b)$  можно искать в виде формальных рядов по степеням  $\epsilon$ :

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots, \quad p \in \{x, y, \lambda_a, \lambda_b\}.$$

Подставляя эти разложения в уравнения (3.1)–(3.3) и собирая слагаемые при одинаковых степенях  $\epsilon$ , прежде всего находим

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \lambda_{a0} = 0, \quad \lambda_{b0} = \frac{mg}{k}.$$

В нулевом приближении, естественно, точка  $P$  находится на вертикали под точкой  $B$  на расстоянии  $b$ , и трос  $T_a$  между точками  $A$  и  $P$  не натянут<sup>2</sup>.

Далее, из уравнений первого приближения находим

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{mg}{k}, \quad \lambda_{a1} = 0, \quad \lambda_{b1} = 0.$$

Иными словами, в первом приближении точка  $P$  по-прежнему находится на вертикали, но трос  $T_b$  удлинился. Иными словами, точка  $P$  оказалась внутри области  $\Sigma_{ab}$ . Натяжение тросов в этом приближении не претерпевает изменений по сравнению с предыдущим.

Наконец, из уравнения второго приближения находим

$$x_2 = \frac{m^2 g^2}{2ak^2}, \quad y_2 = 0, \quad \lambda_{a2} = \frac{m^3 g^3}{2k^3 ba}, \quad \lambda_{b2} = 0.$$

Иными словами, во втором приближении проявляется отклонение точки  $P$  по горизонтали в сторону точки  $B$ . При этом впервые проявляется натяжение троса  $T_a$ . В этом приближении изменение положения точки  $P$  по вертикали не проявляется, равно как не проявляется изменение натяжения троса  $T_b$ .

Вычисление вторых производных

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

потенциала  $U$ , выражения, для которых громоздки и не приводятся, в найденном положении равновесия позволяет не только убедиться в его устойчивости, но и из уравнения

$$\det \begin{vmatrix} -m\omega^2 + U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & -m\omega^2 + U_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

найти частоты  $\omega_{\pm}$  малых колебаний. После вычислений и разложения по малому параметру  $\epsilon$  до членов нулевого порядка по  $\epsilon$  имеем

<sup>2</sup>  $\lambda_{a0} = 0$ , т.е. в нулевом приближении эта связь не напряжена.

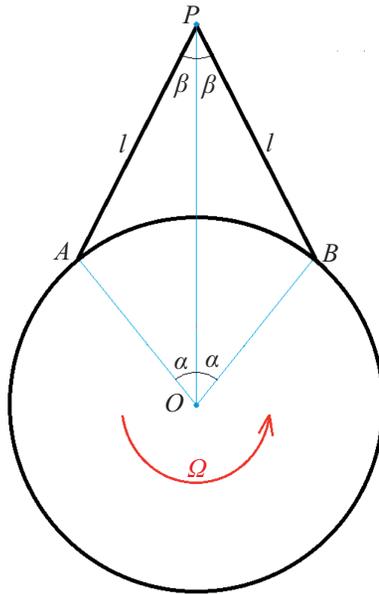


Рис. 7. К задаче 2: точка, подвешенная к вращающемуся небесному телу на двух тросах.

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k}{\epsilon m} \pm \frac{g(a + (a^2 + 4b^2)^{1/2})}{2ab} + \dots$$

Как можно видеть, при большой жесткости основной вклад в частоты дает слагаемое, обусловленное использованием приближения гуковской пружинки. И лишь в поправке начинает проявляться наличие силы тяжести.

*Задача 2.* В экваториальной плоскости небесного тела, представляющего собой однородный шар радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ , равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\Omega$ , располагаются точки  $A$  и  $B$ , к которым на одинаковых, сделанных из одного и того же материала, почти нерастяжимых невесомых тросах  $T_a$  и  $T_b$  подвешена точка  $P$  массы  $m$ . Ставится задача исследования свойств ее равновесий относительно вращающейся вместе с телом системы отсчета. Здесь и далее  $G$  — произведение массы небесного тела на гравитационную постоянную,  $\ell$  — длина тросов в нерастянутом состоянии,  $\angle AOB = 2\alpha$  (рис. 7).

