ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025,
№ 1, с. 224–242

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ШАРОВОМ ПОДВЕСЕ

 В. Д. Иртегов[a, *], **Т. Н. Титоренко**[a, **]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*

**E-mail: irteg@icc.ru, **e-mail: titor@icc.ru*

Поступила в редакцию 28.02.2024 г.
После доработки 10.10.2024 г.
Принята к публикации 11.10.2024 г.

Проводится качественный анализ дифференциальных уравнений, описывающих вращение вокруг неподвижной точки динамически несимметричного твердого тела, заключенного жестко в сферическую оболочку, к которой примыкает один шар и один диск. Рассматриваются случаи движения тела как по инерции, так и под действием потенциальных сил. Установлено, что при отсутствии внешних сил уравнения движения имеют семейства решений, соответствующие положениям равновесия тела, а в случае потенциальных сил – многообразия маятниковых движений. Для ряда найденных решений получены необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову.

Ключевые слова: твердое тело, шаровой подвес, неголономный шарнир, стационарные движения, устойчивость

DOI: 10.31857/S1026351925010126, **EDN:** SZONVK

1. Введение. Рассматриваемая задача восходит к работе Чаплыгина [1] о качении без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной плоскости. Интегрируемость уравнений движения данной системы была установлена Чаплыгиным путем явного сведения их к квадратурам. Задаче Чаплыгина и ее интегрируемым обобщениям посвящено немало работ (см. [2, 3]). Интерес к подобного рода задачам обусловлен, в частности, их прикладным значением. Такие задачи возникают, например, в приложениях при управлении роботами-шарами [4–6].

В настоящей работе проводится качественный анализ дифференциальных уравнений [3], представляющих собой интегрируемое обобщение системы [2]. Согласно А. Пуанкаре [7] задача сводится к выделению особых решений уравнений и исследованию их окрестности (анализ устойчивости, притяжения и бифуркации решений). В результате получается фазовый портрет исследуемой системы. У систем общего вида особыми являются

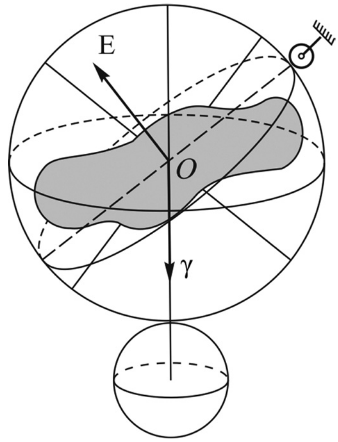

Рис. 1. Твердое тело в шаровом подвесе.

положения равновесия и периодические движения. В случае консервативных систем в качестве особых можно рассматривать стационарные множества. Это инвариантные множества любой конечной размерности, на которых первые интегралы задачи (или их комбинации) принимают стационарное значение. Обладающие указанным свойством нульмерные множества называются стационарными решениями, множества положительной размерности – стационарными инвариантными многообразиями (ИМ). Предлагаемая работа посвящена выделению стационарных множеств указанных дифференциальных уравнений и исследованию их устойчивости. Для нахождения и анализа таких множеств применяется метод Рауса–Ляпунова и его обобщения [8–12].

2. Постановка задачи. Рассматривается вращательное движение относительно неподвижной точки динамически несимметричного твердого тела, заключенного жестко в сферическую оболочку (рис. 1). Геометрический центр последней совпадает с неподвижной точкой O тела. К сферической оболочке примыкает один шар и один диск. Предполагается, что проскальзывание в точке контакта шара с оболочкой отсутствует. Диск – неголономный шарнир – касается внешней поверхности сферической оболочки. Центр шара и ось диска неподвижны в пространстве.

Для описания движения механической системы вводится инерциальная система координат $OXYZ$ и жестко связанная с движущимся телом координатная система $Oxyz$, оси x, y, z которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O. Движение механической системы в системе координат $Oxyz$ описывается дифференциальными уравнениями [3]:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + R\gamma\times\mathbf{N} + \mu\mathbf{E} + M_Q,\ \ D_1\dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}} = D_1\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\omega + R_1\gamma\times\mathbf{N},$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega},\ \ \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

и уравнениями связей:

$$R\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} + R_1\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\gamma} = 0,\ \ (\boldsymbol{\omega},\mathbf{E}) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, R – угловая скорость тела и радиус сферической оболочки, $\boldsymbol{\omega}=(\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\hat{\omega}_3)$, R_1 – угловая скорость и радиус примыкающего шара, $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ – единичный вектор оси, соединяющей фиксированную точку O с центром примыкающего шара, $\mathbf{E}=(e_1,e_2,e_3)$ – вектор нормали плоскости, содержащей фиксированную точку O и ось диска, $\mathbf{I}=\mathrm{diag}(A,B,C)$ – тензор инерции тела, D_1 – тензор инерции примыкающего шара, $\mathbf{N}=(N_1,N_2,N_3)$, μ – неопределенные множители, отвечающие реакциям связей (2.2), M_Q – момент внешних сил. Положение векторов $\mathbf{E}$ и γ относительно друг друга предполагается произвольным.

Как показано в [3], при помощи уравнений связей (2.2) дифференциальные уравнения (2.1) приводятся к виду:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + D\boldsymbol{\gamma}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\gamma}) = I\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{E} + \mathbf{M}_Q,\ \ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega},$$
$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega},\ \ D = \frac{R^2}{R_1^2}D_1. \tag{2.3}$$

Неопределенный множитель μ находится из условия равенства нулю производной второго соотношения (2.2) в силу дифференциальных уравнений (2.3).

Если на тело действуют внешние силы, например потенциальные:

$$\mathbf{M}_Q = \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial U}{\partial\gamma} + \mathbf{E}\times\frac{\partial U}{\partial E},$$

где $U=U(\gamma,\mathbf{E})$ – потенциальная энергия внешних сил, уравнения (2.3) допускают следующие первые интегралы:

$$2H = (\mathbf{I}_Q\boldsymbol{\omega},\omega) + 2U(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{E}) = 2h,\ \ V_1 = (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}) = 1,\ \ V_2 = (\mathbf{E},\mathbf{E}) = 1,$$
$$V_3 = (\gamma,\mathbf{E}) = c_1,\ \ V_4 = (\omega,\mathbf{E}) = 0 \tag{2.4}$$

и в общем случае являются неинтегрируемыми. Здесь $\mathbf{I}_Q = \mathbf{I} + D - D\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\gamma}$, $\gamma\otimes\gamma=[c_{ij}]$, $c_{11}=\gamma_1^2$, $c_{12}=\gamma_1\gamma_2,\ldots$

При отсутствии внешних сил ($U=0$) и $(\mathbf{E}\times\gamma)\neq 0$, уравнения (2.3) имеют два дополнительных первых интеграла

$$F_1 = (\mathbf{K},\mathbf{E}\times\boldsymbol{\gamma}),\ \ F_2 = (\mathbf{K},\mathbf{E}\times(\mathbf{E}\times\boldsymbol{\gamma})), \tag{2.5}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{I}_Q\omega - (\mathbf{I}_Q\boldsymbol{\omega},\mathbf{E})\mathbf{E}$. В этом случае система (2.3) становится вполне интегрируемой.

Цель настоящей работы заключается в выделении стационарных решений и ИМ уравнений (2.3) и исследовании их устойчивости. Анализ уравнений проводится на ИМ, определяемом соотношением $V_4=(\omega,\mathbf{E})=0$ (2.4). Рассматриваются случаи движения тела по инерции и под действием потенциальных сил.

