

УДК 539.311

## КРУЧЕНИЕ С КРУГОВЫМ СДВИГОМ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2025 г. Г. М. Севастьянов<sup>a</sup>, \*, О. Н. Комарова<sup>a</sup>, \*\*, А. В. Попов<sup>a</sup>, \*\*\*

<sup>a</sup>Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,  
Комсомольск-на-Амуре, Россия

\*E-mail: akela.86@mail.ru, \*\*e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru,  
\*\*\*e-mail: popov.av@live.com

Поступила в редакцию 16.09.2024 г.

После доработки 20.09.2024 г.

Принята к публикации 30.09.2024 г.

Рассматривается совместное действие кручения и кругового сдвига в нелинейно-упругом несжимаемом полом цилиндре. Решение получено для произвольного упругого потенциала, являющегося функцией только первого инварианта левого тензора деформации Коши–Грина (обобщенный неогуковский материал). Для материала Гента получено аналитическое решение в замкнутом виде. Предложена конструкция поворотного демпфера с трением, основанная на полученном решении. Приведены формулы для диссипации кинетической энергии за счет трения на цилиндрических поверхностях трубы. Для материала, проявляющего падение упругого модуля при деформировании, получено численное решение, которое сравнивается с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: нелинейная упругость, кручение, круговой сдвиг, материал Гента, поворотный демпфер

DOI: 10.31857/S1026351925010113, EDN: SZOOLU

**Введение.** Комбинация различных видов сдвиговой деформации в осесимметричных цилиндрических телах, а именно кручения, продольного (или антиплоского) сдвига, кругового (или азимутального) сдвига, представляет собой интересную проблему нелинейной теории упругости, которой посвящен ряд публикаций [1–10]. Любая комбинация этих сдвигов есть изохорная деформация. Из упомянутых выше сдвигов только простое кручение может быть реализовано в произвольном нелинейно-упругом несжимаемом материале [11, 12]. Для остальных есть решения в тех или иных подклассах упругих материалов.

В работе [3] получено аналитическое решение для комбинации кручения с круговым сдвигом в обобщенном степенном неогуковском теле с упругим потенциалом [13]:

$$W = \frac{\mu}{2b} \left[ \left( 1 + \frac{b}{n} (I_1 - 3) \right)^n - 1 \right],$$

здесь  $I_1 = \text{tr } \mathbf{B}$  есть первый инвариант левого тензора деформации Коши–Грина  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ ,  $\mathbf{F}$  тензор градиента деформации;  $\mu$  представляет собой аналог модуля сдвига в линейной теории упругости,  $b, n$  – материальные константы.

В работе [10] та же комбинация сдвиговых деформаций была исследована для материала Муни–Ривлина с упругим потенциалом:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3), \quad 2I_2 = \text{tr}^2 \mathbf{B} - \text{tr} \mathbf{B}^2,$$

где  $C_1, C_2$  – материальные константы.

Также стоит упомянуть публикацию [4], в которой эта проблема рассмотрена для сжимаемого материала.

В настоящей публикации рассмотрена задача о комбинации кручения с круговым сдвигом для класса гиперупругих материалов с упругим потенциалом, зависящим только от  $I_1$ . Найдено общее решение проблемы в том смысле, что вычисление перемещений и напряжений в теле сведено к решению алгебраического уравнения и вычислению однократных интегралов.

Решение в замкнутом виде получено для одного частного случая – материала Гента [14] с упругим потенциалом:

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right),$$

где  $J_m = I_1^{\max} - 3$  – константа материала,  $I_1^{\max}$  – предельное значение  $I_1$ . Материал Гента это простейшая феноменологическая модель, которая основана на концепте ограниченной растяжимости полимерных цепей (см. [15]). В этой модели функция плотности энергии деформации имеет сингулярность при  $I_1 \rightarrow I_1^{\max}$ . В пределе  $I_1^{\max} \rightarrow \infty$  модель Гента переходит в неогуковскую модель. Здесь следует упомянуть две публикации [16, 17], в которых для несжимаемого материала с ограниченной растяжимостью полимерных цепей кручение и круговой сдвиг были рассмотрены по отдельности. Также отметим, что комбинация кругового и антиплоского сдвигов исследовалась в контексте вязкоупругого течения в [18].