*Решение.* Пусть  $Oxuz$  — связанная с телом система отсчета, ось  $Ox$  которой коллинеарна и сонаправлена вектору  $\overline{AB}$ , ось  $Oy$  направлена вдоль среднего перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на отрезок  $AB$ , ось  $Oz$  направлена вдоль вектора угловой скорости и дополняет систему отсчета до правой тройки.

Если  $s_\alpha = \sin \alpha$ ,  $c_\alpha = \cos \alpha$ , то в этой системе отсчета

$$\overline{OA} = (-Rs_\alpha, Rc_\alpha, 0)^T, \quad \overline{OB} = (Rs_\alpha, Rc_\alpha, 0)^T, \quad \overline{OP} = (x, y, z)^T.$$

Тогда

$$\overline{AP} = (x + Rs_\alpha, y - Rc_\alpha, z)^T, \quad \overline{BP} = (x - Rs_\alpha, y - Rc_\alpha, z)^T.$$

При этом

$$\begin{aligned} r_a &= \sqrt{(\overline{AP}, \overline{AP})} = \sqrt{(x + Rs_\alpha)^2 + (y - Rc_\alpha)^2 + z^2}, \\ r_b &= \sqrt{(\overline{BP}, \overline{BP})} = \sqrt{(x - Rs_\alpha)^2 + (y - Rc_\alpha)^2 + z^2}, \\ r &= \sqrt{(\overline{OP}, \overline{OP})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_b$  – шары с центрами в точках  $A$  и  $B$  с радиусами, равными  $\ell$ , а  $\partial\Sigma_a$  и  $\partial\Sigma_b$  – сферы, ограничивающие эти круги. Уравнения связей запишутся в виде

$$f_a = r_a - \ell \leq 0, \quad f_b = r_b - \ell \leq 0.$$

В положении относительного равновесия точка  $P$  подвержена действию силы притяжения со стороны тела с потенциальной энергией

$$U'_N = mU_N, \quad U_N = -Gr^{-1},$$

где  $G$  – произведение гравитационной постоянной на массу тела, и центробежной силы с потенциальной энергией

$$U'_c = mU_c, \quad U_c = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

а также действию со стороны тросов, которое в рамках сделанных выше предположений может быть представлено как упругая сила с потенциалом

$$U'_e = \frac{N}{2}k'(f_a^2 + f_b^2).$$

Если обозначить  $k' = km$ , то

$$U'_e = mU_e, \quad U_e = \frac{N}{2}k(f_a^2 + f_b^2).$$

Относительным равновесиям отвечают критические точки потенциала

$$U = U_N + U_a + U_e.$$

Вместо координаты  $y$  представляется целесообразным введение координаты  $\eta$ :

$$y = y_0 + \eta, \quad y_0 = Rc_\alpha + \sqrt{\ell^2 - R^2s_\alpha^2}.$$

Нетрудно видеть, что на решениях из этого класса выполняется условие

$$y_0 > Rc_\alpha. \quad (3.4)$$

*Замечание 5.* Формально говоря, решения, для которых  $y_0 = Rc_\alpha - \sqrt{\ell^2 - R^2s_\alpha^2}$  тоже должны быть рассмотрены. Но они нефизичны: для них тросы пересекают само небесное тело.