3. Стационарные решения и ИМ при движении тела по инерции. С помощью соотношения $V_4=(\boldsymbol{\omega},\mathbf{E})=0$ исключим переменную ω_1 из дифференциальных уравнений (2.3) и интегралов (2.4), (2.5). В координатной форме уравнения и интегралы будут иметь вид:

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{1}{\sigma_1}[(A-B)D(A+D)\gamma_2\gamma_3\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)[(C+D)(A+D-D\gamma_1^2) -$$
$$- D(A+D)\gamma_3^2]\bar{\omega}_1\omega_3 + (B-C)D(C+D)\gamma_1\gamma_2\omega_2\omega_3 + \mu[(C+D)(e_2(A+D) +$$
$$+ D\gamma_1(e_1\gamma_2 - e_2\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_3(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3)]],$$
$$\dot{\omega}_3 = -\frac{1}{\sigma_1}[(A-B)((B+D)(A+D-D\gamma_1^2) - D(A+D)\gamma_2^2)\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)D\times \quad (3.1)$$
$$\times(A+D)\gamma_2\gamma_3\bar{\omega}_1\omega_3 + (B-C)D(B+D)\gamma_1\gamma_3\omega_2\omega_3 + \mu[(B+D)(e_3(A+D) +$$
$$+ D\gamma_1(e_1\gamma_3 - e_3\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_2(e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)]],$$
$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2, \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\bar{\omega}_1 - \gamma_1\omega_3, \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\bar{\omega}_1,$$
$$\dot{e}_1 = e_2\omega_3 - e_3\omega_2,\ \dot{e}_2 = e_3\bar{\omega}_1 - e_1\omega_3,\ \dot{e}_3 = e_1\omega_2 - e_2\bar{\omega}_1,$$

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{e_2\omega_2 + e_3\omega_3}{e_1},$$
$$\mu = -\frac{1}{\sigma_2}[(B-C)((C+D)((B+D)e_1 + D\gamma_2(e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)) + D(B+D)\gamma_3\times$$
$$\times(e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3))\omega_2\omega_3 + (A-B)((B+D)((A+D)e_3 + D\gamma_1(e_1\gamma_3 - e_3\gamma_1)) +$$
$$+D(A+D)\gamma_2(e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2))\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)((C+D)((A+D)e_2 +$$
$$+D\gamma_1(e_1\gamma_2 - e_2\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_3(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3))\bar{\omega}_1\omega_3],$$
$$\sigma_1 = D[(B+D)(C+D)\gamma_1^2 + (A+D)(C+D)\gamma_2^2 + (A+D)(B+D)\gamma_3^2] -$$
$$-(C+D)(B+D)(A+D),$$
$$\sigma_2 = (B+D)(C+D)e_1^2 + (A+D)(C+D)e_2^2 + (A+D)(B+D)e_3^2 -$$
$$- D(C+D)(e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)^2 - D(B+D)(e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3)^2 -$$
$$- D(A+D)(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3)^2.$$

$$2H = (A+D)\bar{\omega}_1^2 + (B+D)\omega_2^2 + (C+D-D\gamma_3^2)\omega_3^2 - D(\gamma_1\bar{\omega}_1 + \gamma_2\omega_2)^2 -$$
$$- 2D\gamma_3(\gamma_1\bar{\omega}_1 + \gamma_2\omega_2)\omega_3 = 2h,$$
$$V_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\ V_2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,\ V_3 = e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3 = c_1,$$
$$F_1 = -(A+D)(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3)\bar{\omega}_1 + (B+D)(e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3)\omega_2 - (C+D)(e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)\omega_3 = c_2,$$
$$F_2 = [e_1(A+D-2D\gamma_1^2)(e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3) - \gamma_1((A+D)(e_2^2 + e_3^2) - D((e_2^2 + e_3^2)\gamma_1^2 + \quad (3.2)$$
$$+ e_1^2(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) + (e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3)^2))]\bar{\omega}_1 + [e_2(B+D-2D\gamma_2^2)(e_1\gamma_1 + e_3\gamma_3) -$$
$$- \gamma_2((B+D)(e_1^2 + e_3^2) - D((e_1^2 + e_3^2)\gamma_2^2 + e_2^2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) + (e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3)^2))]\omega_2 +$$
$$+ [e_3(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2)(C+D-2D\gamma_3^2) - \gamma_3((C+D)(e_1^2 + e_2^2) - D((e_1^2 + e_2^2)\gamma_3^2 +$$
$$+ e_3^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)^2))]\omega_3 = c_3.$$

Здесь F_1, F_2 – дополнительные первые интегралы соответственно 3-й и 6-й степени.

Следуя выбранной методике, образуем из интегралов (3.2) их полную линейную комбинацию (возможно использование и нелинейных комбинаций)

$$2\Omega = 2\lambda_0 H - \lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_2 - 2\lambda_3 V_3 - 2\lambda_4 F_1 - 2\lambda_5 F_2\,, \tag{3.3}$$

где λ_i $(i=0,\dots,5)$ – параметры семейства интегралов Ω, и запишем необходимые условия экстремума Ω по фазовым переменным

$$\partial\Omega / \partial\omega_2 = 0,\ \partial\Omega / \partial\omega_3 = 0,\ \partial\Omega / \partial\gamma_i = 0,\ \partial\Omega / \partial e_i = 0 \quad (i=1,2,3). \tag{3.4}$$

Решения уравнений (3.4) позволяют определить семейства стационарных решений и ИМ дифференциальных уравнений (3.1), соответствующие семейству первых интегралов Ω. Для нахождения решений применяется система аналитических вычислений.

Очевидно, в рассматриваемой задаче отсутствуют решения, соответствующие перманентным вращениям и регулярным прецессиям тела. Второе уравнение (2.2) – условие отсутствия таких вращений. Далее находятся решения уравнений (3.1), соответствующие положениям равновесия механической системы.

3.1. Положения равновесия. Положим $\omega_2=\omega_3=0$ в уравнениях (3.4) и дополним их соотношениями $V_1=1$, $V_2=1$ (3.2). Результатом будет система уравнений:

$$\begin{gathered}
-((B+D)(e_3\gamma_1-e_1\gamma_3)+\frac{e_2}{e_1}(A+D)(e_3\gamma_2-e_2\gamma_3))\lambda_4-((B+D(1-2\gamma_2^2))\times\\
\times(e_1\gamma_1+e_3\gamma_3)e_2-\gamma_2(B(e_1^2+e_3^2)-D((e_1^2+e_3^2)(\gamma_2^2-1)+(e_3\gamma_1-e_1\gamma_3)^2+\\
+e_2^2(\gamma_1^2+\gamma_3^2)))-\frac{e_2}{e_1}(e_1(A+D(1-2\gamma_1^2))\times(e_2\gamma_2+e_3\gamma_3)-\gamma_1(A(e_2^2+e_3^2)-\\
-D((e_2^2+e_3^2)(\gamma_1^2-1)+e_1^2(\gamma_2^2+\gamma_3^2)+(e_3\gamma_2-e_2\gamma_3)^2))))\lambda_5=0,\\
((C+D)(e_2\gamma_1-e_1\gamma_2)-\frac{e_3}{e_1}(A+D)(e_3\gamma_2-e_2\gamma_3))\lambda_4-((C+D(1-2\gamma_3^2))\times\\
\times(e_1\gamma_1+e_2\gamma_2)e_3-\gamma_3(C(e_1^2+e_2^2)-D((e_1^2+e_2^2)(\gamma_3^2-1)+(e_2\gamma_1-e_1\gamma_2)^2+\\
+e_3^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)))-\frac{e_3}{e_1}(e_1(A+D(1-2\gamma_1^2))\times(e_2\gamma_2+e_3\gamma_3)-\gamma_1(A(e_2^2+e_3^2)-\\
-D((e_2^2+e_3^2)(\gamma_1^2-1)+e_1^2(\gamma_2^2+\gamma_3^2)+(e_3\gamma_2-e_2\gamma_3)^2))))\lambda_5=0,\\
-\lambda_1\gamma_1-\lambda_3 e_1=0,\ -\lambda_1\gamma_2-\lambda_3 e_2=0,\ -\lambda_1\gamma_3-\lambda_3 e_3=0,\\
-\lambda_2 e_1-\lambda_3\gamma_1=0,\ -\lambda_2 e_2-\lambda_3\gamma_2=0,\\
-\lambda_2 e_3-\lambda_3\gamma_3=0,\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,\ e_1^2+e_2^2+e_3^2=1,
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Рассматривая левые части этой системы как полиномы от γ_1, γ_2, γ_3, e_2, λ_1, λ_2, построим базис Гребнера относительно указанных переменных. Будем использовать лексикографическое упорядочение $\lambda_1>\lambda_2>\gamma_1>\gamma_2>\lambda_3>e_2$. Тем самым система уравнений (3.5) преобразуется к виду, позволяющему разделить ее на две подсистемы:

$$\begin{aligned} 1)\quad & e_1^2+e_2^2+e_3^2=1,\ e_3-\gamma_3=0,\ e_2-\gamma_2=0,\ e_1-\gamma_1=0,\\ & \lambda_2+\lambda_3=0,\ \lambda_1+\lambda_3=0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad & e_1^2+e_2^2+e_3^2=1,\ e_3+\gamma_3=0,\ e_2+\gamma_2=0, e_1+\gamma_1=0,\\ & \lambda_3-\lambda_2=0,\ \lambda_1-\lambda_3=0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Непосредственно вычислением по определению ИМ проверяется, что первые четыре уравнения каждой подсистемы совместно с соотношениями $\omega_2=\omega_3=0$ определяют два ИМ коразмерности 6 дифференциальных уравнений (3.1): производная от указанных выражений, вычисленная в силу уравнений (3.1), обращается тождественно в нуль на данных выражениях.