**1. Кручение с круговым сдвигом.** Для полого цилиндра с внутренним радиусом  $R_0$ , внешним радиусом  $R_1$  и длиной  $L$  комбинация кручения с круговым сдвигом описывается уравнениями:

$$r = R, \quad \theta = \Theta + \Psi(R, Z), \quad z = Z, \quad (1.1)$$

которые связывают цилиндрические координаты точки материала в недеформированном состоянии  $(R, \Theta, Z)$  с координатами  $(r, \theta, z)$  в деформированном состоянии. Если  $\Psi(R, Z) = \Psi(Z)$ , то (1.1) описывает кручение, если  $\Psi(R, Z) = \Psi(R)$ , то (1.1) описывает круговой сдвиг. Мы не накладываем каких-либо ограничений на вид функции  $\Psi(R, Z)$ , рассматривая действие на тело комбинации кручения и кругового сдвига.

Для кинематики (1.1) координатное представление тензора деформации  $\mathbf{B}$  есть

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 1 & R\Psi_R & 0 \\ R\Psi_R & 1 + (R\Psi_R)^2 + (R\Psi_Z)^2 & R\Psi_Z \\ 0 & R\Psi_Z & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее введены обозначения  $\Psi_r = \partial\Psi/\partial R = \partial\Psi/\partial r$ ,  $\Psi_z = \partial\Psi/\partial Z = \partial\Psi/\partial z$ .

Инварианты тензора  $\mathbf{B}$  имеют вид:

$$I_1 - 3 = I_2 - 3 = (r\Psi_r)^2 + (r\Psi_z)^2. \quad (1.2)$$

Для упругого потенциала, зависящего только от инварианта  $I_1$ , тензор напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  может быть выражен равенством [19]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{dW}{dI_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}} = -p\mathbf{I} + 2w\mathbf{B}, \\ W &= W(I_1 - 3), \quad w = w(I_1 - 3) = \partial W/\partial I_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  единичный тензор,  $p$  скалярная функция, служащая для удовлетворения ограничения несжимаемости.

Согласно (1.3) компоненты тензора напряжений есть

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= 0, \quad \sigma_{r\theta} = 2wr\Psi_r, \quad \sigma_{\theta z} = 2wr\Psi_z, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -p + 2w, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2[(r\Psi_r)^2 + (r\Psi_z)^2]w. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Компоненты уравнения равновесия  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  есть

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2 \left[ (r\Psi_r)^2 + (r\Psi_z)^2 \right] w, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 2wr \left[ \Psi_{rr} + \Psi_{zz} + \frac{3}{r}\Psi_r + \frac{1}{w}(\Psi_r w_r + \Psi_z w_z) \right] = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения  $\Psi_{rr} = \partial^2\Psi/\partial R^2 = \partial^2\Psi/\partial r^2$ ,  $\Psi_{zz} = \partial^2\Psi/\partial Z^2 = \partial^2\Psi/\partial z^2$ ,  $w_r = \partial w/\partial R = \partial w/\partial r$ ,  $w_z = \partial w/\partial Z = \partial w/\partial z$ .

Третье уравнение в (1.5) говорит о том, что радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  не зависит от продольной координаты  $z$ . Далее, поскольку правая часть первого уравнения в (1.5) есть функция только инварианта  $I_1$ , то этот инвариант также не зависит от  $z$ , то есть  $\partial I_1/\partial z = 0$  и также  $w_z = 0$ . Следовательно, из (1.2) имеем  $(\Psi_r)^2 + (\Psi_z)^2 = f(r)$ , где  $f(r)$  есть некоторая функция, и по [20]

$$\Psi = \alpha z/L + \psi, \quad \psi = \psi(r), \quad \alpha = \text{const.} \quad (1.6)$$

Величина  $\alpha \geq 0$  определяет величину кручения. Здесь полагается, что функция  $\psi(r)$  монотонна, и направление отсчета угловой координаты выбрано так, что  $d\psi/dr \geq 0$ .