*Существование решений.* Уравнения относительных равновесий представимы в виде

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = k \left( \frac{\lambda_a (x + R s_a)}{r_a} + \frac{\lambda_b (x - R s_a)}{r_b} \right) + mx \left( \frac{G}{r^3} - \omega^2 \right) = 0, \quad (3.5)$$

$$U_\eta = \frac{\partial U}{\partial \eta} = k \left( \sqrt{\ell^2 - R^2 s_a^2} + \eta \right) \left( \frac{\lambda_a}{r_a} + \frac{\lambda_b}{r_b} \right) +$$

$$+ m \left( R c_a + \sqrt{\ell^2 - R^2 s_a^2} + \eta \right) \left( \frac{G}{r^3} - \omega^2 \right) = 0,$$

$$U_z = \frac{\partial U}{\partial z} = z \left( k \left( \frac{\lambda_a}{r_a} + \frac{\lambda_b}{r_b} \right) + \frac{mG}{r^3} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями

$$r_a - \ell - \epsilon \lambda_a = 0, \quad r_b - \ell - \epsilon \lambda_b = 0, \quad (3.8)$$

в пределе, при  $\epsilon \rightarrow 0$ , задающими уравнения связей.

Будем искать решения пяти алгебраических уравнений (3.5)–(3.8) относительно пяти неизвестных в виде формальных рядов по степеням  $\epsilon$ :

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots, \quad p \in \{x, \eta, z, \lambda_a, \lambda_b\}.$$

Подставляя эти разложения в уравнения (3.5)–(3.8) и собирая слагаемые при одинаковых степенях  $\epsilon$ , прежде всего находим нулевые приближения интересующих нас решений:

$$x_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \lambda_{a0} = \lambda_{b0} = \frac{m y_0 \ell}{2k \sqrt{\ell^2 - R^2 s_a^2}} \left( \omega^2 - \frac{G}{y_0^3} \right).$$

Поскольку речь идет о невесомых тросах, то они окажутся натянутыми лишь при выполнении условия

$$\omega^2 - \frac{G}{y_0^3} > 0. \quad (3.9)$$

Собирая в уравнениях (3.5)–(3.9) слагаемые первой степени по  $\epsilon$  и принимая во внимание уже найденное нулевое приближение этих решений, из получающейся линейной системы уравнений находим

$$x_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{\ell^2 y_0}{2k (y_0 - R c_a)^2} \left( \omega^2 - \frac{G}{y_0^3} \right), \quad z_1 = 0. \quad (3.10)$$

Как можно видеть, при выполнении условия натянутости тросов (3.9) их растяжение в первом приближении определяется положительной величиной  $\eta_1$  из (3.10).

Достаточные условия устойчивости. Для исследования достаточных условий устойчивости найдем вторую вариацию измененного потенциала на рассматриваемых решениях в рассматриваемом приближении. Имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2N \frac{kR^2 s_\alpha^2}{\ell^2} - \frac{3y_0 R^2 s_\alpha^2 - \ell^2 R c_\alpha}{\ell^2 (y_0 - R c_\alpha)} \left( \omega^2 - \frac{G}{y_0^3} \right) + \dots, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 2N \frac{k(y_0 - R c_\alpha)^2}{\ell^2} - 3 \frac{(y_0 - R c_\alpha)^2 - \ell^2}{\ell^2 (y_0 - R c_\alpha)} y_0 \left( \omega^2 - \frac{G}{y_0^3} \right) - \omega^2 - \frac{2G}{y_0^3} + \dots, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{y_0^4 \omega^2 - G R c_\alpha}{y_0^3 (y_0 - R c_\alpha)} + \dots \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь отточиями помечены слагаемые порядка малости один и выше по параметру  $\epsilon$ .

Так как смешанные производные (3.14) равны нулю, то устойчивость определяется знаками коэффициентов (3.11)–(3.13). В коэффициентах из (3.11) и (3.12) решающую роль играют первые слагаемые. Эти слагаемые положительны и неограниченно возрастают при  $N \rightarrow \infty$ . Остается коэффициент (3.13). Этот коэффициент положителен на рассматриваемых решениях, так как для них выполнено условие (3.4):  $y_0 > R c_\alpha$ .