Из последних двух уравнений каждой подсистемы найдем $\lambda_1=\mp\lambda_3$, $\lambda_2=\mp\lambda_3$. Подставив их в (3.3), получим семейства интегралов $2\Omega_{1,2}=2\lambda^0 H\pm\lambda_3 V_1\pm\lambda_3 V_2-$ $-2\lambda_3 V_3-2\lambda_4 F_1-2\lambda_5 F_2$, принимающие стационарное значение на найденных ИМ. Интеграл V_3 обращается в ±1 на этих ИМ, что соответствует случаю, когда векторы **E** и $\boldsymbol{\gamma}$ параллельны или противоположно направлены.

Дифференциальные уравнения $\dot{e}_1=0,\ \dot{e}_3=0$ на каждом ИМ имеют следующее семейство решений:

$$e_1=e_1^0=\text{const},\ e_3=e_3^0=\text{const}. \tag{3.8}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения, найденным ИМ в пространстве R^8 соответствуют двумерные поверхности, каждая точка которых является неподвижной точкой в фазовом пространстве.

В исходном фазовом пространстве семейству (3.8) соответствуют следующие 4 семейства решений:

$$\begin{gathered} \omega_2=\omega_3=0,\ \gamma_1=e_1^0,\ \gamma_2=\pm\sqrt{1-e_1^{0^2}-e_3^{0^2}},\ \gamma_3=e_3^0,\\ e_1=e_1^0,\ e_2=\pm\sqrt{1-e_1^{0^2}-e_3^{0^2}},\ e_3=e_3^0, \end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} \omega_2=\omega_3=0,\ \gamma_1=-e_1^0,\ \gamma_2=\pm\sqrt{1-e_1^{0^2}-e_3^{0^2}},\ \gamma_3=-e_3^0,\\ e_1=e_1^0,\ e_2=\mp\sqrt{1-e_1^{0^2}-e_3^{0^2}},\ e_3=e_3^0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Чтобы их получить, нужно подставить (3.8) в уравнения ИМ. Выражения (3.9), (3.10) определяют четыре двухпараметрические семейства решений дифференциальных уравнений (3.1), e_1^0, e_3^0 – параметры семейств. Условия вещественности решений:

$$(e_1^0=0\ \text{ и }\ e_3^0=\pm1)\ \text{ или }\ (-1<e_3^0<1\ \text{ и }\ -\sqrt{1-e_3^{02}}\le e_1^0\le\sqrt{1-e_3^{02}}).$$

С механической точки зрения, при указанных ограничениях на параметры e_1^0, e_3^0 элементам семейств решений (3.9), (3.10) соответствуют положения равновесия исследуемой системы.

4. Стационарные решения и ИМ при движении тела в силовом поле. Дифференциальные уравнения (2.3) и интегралы (2.4) на ИМ, определяемом соотношением $V_4 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}) = 0$, при наличии потенциальных сил имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_2 = &-\frac{1}{\sigma_1}[(A-B)D(A+D)\gamma_2\gamma_3\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)[(C+D)(A+D-D\gamma_1^2) - \\
&- D(A+D)\gamma_3^2]\bar{\omega}_1\omega_3 + (B-C)D(C+D)\gamma_1\gamma_2\omega_2\omega_3 + \mu[(C+D)(e_2(A+D) + \\
&+ D\gamma_1(e_1\gamma_2 - e_2\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_3(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3)] + D(C+D)\gamma_1\gamma_2 M_{Q_1} + \\
&+ ((C+D)(A+D-D\gamma_1^2) - D(A+D)\gamma_3^2) M_{Q_2} + D(A+D)\gamma_2\gamma_3 M_{Q_3}], \\
\dot{\omega}_3 = &-\frac{1}{\sigma_1}[(A-B)((B+D)(A+D-D\gamma_1^2) - D(A+D)\gamma_2^2)\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)D \times \\
&\times (A+D)\gamma_2\gamma_3\bar{\omega}_1\omega_3 + (B-C)D(B+D)\gamma_1\gamma_3\omega_2\omega_3 + \mu[(B+D)(e_3(A+D) + \\
&+ D\gamma_1(e_1\gamma_3 - e_3\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_2(e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)] + D(B+D)\gamma_1\gamma_3 M_{Q_1} + \\
&+ D(A+D)\gamma_2\gamma_3 M_{Q_2} + ((B+D)(A+D-D\gamma_1^2) - D(A+D)\gamma_2^2) M_{Q_3}], \\
&\dot{\gamma}_1 = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2,\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\bar{\omega}_1 - \gamma_1\omega_3,\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\bar{\omega}_1, \\
&\dot{e}_1 = e_2\omega_3 - e_3\omega_2,\ \dot{e}_2 = e_3\bar{\omega}_1 - e_1\omega_3,\ \dot{e}_3 = e_1\omega_2 - e_2\bar{\omega}_1, \\
2\tilde{H} = &(A+D)\bar{\omega}_1^2 + (B+D)\omega_2^2 + (C+D-D\gamma_3^2)\omega_3^2 - D(\gamma_1\bar{\omega}_1 + \gamma_2\omega_2)^2 - \\
&- 2D\gamma_3(\gamma_1\bar{\omega}_1 + \gamma_2\omega_2)\omega_3 + 2U = 2h, \\
V_1 = &\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\quad V_2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,\quad V_3 = e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3 = c_1.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\mu = -\dfrac{1}{\sigma_2}[(B-C)((C+D)((B+D)e_1 + D\gamma_2(e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)) + D(B+D)\gamma_3 \times$

$$\begin{aligned}
&\times(e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3))\omega_2\omega_3 + (A-B)((B+D)((A+D)e_3 + D\gamma_1(e_1\gamma_3 - e_3\gamma_1)) + \\
&+ D(A+D)\gamma_2(e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2))\bar{\omega}_1\omega_2 - (A-C)((C+D)((A+D)e_2 + \\
&+ D\gamma_1(e_1\gamma_2 - e_2\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_3(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3))\bar{\omega}_1\omega_3 + ((C+D)((B+D)e_1 + \\
&+ D\gamma_2(e_2\gamma_1 - e_1\gamma_2)) + D(B+D)\gamma_3(e_3\gamma_1 - e_1\gamma_3))M_{Q_1} + ((C+D)((A+D)e_2 + \\
&+ D\gamma_1(e_1\gamma_2 - e_2\gamma_1)) + D(A+D)\gamma_3(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3))M_{Q_2} + ((B+D)(A+D)e_3 + \\
&+ D(B+D)\gamma_1(e_1\gamma_3 - e_3\gamma_1) + D(A+D)\gamma_2(e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2))M_{Q_3}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Q_1} = &\ a_{13}\gamma_1\gamma_2 + a_{23}\gamma_2^2 - a_{12}\gamma_1\gamma_3 - a_{22}\gamma_2\gamma_3 + a_{33}\gamma_2\gamma_3 - a_{23}\gamma_3^2 + b_{13}e_1e_2 + \\
&+ b_{23}e_2^2 - b_{12}e_1e_3 - b_{22}e_2e_3 + b_{33}e_2e_3 - b_{23}e_3^2 + a_3\gamma_2 - a_2\gamma_3 + b_3e_2 - b_2e_3, \\
M_{Q_2} = &-a_{13}\gamma_1^2 - a_{23}\gamma_1\gamma_2 + a_{11}\gamma_1\gamma_3 - a_{33}\gamma_1\gamma_3 + a_{12}\gamma_2\gamma_3 + a_{13}\gamma_3^2 - b_{13}e_1^2 - \\
&- b_{23}e_1e_2 + b_{11}e_1e_3 - b_{33}e_1e_3 + b_{12}e_2e_3 + b_{13}e_3^2 - a_3\gamma_1 + a_1\gamma_3 + b_1e_3 - b_3e_1, \\
M_{Q_3} = &\ a_{12}\gamma_1^2 - a_{11}\gamma_1\gamma_2 + a_{22}\gamma_1\gamma_2 - a_{12}\gamma_2^2 + a_{23}\gamma_1\gamma_3 - a_{13}\gamma_2\gamma_3 + b_{12}e_1^2 - \\
&- b_{11}e_1e_2 + b_{22}e_1e_2 - b_{12}e_2^2 + b_{23}e_1e_3 - b_{13}e_2e_3 + a_2\gamma_1 - a_1\gamma_2 + b_2e_1 - b_1e_2.
\end{aligned}$$