Тогда по (1.2)

$$I_1 - 3 = (r\Psi_r)^2 + (r\Psi_z)^2 = (r\psi')^2 + (\alpha r/L)^2, \quad \psi' = d\psi/dr \quad (1.7)$$

и  $w = w(I_1 - 3)$  есть функция одной только координаты  $r$ , так что второе уравнение в (1.5) принимает вид:

$$\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{3}{r} + \frac{w_r}{w} = \frac{d \ln(wr^3\psi')}{dr} = 0.$$

Откуда

$$wr^3\psi' = K = \text{const}, \quad w = w(I_1 - 3). \quad (1.8)$$

В частности, для неогуковского материала (материала Трелоара) с  $W = (\mu/2)(I_1 - 3)$  и  $w = \partial W/\partial I_1 = \mu/2$  из формулы (1.8) следует, что  $\psi' \sim r^{-3}$ ; стоит отметить, что аналогичный результат имеет место для материала Муни–Ривлина (см. [10]). То есть искажение материальных волокон из-за кругового сдвига зависит в большей степени от вида функциональной зависимости  $W = W(I_1)$ , но не от присутствия в упругом законе членов, зависящих от инварианта  $I_2$ .

Учитывая (1.7), уравнение (1.8) представляет собой алгебраическое уравнение относительно функции  $\psi'(r)$ . Константа интегрирования  $K$  имеет размерность силы и определяется граничными условиями. Таким образом, полное решение задачи сводится к решению алгебраического уравнения (1.8) относительно  $\psi'$  и отысканию интеграла, чтобы получить  $\psi(r)$  и построить поле перемещений по формуле (1.6); а также к отысканию интеграла в первом уравнении системы (1.5), чтобы найти функцию  $r$  и определить напряжения.

Отметим, что, согласно (1.6),  $\Psi$  линейно зависит от координаты  $z$ , что совпадает со случаем простого кручения. Согласно (1.7),  $\partial I_1/\partial z = 0$  и, следовательно, упругая энергия не зависит от продольной координаты. Кроме того,  $\partial r/\partial z = 0$  и напряженное состояние зависит только от радиальной координаты  $r$ . Такие же результаты следуют для материала Муни–Ривлина (см. [10]), для которого, однако,  $\sigma_{rz} \neq 0$ .

Отметим, что из (1.8) и (1.4) следует, что

$$r^2\sigma_{r\theta} = R_1^2 T_{s1} = 2K = \text{const}, \quad (1.9)$$

где  $T_{s1} = \sigma_{r\theta}(R_1) \geq 0$  есть силовая характеристика приложенного кругового сдвига. Тогда

$$\sigma_{r\theta} = \left( \frac{R_1}{r} \right)^2 T_{s1}. \quad (1.10)$$

Последнее равенство, задающее распределение касательного напряжения  $\sigma_{r\theta}$ , представляет собой универсальное соотношение для наложения кругового сдвига на деформацию кручения. То есть оно верно при любом упругом потенциале вида  $W(I_1)$ . Это выражение также не зависит от величины деформации кручения и верно, в том числе, и для чистого кругового сдвига.

**2. Частный случай (материал Гента).** Для упругого потенциала Гента

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

согласно (1.7) имеем:

$$w = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - (I_1 - 3)} = \frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - [(r\psi')^2 + (\alpha r/L)^2]}. \quad (2.1)$$

Тогда из (1.8) и (1.9) с учетом (2.1) следует квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\psi}{d\Delta} \right)^2 + 2s \left( \frac{d\psi}{d\Delta} \right) - q = 0 \\ s = \frac{J_m}{4} \frac{\mu}{T_{s1}} \geq 0, \quad q(\Delta) = \frac{1}{4\Delta^2} \left[ J_m - \Delta \left( \alpha \frac{R_l}{L} \right)^2 \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введена новая безразмерная переменная:

$$\Delta = \left( \frac{r}{R_l} \right)^2; \quad r \frac{d(\psi)}{dr} = r \frac{d(\psi)}{d\Delta} \frac{d\Delta}{dr} = 2\Delta \frac{d(\psi)}{d\Delta}.$$