*Замечание 8.* Если заменить тросы на упругие пружины, допускающие работу на сжатие, то станет ясен смысл условия устойчивости  $U_{zz} > 0$ : при

$$\omega: y_0^4 \omega^2 - G R c_\alpha = 0$$

от относительных равновесий, для которых точка  $P$  расположена на оси  $Oz$ , отвечают относительные равновесия, задаваемые равенством нулю второго множителя в уравнении (3.7). Для таких равновесий точка  $P$  располагается в плоскости  $Ouz$ , содержащих ось вращения. Существование такого рода равновесий было подмечено в [11] (см. также [12]). В настоящей работе, поскольку речь идет о тросах, такие неустойчивые относительные равновесия более не обсуждаются.

**4. Некоторые выводы и исторические замечания.** Как показали выполненные исследования, уже при изучении равновесий механических систем, стесненных односторонними связями, выясняется, что их свойства существенным образом зависят от того, каковы по происхождению силы, реализующие эти связи. На такого рода чувствительность, в целом имеющую место для систем, стесненных связями, было обращено внимание в публикации [8].

Как указал автору рецензент, возможно, имеется глубинная связь между представленными в работе способами описания положений равновесия и общими теоремами о пределах по разным базам функций нескольких переменных, также чувствительных к негладкости соответствующих функций (см., например, [13]). Этот вопрос заслуживает отдельных исследований.

Общая теория систем с неудерживающими связями представляет собой предмет интенсивных и разносторонних исследований, результаты которых, помимо уже упомянутых, представлены, в частности, в работах [14–24].

Существенным мотивом для исследований в данной области остается изучение свойств динамики орбитальных тросовых систем. Среди них, в частности, имеются системы с так называемой леерной связью (см., например, [25–28]), когда на поверхности астероида закреплены оба конца троса, и системы с двумя тросами [29, 30]. Для систем обоих типов в случае, когда тросы прикреплены к оси динамической симметрии астероида, исследованы, в частности, области провисания и области безударных движений. Настоящее исследование в определенной мере дополняет результаты, полученные в цитируемых работах.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант 24-21-20143.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan, 1877.
2. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
3. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Изд-во URSS, 1998. 168 с.
4. *Várkonyi P.L., Domokos G.* Symmetry, Optima and Bifurcations in Structural Design // Nonlinear Dynamics. 2006. V. 43. P. 47–58.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-006-0749-7>
5. *Березкин Е.Н.* Курс теоретической механики. М.: МГУ, 1974. 647 с.
6. *Rubin H., Ungar P.* Motions under a strong constraining force // Commun. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65–87.  
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160100103>
7. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comput. Methods in Appl. Math. Eng. 1972. V. 1. № 1. P. 1–16.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(72\)90018-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(72)90018-7)
8. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. № 6. С. 883–894.
9. *Буров А.А.* О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // ПММ. 2003. Т. 67. № 2. С. 222–230.
10. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.
11. *Буров А.А., Косенко И.И.* Об устойчивости и бифуркациях относительных равновесий маятника, подвешенного на экваторе // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 3. С. 224–227.  
<https://doi.org/10.7868/S0023420613030011>
12. *Буров А., Косенко И.* О перевернутом маятнике // Квант. 2014. № 4. С. 29–31.
13. *Теляковский С.А.* Курс лекций по математическому анализу. Семестр II. Лекционные курсы НОЦ/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). Вып. 17. М.: МИАН, 2011. 192 с. <https://doi.org/10.4213/lkn17>
14. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.

15. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неустойчивыми связями // ПММ. 1984. Т. 48. № 5. С. 725–733.
16. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
17. *Дерябин М.В.* О реализации неустойчивых связей // ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 136–140.
18. *Дерябин М.В., Козлов В.В.* К теории систем с односторонними связями // ПММ. 1995. Т. 59. № 4. С. 531–539.
19. *Дерябин М.В.* Общие принципы динамики и теория односторонних связей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 1. С. 53–59.
20. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Междунар. программа образования, 1997. 336 с.
21. *Березинская С.Н., Кугушев Е.И.* О движении механических систем с односторонними связями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 3. С. 18–24.
22. *Румянцев В.В.* О вариационных принципах для систем с неустойчивыми связями // ПММ. 2006. Т. 70. № 6. С. 902–914.
23. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 236 p.
24. *Отраднава Л.С.* Максимальность действия по Гамильтону для систем с односторонними связями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. № 4. С. 70–72.
25. *Rodnikov A.V.* The algorithms for capture of the space garbage using “Leier constraint” // Regular and Chaotic Dynamics. 2006. V. 11. № 4. P. 483–489.  
<https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>
26. *Родников А.В.* О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. С. 295–311.
27. *Родников А.В.* О компланарных равновесиях космической станции на тросе, закрепленном на прецессирующем астероиде // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 309–322.
28. *Родников А.В.* Моделирование динамики космической станции в окрестности астероида // Мат. моделир. и числ. методы. 2016. № 10. С. 55–68.
29. *Родников А.В.* Математическая модель двухтросовой системы космическая станция — динамически симметричный астероид // Мат. моделир. и числ. методы. 2017. № 16. С. 92–101.  
<https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-4-92101>
30. *Rodnikov A.V.* On safe configurations of a natural-artificial space tether system // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. № 1. P. 040018.  
<https://doi.org/10.1063/1.5034621>

## ON THE SENSITIVITY OF EQUILIBRIA TO THE METHOD OF REALIZATION OF UNILATERAL CONSTRAINTS WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARIES

A. A. Burov

*Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia*

*\*E-mail: jtm@narod.ru*

**Abstract** – Two ways of implementing unilateral holonomic constraints with piecewise smooth boundaries are considered. Examples are given that testify both in favor of the proposed methods and against them. The sensitivity of the equilibria of a system subjected to holonomic constraints with piecewise smooth boundaries to the way these constraints are implemented is also discussed using examples. Two problems from the mechanics of systems constrained by a pair of inextensible weightless tethers are considered. In one of these problems, which is most likely academic in nature, equilibria are found and small oscillations near these equilibria are studied. Another problem relates to tethered systems deployed near a uniformly rotating celestial body. For it, the relative equilibria of a load suspended on a pair of tethers are found, and sufficient conditions for the stability of these relative equilibria are studied.

*Keywords:* equilibria of mechanical systems subjected to constraints, holonomic constraints, ways of implementing constraints, unilateral constraints, piecewise smooth constraints

### REFERENCES

1. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan, 1877.
2. *Rubanovskii V.N., Stepanov S.Ia.* On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the liapunov function from the integrals of the equations of motion // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1969. V. 33. № 5. P.882–890.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90096-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90096-3)
3. *Karapetyan A.V.* Stability of steady motions. URSS Publishing House, Moscow, 1998 [in Russian].
4. *Varkonyi P.L., Domokos G.* Symmetry, Optima and Bifurcations in Structural Design // *Nonlinear Dynamics.* 2006. V. 43. P. 47–58.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-006-0749-7>
5. *Berezkin E.N.* Course of theoretical mechanics. Moscow State University, Moscow, 1974 [in Russian].
6. *Rubin H., Ungar P.* Motions under a strong constraining force // *Commun. Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. № 1. P. 65–87.  
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160100103>
7. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // *Comput. Methods in Appl. Math. Eng.* 1972. V. 1. № 1. P. 1–16.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(72\)90018-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(72)90018-7)