Выражения $\bar{\omega}_1, \sigma_1, \sigma_2$ имеют тот же вид, что и в разделе 2.

Пусть исследуемая механическая система движется в поле с потенциалом

$$U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{b}^T \mathbf{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^T \tilde{a}\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{E}^T \tilde{b}\mathbf{E}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{a}^T=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}^T=(b_1, b_2, b_3)$ – постоянные векторы, $\tilde{a}=(a_{ij})$, $\tilde{b}=(b_{ij})$ – постоянные симметрические матрицы 3×3.

Выражение (4.2) можно интерпретировать как потенциал нескольких силовых полей. Например, при $\tilde{a}=\tilde{b}=0$ и соответствующих значениях a_i, b_i его можно рассматривать как потенциал однородного гравитационного и магнитного полей [13], при $a=b=\tilde{b}=0$ и $\tilde{a}=\mathbf{I}$ $(a=b=\tilde{a}=0$ и $\tilde{b}=\mathbf{I})$ – как потенциал ньютоновского поля притяжения или задачи Бруна [14].

Как и в предыдущем случае, для нахождения стационарных решений и ИМ дифференциальных уравнений (4.1) образуем линейную комбинацию из первых интегралов этих уравнений

$$2\overline{\Omega} = 2\lambda_0\tilde{H} - \lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_2 - 2\lambda_3 V_3 \tag{4.3}$$

и запишем необходимые условия экстремума $\overline{\Omega}$ по фазовым переменным

$$\partial\overline{\Omega}/\partial\omega = 0,\quad \partial\overline{\Omega}/\partial\omega_3 = 0,\quad \partial\overline{\Omega}/\partial\gamma_i = 0,\quad \partial\overline{\Omega}/\partial e_i = 0\quad (i=1,2,3). \tag{4.4}$$

4.1. Положения равновесия. Положим $\omega_2=\omega_3=0$ в уравнениях (4.4). Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3)\lambda_0 - \gamma_1\lambda_1 - e_1\lambda_3 = 0,\\
&(a_2 + a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}\gamma_3)\lambda_0 - \gamma_2\lambda_1 - e_2\lambda_3 = 0,\\
&(a_3 + a_{13}\gamma_1 + a_{23}\gamma_2 + a_{33}\gamma_3)\lambda_0 - \gamma_3\lambda_1 - e_3\lambda_3 = 0,\\
&(b_1 + b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + b_{13}e_3)\lambda_0 - e_1\lambda_2 - \gamma_1\lambda_3 = 0,\\
&(b_2 + b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{23}e_3)\lambda_0 - e_2\lambda_2 - \gamma_2\lambda_3 = 0,\\
&(b_3 + b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3)\lambda_0 - e_3\lambda_2 - \gamma_3\lambda_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Для полиномов системы (4.5) построим лексикографический базис Гребнера относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma_2, \gamma_3, e_3$ при следующих ограничениях на параметры задачи: $a_i=b_i=0$ $(i=1, 2, 3)$, $a_{13}=a_{23}=b_{13}=b_{23}=0$, $a_{22}=a_{11}$, $b_{22}=b_{11}$.

Результатом будет система уравнений:

$$\begin{gathered}
e_3 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ b_{12}(e_2^2 - e_1^2) + a_{12}(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = 0,\\
a_{12}b_{12}(e_2\gamma_1 + e_1\gamma_2)\lambda_0 - (a_{12}\gamma_1^2 + b_{12}e_1^2)\lambda_3 = 0,\\
(b_{12}e_1(b_{11}e_1 + b_{12}e_2) + a_{12}\gamma_1(b_{11}\gamma_1 - b_{12}\gamma_2))\lambda_0 - (b_{12}e_1^2 + a_{12}\gamma_1^2)\lambda_2 = 0,\\
(a_{12}(b_{12}e_1e_2 - a_{12}\gamma_1\gamma_2) - a_{11}(b_{12}e_1^2 + a_{12}\gamma_1^2))\lambda_0 + (b_{12}e_1^2 + a_{12}\gamma_1^2)\lambda_1 = 0.
\end{gathered}$$

Первые три уравнения этой системы совместно с соотношениями $\omega_2=\omega_3=0$ определяют ИМ коразмерности 5 уравнений движения (4.1). Последние три уравнения позволяют получить первые интегралы дифференциальных уравнений на этом ИМ [15].

Пересечением найденного ИМ с поверхностями, определяемыми интегралами $V_1=1$, $V_2=1$, будет одномерное ИМ, уравнения которого записываются так:

$$\omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ e_3 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ b_{12}(e_2^2 - e_1^2) + a_{12}(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = 0,$$
$$V_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\ V_2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \tag{4.6}$$

Дифференциальное уравнение $\dot{e}_1 = 0$ на этом ИМ имеет семейство решений:

$$e_1 = e_1^0 = \text{const}. \tag{4.7}$$

С геометрической точки зрения, ИМ (4.6) в пространстве R^8 соответствует кривая, каждая точка которой является неподвижной точкой в фазовом пространстве.

Семейству решений (4.7) в исходном фазовом пространстве соответствует до восьми однопараметрических семейств решений дифференциальных уравнений (4.1). Ниже приведены 2 семейства, остальные отличаются от них только знаками.

$$\omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ e_1 = e_1^0,\ e_2 = -\sqrt{1 - e_1^{0^2}},\ e_3 = 0, \tag{4.8}$$
$$\gamma_1 = -\frac{z_1}{\sqrt{2a_{12}}},\ \gamma_2 = \mp\frac{z_2}{\sqrt{2a_{12}}},\ \gamma_3 = 0.$$

Здесь e_1^0 – параметр семейств, $z_1 = (a_{12} + b_{12}(1 - 2e_1^{0^2}))^{1/2}$, $z_2 = (a_{12} + b_{12}(1 - 2e_1^{0^2}))^{1/2}$. Условиями вещественности решений, в частности, будут: $a_{12} \geq b_{12} > 0$, $-1/2^{1/2} \leq e_1^0 \leq 1/2^{1/2}$.