Корень уравнения (2.2) есть

$$\frac{d\psi}{d\Delta} = -s + \sqrt{s^2 + q}. \quad (2.3)$$

Проинтегрируем (2.3):

$$\begin{aligned} \psi(R) - \psi(R_l) &= \frac{\sqrt{J_m}}{2} \left[ \Omega \left( \frac{\Delta}{s_0} \right) - \Omega \left( \frac{1}{s_0} \right) \right], \\ \Omega(\xi) &= \Re(\xi) - \xi - c_1 \ln |\Re(\xi) + \xi - c_1| - \ln \left| \frac{\Re(\xi) + 1}{\xi} - c_1 \right|, \\ \Re(\xi) &= \sqrt{\xi^2 - 2c_1\xi + 1}, \quad c_0 = \frac{2}{\sqrt{J_m}} \frac{T_{s1}}{\mu}, \quad c_1 = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{J_m}} \frac{R_l}{L} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если перейти к пределу  $J_m \rightarrow \infty$  в формуле (2.4), используя правило Лопитала имеем  $\lim_{J_m \rightarrow \infty} [\psi(r) - \psi(R_l)] = (1/2)(T_{s1}/\mu)(1 - 1/\Delta)$ . Это выражение совпадает с выражением для материала Трелоара, которое можно получить, интегрируя (1.8) с учетом (1.9).

В решении (2.4) фигурируют кинематическая характеристика кручения (угол  $\alpha$ ) и силовая характеристика кругового сдвига – усилие  $T_{s1} = \sigma_{r\theta}(R_l)$ .

Преобразуем первое уравнение равновесия в (1.5) с учетом (1.6), (2.1), (2.2) и (2.3):

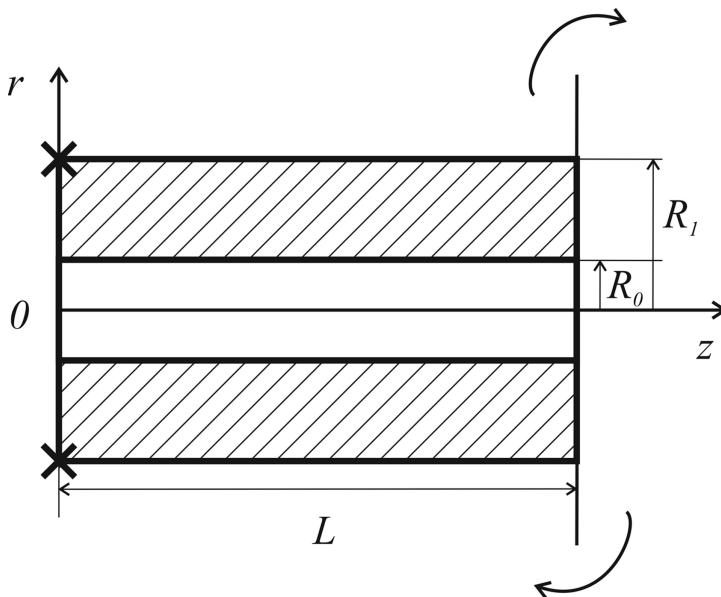


Рис. 1. Схема нагружения деформируемого элемента демпфера.

$$\Delta \frac{d\sigma_{rr}}{d\Delta} = \frac{\mu J_m}{2} \left[ \frac{J_m}{J_m - 4\Delta^2 (d\psi/d\Delta)^2 - \Delta (\alpha R_1/L)^2} - 1 \right] = \frac{\mu J_m}{2} \left[ \frac{J_m (\sqrt{s^2 + q} + s)}{8\Delta^2 sq} - 1 \right]$$

и проинтегрируем:

$$\frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{rr}(R_1)}{\mu} = \frac{J_m}{4} \left[ \Upsilon\left(\frac{\Delta}{c_0}\right) - \Upsilon\left(\frac{1}{c_0}\right) \right], \quad (2.5)$$

$$\Upsilon(\xi) = -\frac{\Re(\xi)}{\xi} - \ln \xi - 2 \ln |1 - 2c_1 \xi| - c_1 \ln \left| \frac{\Re(\xi) + 1}{\xi} - c_1 \right| + \ln \left| \Re(\xi) + (1 - 2c_1^2) \xi + c_1 \right|.$$

**3. Начально-краевая задача. Поворотный демпфер.** Поворотные демпферы служат для рассеяния кинетической энергии колебаний и вибраций в механизмах, которые совершают поворотные движения, в том числе в автомобилях и промышленных механизмах. Рассеяние механической энергии в таких устройствах часто происходит за счет трения. В этом разделе мы предлагаем конструкцию поворотного демпфера с трением и исследуем ее на основе полученного в предыдущих разделах решения.