8. *V.V. Kozlov*. A constructive method of establishing the validity of the theory of systems with non-retaining constraints // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1988. V. 52. № 6. P. 691–699.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(88\)90001-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(88)90001-9)
9. *Burov A.A.* The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003. V. 67. № 2. P. 193–200.  
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90005-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90005-0)
10. *Zhuravlev V.F., Fufaev N.A.* *Mechanics of systems with non-retaining constraints* (Nauka, Moscow, 1993) [in Russian].
11. *Burov A.A., Kosenko I.I.* Stability and bifurcations of relative equilibria of a pendulum suspended on the equator // *Cosmic Res.* 2013. V. 51. P. 209–212.  
<https://doi.org/10.1134/S0010952513030015>
12. *Burov A., Kosenko I.* On the inverted pendulum // *Kvant.* 2014. № 4. P. 29–31 [in Russian].
13. *Telyakovskiy S.A.* A course of lectures on mathematical analysis. Semester II. REC Lecture courses / *Mathematical V. A. Steklov Institute of the Russian Academy of Sciences (MIAN)*. Iss. 17. (MIAN, Moscow, 2011) [in Russian].
14. *Kozlov V.V.* Implementation of non-integrable constraints in classical mechanics // *Dokl. USSR Academy of Sciences*. 1983. V. 272. № 3. P. 550–554.
15. *Ivanov A.P.* On the stability of systems with non-retaining constraints // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. V. 48. № 5. P. 523–528.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(84\)90054-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90054-6)
16. *Kozlov V.V., Treshchev D.V.* *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*. Publishing House of Moscow State University, Moscow, 1991. [in Russian].
17. *Deryabin M.V.* The realization of unilateral constraints // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1994. V. 58. № 6. P. 1079–1083.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90124-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90124-4)
18. *Deryabin M.V., Kozlov V.V.* A theory of systems with unilateral constraints // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1995. V. 59. № 4. P. 505–512.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00059-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00059-3)
19. *Deryabin M.V.* General principles of dynamics and theory of unilateral constraints // *Vestn. Moscow State Univ. Ser. 1. Mathem., mech.* 1998. № 1. P. 53–59.
20. *Ivanov A.P.*, *Dynamics of systems with mechanical collisions*. International Education Program, Moscow, 1997 [in Russian].
21. *Berezinskaya S.N., Kugushev E.I.* On the motion of mechanical systems with unilateral constraints // *Vestn. Moscow State Univ. Ser.1. Mathem. Mech.* 2005. № 3. P. 18–24.
22. *Rumyantsev V.V.* Variational principles for systems with unilateral constraint // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2006. V. 70. № 6. P. 808–818.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.002>
23. *Leine R.I., van de Wouw N.* *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 236 p.
24. *Otradnova L.S.* Maximum of action for Hamiltonian systems with unilateral constraints // *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2012. № 67. P. 103–104.  
<https://doi.org/10.3103/S0027133012040061>
25. *Rodnikov A.V.* The algorithms for capture of the space garbage using “Leier constraint” // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2006. V. 11. № 4. P. 483–489.  
<https://doi.org/10.1070/RD2006v011n04ABEH000366>

26. *Rodnikov A.V.* On the motion of a material point along a leyer fixed on a precessing rigid body,” *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2011. V. 7. № 2. P. 295–311.  
<https://doi.org/10.20537/nd1102007>
27. *Rodnikov A.V.* On the coplanar equilibria of a space station on a tether fixed on a precessing asteroid// *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2012. V. 8. № 2. P. 309–322.  
<https://doi.org/10.20537/nd1202007>
28. *Rodnikov A.V.* Modeling the dynamics of a space station in the vicinity of an asteroid // *Mathematical modeling and numerical methods.* 2016. № 10. P. 55–68.
29. *Rodnikov A.V.* Mathematical model of a two-tether space station system and dynamically symmetric asteroid // *Mathematical modeling and numerical methods.* 2017. № 16. P. 92–101.  
<https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-4-92101>
30. *Rodnikov A.V.* On safe configurations of a natural-artificial space tether system // *AIP Conference Proceedings.* 2018. V. 1959. № 1. P. 040018.  
<https://doi.org/10.1063/1.5034621>