Интеграл V_0 на решениях (4.8) принимает значения

$$-\frac{e_1^0 z_1 \mp \sqrt{1 - e_1^{0^2}}\, z_2}{\sqrt{2a_{12}}}.$$

Последнее означает, что решения существуют при любых углах между векторами $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

С механической точки зрения, вещественным решениям (4.8) соответствуют положения равновесия исследуемой системы. Эти положения равновесия существуют, когда механическая система находится под воздействием внешних сил с потенциалом

$$2\tilde{U} = a_{11}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + 2a_{12}\gamma_1\gamma_2 + a_{33}\gamma_3^2 + b_{11}(e_1^2 + e_2^2) + 2b_{12}e_1e_2 + b_{33}e_3^2. \tag{4.9}$$

Из уравнений (4.4) найдем значения λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, при которых решения (4.8) удовлетворяют этим уравнениям. Подставив их в (4.3), получим семейства интегралов, принимающие стационарное значение на решениях (4.8):

$$2\bar{\Omega}_{1,2} = 2\tilde{H} - \frac{(a_{11}(a_{12} + b_{12}) + a_{12}(2b_{12}e_1^0\sqrt{1 - \mathrm{e}_1^{0^2}} \pm z_1z_2))}{a_{12} + b_{12}}V_1,$$
$$-\frac{(b_{11}(a_{12} + b_{12}) - b_{12}(2b_{12}e_1^0\sqrt{1 - e_1^{0^2}} \pm z_1z_2))}{a_{12} + b_{12}}V_2 - \frac{2\sqrt{2a_{12}}\,b_{12}(1 - 2e_1^{0^2})}{\sqrt{1 - e_1^{0^2}}\,z_1 \pm e_1^0 z_2}V_3.$$

Приведем еще два найденных решения дифференциальных уравнений (4.1):

$$\omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ e_1 = -\frac{b_2 b_{12}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ e_2 = \frac{b_2 b_{11}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ e_3 = \pm\frac{\kappa}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},$$
$$\gamma_1 = \frac{b_2 b_{12}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ \gamma_2 = -\frac{b_2 b_{11}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ \gamma_3 = \mp\frac{\kappa}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}, \tag{4.10}$$

где $\kappa = (b_{12}^4 - b_{12}^2(b_2^2 + 2b_{11}b_{22}) + b_{11}^2(b_{22}^2 - b_2^2))^{1/2}$. Условия вещественности решений: $b_{22} \geq b_2 > 0,\ b_{11} \leq -b_2^2/(2b_{22})$.

Решения (4.10) можно получить, построив лексикографический базис для полиномов системы (4.5) относительно переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, e_1, e_2, e_3$ при следующих ограничениях на параметры задачи и параметры семейства интегралов $\overline{\Omega}$:

$$a_1 = \frac{b_2(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ a_{13} = 0,\ a_2 = \frac{b_2(a_{22}b_{11} - a_{12}b_{12})}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ a_{23} = 0,$$
$$a_3 = \pm\frac{a_{33}\kappa}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ b_{13} = b_{23} = b_1 = 0,\ b_3 = \mp\frac{b_{33}\kappa}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}},\ \lambda_2 = \lambda_1,\ \lambda_3 = \lambda_1.$$

Подстановка $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1$ в (4.3) дает семейство интегралов $2\tilde{\Omega} = 2\lambda_0\tilde{H} - \lambda_1(V_1 + V_2 + 2V_3)$, принимающее стационарное значение на решениях (4.10). Интеграл V_3 на этих решениях обращается в −1, что соответствует случаю, когда векторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ противоположно направлены.

С механической точки зрения, вещественным решениям (4.10) соответствуют положения равновесия рассматриваемой системы. Они получены в случае, когда на механическую систему действуют силы с потенциалом

$$2\hat{U} = a_{11}\gamma_1^2 + 2a_{12}\gamma_1\gamma_2 + a_{22}\gamma_2^2 + a_{33}\gamma_3^2 + b_{11}e_1^2 + 2b_{12}e_1e_2 + b_{22}e_2^2 + b_{33}e_3^2 +$$
$$+\frac{2}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}[b_2(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})\gamma_1 + b_2(a_{22}b_{11} - a_{12}b_{12})\gamma_2 \pm a_{33}\kappa\gamma_3 \mp b_{33}\kappa e_3] + 2b_2e_2.$$

4.2. Движения маятникового типа. В случае, когда векторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ ортогональны, выявлено несколько таких движений.

При $a_1 = a_2 = b_3 = a_{13} = a_{23} = b_{13} = b_{23} = 0$ уравнения

$$\omega_2 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = \pm 1,\ e_3 = 0 \tag{4.11}$$

определяют два ИМ коразмерности 5 уравнений движения (4.1) .

Дифференциальные уравнения на этих ИМ имеют вид

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{C}[e_1(b_{12}e_1 + b_2) - e_2(b_1 + (b_{11} - b_{22})e_1 + b_{12}e_2)],$$
$$\dot{e}_1 = e_2\omega_3,\ \dot{e}_2 = -e_1\omega_3$$

и описывают маятникоподобные колебания тела с неподвижной точкой относительно оси Oz.

Когда $a_1=a_3=b_2=a_{12}=a_{23}=b_{12}=b_{23}=0$, уравнения (4.1) имеют два ИМ:

$$\omega_3=0,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\pm 1,\ \gamma_3=0,\ e_2=0. \tag{4.12}$$

Дифференциальные уравнения на ИМ (4.12)

$$\dot\omega_2=-\frac{1}{B}[e_1(b_3+b_{13}e_1)-e_3(b_1+(b_{11}-b_{33})e_1)-b_{13}e_3^2],\ \dot e_1=-e_3\omega_2,\ \dot e_2=e_1\omega_2$$

описывают маятникоподобные колебания тела относительно оси Oy.

Непосредственно вычислением проверяется, что интеграл $\breve\Omega=\tilde H V_3^2$ принимает стационарное значение на ИМ (4.11), (4.12).

При любых углах между векторами $\boldsymbol\gamma$ и $\mathbf{E}$ найдено два решения, соответствующих маятниковым движениям.

При $a_3=b_3=a_{13}=a_{23}=b_{13}=b_{23}=0$ дифференциальные уравнения (4.1) имеют ИМ коразмерности 3:

$$\omega_2=0,\ \gamma_3=0,\ e_3=0.$$

Дифференциальные уравнения

$$\dot\omega_3=\frac{1}{C+D}[(b_2+b_{12}e_1)e_1-(b_1+(b_{11}-b_{22})e_1+b_{12}e_2)e_2+$$
$$+(a_2+a_{12}\gamma_1)\gamma_1-(a_1+(a_{11}-a_{22})\gamma_1+a_{12}\gamma_2)\gamma_2],$$
$$\dot\gamma_1=\gamma_2\omega_3,\ \dot\gamma_2=-\gamma_1\omega_3,\ \dot e_1=e_2\omega_3,\ \dot e_2=-e_1\omega_3$$

на этом ИМ описывают маятникоподобные колебания тела относительно оси Oz.

Еще одно решение такого типа существует при $a_2=b_2=a_{12}=a_{23}=b_{12}=b_{23}=0$. На ИМ, определяемом соотношениями $\omega_3=0$, $\gamma_2=0$, $e_2=0$, дифференциальные уравнения

$$\dot\omega_2=-\frac{1}{B+D}[(b_3+b_{13}e_1)e_1-(b_1+(b_{11}-b_{33})e_1+b_{13}e_3)e_3+$$
$$+(a_3+a_{13}\gamma_1)\gamma_1-(a_1+(a_{11}-a_{33})\gamma_1+a_{13}\gamma_3)\gamma_3],$$
$$\dot\gamma_1=-\gamma_3\omega_2,\ \dot\gamma_3=\gamma_1\omega_2,\ \dot e_1=-e_3\omega_2,\ \dot e_3=e_1\omega_2$$

описывают маятникоподобные колебания тела относительно оси Oy.

5. Об устойчивости стационарных решений и ИМ.

5.1. Движение тела по инерции. Исследуем устойчивость ИМ, определяемого уравнениями:

$$\omega_2=\omega_3=0,\ e_1-\gamma_1=0,\ e_2-\gamma_2=0,\ e_3-\gamma_3=0,\ e_1^2+e_2^2+e_3^2=1. \tag{5.1}$$

ИМ (5.1) соответствует случаю, когда векторы $\boldsymbol\gamma$ и $\mathbf{E}$ параллельны. Исследование проводится в картах

$$\omega_2=0,\ \omega_3=0,\ \gamma_1=e_1,\ \gamma_2=\pm z,\ \gamma_3=e_3,\ e_2=\pm z$$

на этом ИМ. Здесь и далее $z=\sqrt{1-e_1^2-e_3^2}$.

Интеграл $2\Omega_1=2\lambda_0 H+\lambda_3(V_1+V_2-2V_3)-2\lambda_4 F_1-2\lambda_5 F_2$ используется для получения достаточных условий.

Введем отклонения:

$$y_1=\omega_2,\ y_2=\omega_3,\ y_3=\gamma_1-e_1,\ y_4=\gamma_2\mp z,\ y_5=\gamma_3-e_3,\ y_6=e_2\mp z.$$

Вторая вариация интеграла Ω_1 на множестве, определяемом первыми вариациями условных интегралов

$$\delta V_1=2(e_1y_3\pm zy_4+e_3y_5)=0,\ \delta V_2=\pm 2zy_6=0,$$
$$\delta V_3=e_1y_3+e_3y_5\pm z(y_4+y_6)=0$$

записывается так:

$$2\delta^2\Omega_1=\alpha_{11}y_1^2+\alpha_{12}y_1y_2+\alpha_{22}y_2^2+\alpha_{13}y_1y_3+\alpha_{23}y_2y_3+\alpha_{33}y_3^2+$$
$$+\alpha_{14}y_1y_4+\alpha_{24}y_2y_4+\alpha_{34}y_3y_4+\alpha_{44}y_4^2,$$

$$\alpha_{11}=\frac{(A+D-(A-B)e_1^2-(A+D)e_3^2)\lambda_0}{2e_1^2},\alpha_{12}=\pm\frac{(A+D)e_3z\lambda_0}{e_1^2},$$

$$\alpha_{22}=\frac{((C+D)e_1^2+(A+D)e_3^2)\lambda_0}{2e_1^2},$$

$$\alpha_{13}=\frac{(A-B)e_1(e_1^2+e_3^2)\lambda_5-(A+D)(e_1\lambda_5\pm e_3z\lambda_6)}{e_1e_3},$$

$$\alpha_{23}=\mp(A-C)z\lambda_5-\left(\frac{(C+D)e_1}{e_3}+\frac{(A+D)e_3}{e_1}\right)\lambda_6,\ \alpha_{33}=\frac{(e_1^2+e_3^2)\lambda_3}{2e_3^2},$$

$$\alpha_{14}=\pm\frac{((A-B)e_1^2-(A+D))z\lambda_5}{e_1e_3}+(B+D)\lambda_6,$$

$$\alpha_{24}=\left((A-C)e_1-\frac{A+D}{e_1}\right)\lambda_5\mp\frac{(C+D)z\lambda_6}{e_3},\ \alpha_{34}=\pm\frac{ze_1\lambda_3}{e_3^2},\ \alpha_{44}=\frac{(1-e_1^2)\lambda_3}{2e_3^2}.$$

Условия знакоопределенности

$$\Delta_1=\frac{(e_1^2+e_3^2)\lambda_3}{e_3^2}>0,\ \Delta_2=\frac{\lambda_3^2}{e_3^2}>0,$$

$$\Delta_3=\frac{\lambda_3}{e_1^2e_3^2}((((C+D)e_1^2+(A+D)e_3^2)\lambda_0\lambda_3-((C+D)^2e_1^2+((A+D)^2,$$
$$-(A-C)^2e_1^2)e_3^2)(\lambda_5^2+\lambda_6^2))>0, \tag{5.2}$$

$$\Delta_4=\frac{1}{e_1^2e_3^2}((C+D)(A+D-(A-B)e_1^2)+(B-C)(A+D)e_3^2)\times$$
$$\times(\lambda_0^2\lambda_3^2-(A+C+2D-(A-B)e_1^2+(B-C)e_3^2)\lambda_0\lambda_3(\lambda_5^2+\lambda_6^2)+$$
$$+((C+D)(A+D-(A-B)e_1^2)+(B-C)(A+D)e_3^2)(\lambda_5^2+\lambda_6^2)^2)>0$$

квадратичной формы $\delta^2\Omega_1$ будут достаточными для устойчивости исследуемого ИМ.

Дифференциальные уравнения $\dot{e}_1 = 0$, $\dot{e}_3 = 0$ на ИМ (5.1) имеют семейство решений:

$$e_1 = e_1^0 = \text{const}, \ \ e_3 = e_3^0 = \text{const}. \tag{5.3}$$

Таким образом, ИМ (5.1) можно рассматривать как семейство ИМ, где e_1^0, e_3^0 – параметры семейства.

Пусть $e_1^0 = e_3^0$, $B = 3A/2$, $C = 2A$ и $A > D$. С учетом (5.3) и введенных ограничений неравенства (5.2) примут вид:

$$\lambda > 0, \quad \frac{\lambda_3^2}{e_1^{0^2}} > 0,$$

$$\frac{\lambda_3}{e_1^{0^2}}((3A + 2D)\lambda_0\lambda_3 - (2D(3A + D) - A^2(e_1^{0^2} - 5))(\lambda_5^2 + \lambda_6^2)) > 0,$$

$$\frac{1}{e_1^{0^4}}(6AD + 2D^2 + A^2(e_1^{0^2} + 4))(2\lambda_0^2\lambda_3^2 - 2(3A + 2D)\lambda_0\lambda_3(\lambda_5^2 + \lambda_6^2) +$$

$$+ (6AD + 2D^2 + A^2(e_1^{0^2} + 4))(\lambda_5^2 + \lambda_6^2)^2) > 0.$$

Последние неравенства совместны при выполнении следующих условий:

$$\begin{gathered}\lambda_3 > 0, \ \lambda_5 \neq 0, \ \lambda_6 \neq 0 \ \text{ и } \ (((2\lambda_0 > \sigma \ \text{ и } \ (e_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ или } \ e_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}})) \ \text{ или},\\ (2\lambda_0 > \sigma + \frac{A\sqrt{1 - 2e_1^{0^2}}(\lambda_5^2 + \lambda_6^2)}{\lambda_3} \ \text{ и } \ (-\frac{1}{\sqrt{2}} < e_1^0 < 0 \ \text{ или } \ 0 < e_1^0 < \frac{1}{\sqrt{2}}))),\end{gathered} \tag{5.4}$$

Здесь $\sigma = (3A + 2D)(\lambda_5^2 + \lambda_6^2)/\lambda_3$.

Как можно видеть, условия (5.4) разделяются на две группы. Ограничения на параметр семейства ИМ (параметр e_1^0) дают достаточные условия устойчивости элементов исследуемого семейства. Условия на параметры λ_0, λ_3, λ_5, λ_6 семейства интегралов Ω_1 выделяют из этого семейства подсемейство, которое позволяет получить указанные достаточные условия.

Когда векторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ противоположно направлены, уравнения ИМ, соответствующего этому случаю, имеют вид:

$$\omega_2 = \omega_3 = 0, \ e_1 + \gamma_1 = 0, \ e_2 + \gamma_2 = 0, \ e_3 + \gamma_3 = 0, \ e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \tag{5.5}$$

Доказана неустойчивость по первому приближению семейств решений (3.10), принадлежащих ИМ (5.5). Рассмотрим одно из этих семейств, например,

$$\begin{gathered}\omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = -e_1^0, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - e_1^{0^2} - e_3^{0^2}}, \quad \gamma_3 = -e_3^0,\\ e_1 = e_1^0, \quad e_2 = -\sqrt{1 - e_1^{0^2} - e_3^{0^2}}, \quad e_3 = e_3^0,\end{gathered} \tag{5.6}$$

Введем отклонения от невозмущенного движения:

$$y_1 = e_1 - e_1^0,\ y_2 = e_2 + \chi,\ y_3 = e_3 - e_3^0,\ y_4 = \gamma_1 + e_1^0,$$
$$y_5 = \gamma_2 - \chi,\ y_6 = \gamma_3 + e_3^0,\ y_7 = \omega_2,\ y_8 = \omega_3,$$

где $\chi = \sqrt{1 - {e_1^0}^2 - {e_3^0}^2}$, и запишем уравнения первого приближения:

$$\dot{y}_1 = -e_3^0 y_7 - \chi y_8, \qquad \dot{y}_4 = e_3^0 y_7 + \chi y_8, \qquad \dot{y}_7 = 0,$$
$$\dot{y}_2 = \frac{e_3^0 \chi y_7}{e_1^0} - \frac{({e_1^0}^2 + {e_3^0}^2) y_8}{e_1^0}, \quad \dot{y}_5 = \frac{(e_1^0 + {e_3^0}^2) y_8}{e_1^0} - \frac{e_3^0 \chi y_7}{e_1^0}, \quad \dot{y}_8 = 0, \tag{5.7}$$
$$\dot{y}_3 = \frac{(1 - {e_3^0}^2) y_7}{e_1^0} - \frac{e_3^0 \chi y_8}{e_1^0}, \quad \dot{y}_6 = \frac{e_3^0 \chi y_8}{e_1^0} - \frac{(1 - {e_3^0}^2) y_7}{e_1^0}.$$

Характеристическое уравнение системы (5.7): $\lambda^8 = 0$ Как можно видеть, все корни этого уравнения нулевые.

Жорданова форма матрицы системы (5.7) недиагональная:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два жордановых блока вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствуют двум парам нулевых корней. Откуда следует неустойчивость по первому приближению элементов исследуемого семейства решений. Такой же результат получен для второго семейства решений (3.10).

5.2. Движение тела в силовом поле. Исследуем устойчивость семейств решений (4.8), полагая, что коэффициенты в выражении потенциальной энергии (4.9) имеют вид:

$$4a_{11} = a,\ 2a_{12} = a,\ a_{33} = a,\ b_{11} = 2b,\ b_{12} = b,\ b_{33} = 3b, \tag{5.8}$$

где a, b – некоторые постоянные.

С учетом (5.8) рассматриваемые семейства решений и интегралы, принимающие на них стационарное значение, запишутся так:

$$\omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ e_1 = e_1^0,\ e_2 = -\sqrt{1 - {e_1^0}^2},\ e_3 = 0,\ \gamma_1 = -\frac{\rho_1}{\sqrt{a}},\ \gamma_2 = \mp\frac{\rho_2}{\sqrt{a}},\ \gamma_3 = 0, \tag{5.9}$$

$$2\tilde{\Omega}_{1,2} = 2\tilde{H} - \frac{(a(a+2b) + 4a(2be_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}} \pm \rho_1\rho_2))}{4(a+2b)}V_1 -$$
$$-\frac{2(b(a+2b) - b(2be_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}} \pm \rho_1\rho_2))}{a+2b}V_2 - \frac{2\sqrt{a}b(1-2e_1^{0^2})}{\sqrt{1-e_1^{0^2}}\rho_1 \pm e_1^0\rho_2}V_3.$$

Здесь $\rho_1 = (a/2 + b(1-2e_1^{0^2}))^{1/2}$, $\rho_2 = (a/2 - b(1-2e_1^{0^2}))^{1/2}$.

Исследуем устойчивость одного из семейств решений (5.9), например,

$$\omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ e_1 = e_1^0,\ e_2 = -\sqrt{1-e_1^{0^2}},\ e_3 = 0,\ \gamma_1 = -\frac{\rho_1}{\sqrt{a}},\ \gamma_2 = -\frac{\rho_2}{\sqrt{a}},\ \gamma_3 = 0 \quad (5.10)$$

используя интеграл $\tilde{\Omega}_1$ для получения достаточных условий. В отклонениях

$$y_1 = \omega_1,\ y_2 = \omega_2,\ y_3 = e_1 - e_1^0,\ y_4 = e_2 + \sqrt{1-e_1^{0^2}},\ y_5 = e_3,$$
$$y_6 = \gamma_1 + \frac{\rho_1}{\sqrt{a}},\ y_7 = \gamma_2 + \frac{\rho_2}{\sqrt{a}},\ y_8 = \gamma_3$$

на линейном многообразии, определяемом первыми вариациями условных интегралов

$$\delta V_1 = -\frac{2}{\sqrt{a}}(\rho_1 y_6 + \rho_2 y_7) = 0,\ \delta V_2 = 2(e_1^0 y_3 - \sqrt{1-e_1^{0^2}}\,y_4) = 0,$$
$$\delta V_3 = e_1^0 y_6 - \frac{1}{\sqrt{a}}(\rho_1 y_3 + \rho_2 y_4) - \sqrt{1-e_1^{0^2}}\,y_7 = 0$$

вторая вариация интеграла $\tilde{\Omega}_1$ имеет вид: $\delta^2\tilde{\Omega}_1 = Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 = \alpha_{55}y_5^2 + \alpha_{58}y_5y_8 + \alpha_{88}y_8^2,\ Q_2 = \beta_{11}y_1^2 + \beta_{22}y_2^2 + \beta_{66}y_6^2,$$

$$\alpha_{55} = \frac{b(a + 2b(1 + 2e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}) + \rho_1\rho_2)}{2(a+2b)},\ \alpha_{58} = -\frac{\sqrt{a}b(1-2e_1^{0^2})}{\sqrt{1-e_1^{0^2}}\rho_1 + e_1^0\rho_2},$$

$$\alpha_{88} = \frac{a(3a + 2b(3 - 4e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}) - 2\rho_1\rho_2)}{8(a+2b)},$$

$$\beta_{11} = \frac{a(2A + D - 2(A-B)e_1^{0^2}) - 2D(b(1-2e_1^{0^2})^2 + 2e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}\rho_1\rho_2)}{4ae_1^{0^2}},$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2}(C + D), \beta_{66} =$$
$$= -\frac{a}{\sqrt{2}\rho_2^3(\sqrt{1-e_1^{0^2}}\rho_1 + e_1^0\rho_2)^2}[((a + 2b(1 - 8e_1^{0^2}(1-e_1^{0^2})))\rho_1\rho_2 +$$
$$+ e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}(a^2 - 2ab - 8b^2(1-2e_1^{0^2})^2)\rho_2)].$$

Условия положительной определенности квадратичных форм Q_1, Q_2:

$$\Delta_1 = \alpha_{55} > 0,\ \Delta_2 = a\Delta_1 > 0,\ \beta_{11} > 0,\ \beta_{22} > 0,\ \beta_{66} > 0. \tag{5.11}$$

С учетом условий вещественности решений (5.10)

$$((e_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } e_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ и } a \neq 0) \text{ или } ((-1 \le e_1^0 < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{2}} < e_1^0 \le 1) \text{ и }$$
$$((a < 0 \text{ и } \rho \le b \le -\rho) \text{ или } (a > 0 \text{ и } -\rho \le b \le \rho))) \text{ или }$$
$$(-\frac{1}{\sqrt{2}} < e_1^0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } ((a < 0 \text{ и} -\rho < b < \rho) \text{ или } (a > 0\ 8\ \rho < b < -\rho))),$$

где $\rho = -a/(2(1 - 2e_1^{0^2}))$, неравенства (5.11) совместны при следующих ограничениях на параметры e_1^0, a, b:

$$a > 0 \text{ и } ((-1 < e_1^0 < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } -\rho < b < -\frac{a}{2}) \text{ или }$$
$$(-\frac{1}{\sqrt{2}} < e_1^0 < 0 \text{ и } \rho \le b < -\frac{a}{2}) \text{ или } (0 < e_1^0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{a}{2} < b < -\rho) \tag{5.12}$$
$$\text{или } (e_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } b > \frac{a}{2}) \text{ или } (\frac{1}{\sqrt{2}} < e_1^0 < 1 \text{ и } \frac{a}{2} < b \le \rho)).$$

Неравенства (5.12) выделяют из семейства решений (5.10) подсемейство, элементы которого устойчивы. Аналогичный результат будем иметь и при исследовании устойчивости элементов 2-го семейства решений (5.9), если для получения достаточных условий устойчивости использовать семейство интегралов Ω_2.

Сопоставим достаточные условия (5.12) с необходимыми. Запишем уравнения первого приближения. В рассматриваемом случае они имеют вид:

$$\dot{y}_1 = -\sqrt{1 - e_1^{0^2}}\, y_8,\quad \dot{y}_2 = -e_1^0 y_8,\quad \dot{y}_3 = \frac{y_7}{e_1^0},\ \dot{y}_4 = -\frac{\rho_2 y_8}{\sqrt{a}},\ \dot{y}_5 = \frac{\rho_1 y_8}{\sqrt{a}},$$
$$\dot{y}_6 = -\frac{(e_1^0\rho_1 - \sqrt{1 - e_1^{0^2}}\,\rho_2)y_7}{\sqrt{a}\,e_1^0},$$
$$\dot{y}_7 = \frac{ae_1^0}{2\rho_3}(\sqrt{a}(\sqrt{1 - e_1^{0^2}}\,(2\rho_1 - 3\rho_2) + e_1^0(3\rho_1 - 2\rho_2))y_6 - \tag{5.13}$$
$$- 4b(1 + 2e_1^0\sqrt{1 - e_1^{0^2}})y_3),$$
$$\dot{y}_8 = \frac{1}{C + D}(2b(e_1^0 y_1 + \sqrt{1 - e_1^{0^2}}\, y_2) - \sqrt{a}(\rho_1 y_4 + \rho_2 y_5)).$$

Здесь y_i – отклонения от элементов исследуемого семейства решений,

$$\rho_3 = a(2A + D - 2(A-B)e_1^{0^2}) - 2D(b(1-2e_1^{0^2})^2 + 2e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}\,\rho_1\rho_2),$$

Характеристическое уравнение системы (40)

$$\lambda^4((C+D)\lambda^2 + 4be_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}} - 2\rho_1\rho_2)[4\lambda^2\rho_3 + a(a(3+4e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}}) +$$
$$+ 2(b(1+4e_1^0(3e_1^0(1-e_1^{0^2}) + 2\sqrt{1-e_1^{0^2}})) - 2(1+3e_1^0\sqrt{1-e_1^{0^2}})\rho_1\rho_2))] = 0$$

имеет только нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями при следующих ограничениях на параметры a, b, e_1^0:

$$a>0 \text{ и } ((e_1^0=\pm 1 \text{ или } e_1^0=0) \text{ и } (b=-\frac{a}{2} \text{ или } b=\frac{a}{2})) \text{ или},$$
$$((e_1^0=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } b\geq\frac{a}{2}) \text{ или } (e_1^0=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } b\leq-\frac{a}{2})) \text{ или},$$
$$(-1<e_1^0<-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } -\rho\leq b\leq-\frac{a}{2}) \text{ или}, \qquad (5.14)$$
$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}<e_1^0<0 \text{ и } \rho\leq b\leq-\frac{a}{2}) \text{ или } (0<e_1^0<\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{a}{2}\leq b\leq-\rho),$$
$$8;8\ (\frac{1}{\sqrt{2}}<e_1^0<1 \text{ и } \frac{a}{2}\leq b\leq\rho).$$

Из сопоставления неравенств (5.12) и (5.14) можно заключить, что достаточные условия близки к необходимым.

6. Заключение. Проведен качественный анализ дифференциальных уравнений, описывающих вращательное движение твердого тела, заключенного жестко в сферическую оболочку, к которой примыкает один шар и один диск. Рассмотрено движение тела по инерции и под действием потенциальных сил. Найдены семейства стационарных решений и стационарные ИМ уравнений движения тела и дана их механическая интерпретация. Показано, что в обоих указанных случаях существуют положения равновесия тела, соответствующие различным углам между векторами **E** и $\boldsymbol{\gamma}$. При наличии потенциальных сил – движения маятникового типа. Проведено исследование ряда найденных решений на устойчивость по Ляпунову. Для положений равновесия тела при отсутствии внешних сил доказана неустойчивость по первому приближению. При наличии потенциаьных сил для решений указанного типа получены достаточные условия устойчивости и сопоставлены с необходимыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* О катании шара по горизонтальной плоскости // Мат. сборник. 1903. Т. 24. № 1. С. 139–168.
2. *Веселов А.П., Веселова Л.Е.* Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Мат. заметки. 1988. Т. 44. № 5. С. 604–619.

3. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Новая интегрируемая система неголономной механики // Доклады РАН. 2015. Т. 462. № 6. С. 657–659. https://doi.org/10.7868/S0869565215180097
4. *Crossley V.A.* A Literature review on the design of spherical rolling robots // Pittsburgh. PA. 2006. 6 p.
5. *Zhan Q.* Motion planning of a spherical mobile robot // In: Motion and operation planning of robotic systems. Mechanisms and Machine Science. Carbone G., Gomez-Bravo F. (eds.). Springer. 2015. V. 29. P. 361–381. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14705-5_12
6. *Chi X., Zhan Q.* Design and modelling of an amphibious spherical robot attached with assistant fins // Appl. Sci. 2021. V. 11. № 9. P. 3739. https://doi.org/10.3390/app11093739
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
8. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillan and Co., 1905.
9. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Соб. соч. М.: АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
10. *Сальвадори Л.* Об устойчивости движения // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1970. Т. 124. № 6. С. 3–19.
11. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неголономных систем. // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 260–271.
12. *Иртегов В.Д.* Инвариантные многообразия стационарных движений и их устойчивость. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
13. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 6. С. 1359–1363.
14. *Борисов, А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
15. *Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* Об инвариантных многообразиях систем с первыми интегралами // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 531–537.

ON THE STATIONARY MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A SPHERICAL SUPPORT

V. D. Irtegov[a, *], T. N. Titorenko[a, **]

[a]*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*

**E-mail: irteg@icc.ru, **e-mail: titor@icc.ru*

Absrtact – We conduct the qualitative analysis of differential equations describing the rotation of a dynamically asymmetric rigid body around a fixed point. The body is enclosed in a spherical shell, to which one ball and one disk adjoin. The motion of the body by inertia and under the action of potential forces is considered. It is established that in the absence of external forces, the differential equations have the families of solutions corresponding to the equilibrium positions of the body, and in the case of potential forces there exist manifolds of pendulum motions. For a number of the solutions, the necessary and sufficient conditions of the Lyapunov stability are derived.

Keywords: rigid body, spherical suspension, nonholonomic joint, stationary motions, stability

REFERENCES

1. *Chaplygin S.A.* Rolling of a ball on a horizontal plane. Mat. Sb. 1903. V. 24. № 1. P. 139–168. (in Russian)
2. *Veselov A.P., Veselova L.E.* Integrable nonholonomic systems on Lie groups // Math. Notes. 1988. V. 44. № 5. P. 810–819. https://doi.org/10.1007/BF01158420
3. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* A new integrable system of nonholonomic mechanics // Doklady Physics. 2015. V. 60. № 6. P. 269–271. https://doi.org/10.1134/S1028335815060087
4. *Crossley V.A.* A Literature review on the design of spherical rolling robots. placeCityPittsburgh, StatePA, 2006. 6 p.
5. *Zhan Q.* Motion planning of a spherical mobile robot // In: Motion and operation planning of robotic systems. Mechanisms and Machine Science. G. Carbone, F. Gomez-Bravo (eds.). Springer, 2015. V. 29. P. 361–381. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14705-5_12
6. *Chi X., Zhan Q.* Design and Modelling of an Amphibious Spherical Robot Attached with Assistant Fins // Appl. Sci. 2021. V. 11. № 9. 19 p. https://doi.org/10.3390/app11093739
7. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1881. V. 7. P. 375–422.
8. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 6 Edition. London: MacMillan and Co., 1905.
9. *Lyapunov A.M.* On Permanent helical motions of a rigid body in fluid. Collected Works, USSR Acad. Sci. Moscow–Leningrad. 1954. V. 1. P. 276–319. (in Russian)
10. *Salvadori L.* Sulla stabilita del movimento // Matematiche. 1969. V. 24. P. 218–238.
11. *Rumianstev V.V.* On stability of motion of nonholonomic systems // Appl. Math. Mech. 1967. V. 31. Issue. 2. P. 282–293.
12. *Irtegov V.D.* Invariant manifolds of stationary motions and their stability. Novosibirsk: Nauka, 1985. (in Russian)
13. *Bogoyavlenskii O.I.* Two integrable cases of a rigid body dynamics in a force field // USSR Acad. Sci. Doklady. 1984. V. 275. № 6. P. 1359–1363. (in Russian)
14. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics. Hamiltonian methods, Integrability, chaos. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005. (in Russian)
15. *Irtegov V.D., Titorenko T.N.* The invariant manifolds of systems with first integrals // Appl. Math. Mech. 2009. V. 73. Issue 4. P. 385–394. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.014