Итак, пусть деформируемый элемент демпфера выполнен так, как показано на рис. 1.

Обод  $z=0, r=R_1$  жестко закреплен, обод  $z=L, r=R_1$  подвижен, испытывает поворот на угол  $\alpha \geq 0$ . Движение материала вдоль образующей исключено. На цилиндрических поверхностях  $r=R_0$  и  $r=R_1$  задан закон сухого трения. Это подразумевает выполнение следующих краевых условий:

$$\begin{aligned}\Psi|_{\substack{z=0 \\ r=R_1}} = \psi(R_1) = 0, \quad \Psi|_{\substack{z=L \\ r=R_1}} = \alpha + \psi(R_1) = \alpha, \\ \sigma_{r\theta}(R_0) = -k_0 \sigma_{rr}(R_0), \quad \sigma_{r\theta}(R_1) = -k_1 \sigma_{rr}(R_1),\end{aligned}$$

где  $k_0$  и  $k_1$  известные коэффициенты трения скольжения на цилиндрических поверхностях. Тогда  $\sigma_{rr}(R_1) = -T_{s1}/k_1$ , и, по (1.10),  $\sigma_{rr}(R_0) = -T_{s1}/(k_0\Delta_0)$ ,  $\Delta_0 = (R_0/R_1)^2$ .

*3.1. Материал Гента. Аналитическое решение.* Для материала Гента по (2.5) имеем уравнение:

$$\frac{\sigma_{rr}(R_1) - \sigma_{rr}(R_0)}{\mu} = \frac{T_{s1}}{\mu} \left( \frac{1}{k_0\Delta_0} - \frac{1}{k_1} \right) = \frac{J_m}{4} \left[ \Upsilon \left( \frac{1}{c_0} \right) - \Upsilon \left( \frac{\Delta_0}{c_0} \right) \right],$$

которое по заданной величине угла кручения  $\alpha$  позволяет установить  $T_{s1}$  (как корень нелинейного алгебраического уравнения).

Удельная по объему материала безразмерная механическая энергия, затраченная на упругое деформирование:

$$\begin{aligned}\frac{E_{el}}{\pi\mu L(R_1^2 - R_0^2)} &= \frac{1}{\pi\mu L(R_1^2 - R_0^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{R_1} W r dr d\theta dz = \frac{2}{\mu(R_1^2 - R_0^2)} \int_{R_0}^{R_1} W r dr = \\ &= \frac{J_m}{(R_1^2 - R_0^2)} \int_{R_1}^{R_0} \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) r dr = \\ &= \frac{J_m}{2(1 - \Delta_0)} \int_1^{\Delta_0} \ln \left[ 1 - \frac{4\Delta^2 (d\psi/d\Delta)^2 + \Delta(\alpha R_1/L)^2}{J_m} \right] d\Delta = \\ &= \frac{J_m}{2(1 - \Delta_0)} \left\{ \Delta_0 \ln \Delta_0 + (1 - \ln 2 + \ln c_0)(1 - \Delta_0) + c_0 \left[ J \left( \frac{\Delta_0}{c_0} \right) - J \left( \frac{1}{c_0} \right) \right] \right\}, \\ J(\xi) &= \int \ln(\mathfrak{R} - \xi) d\xi = \frac{\mathfrak{R} - \xi}{2} + \ln \frac{(\mathfrak{R} + \xi - c_1)^{c_1/2 - 1/(4c_1)} (1 + c_1(\mathfrak{R} - \xi))^{1/(4c_1)}}{(\mathfrak{R} - \xi)^{(\mathfrak{R}^2 - \xi^2)/(2c_1)} (\mathfrak{R} + \xi)^{1/(4c_1)}}.\end{aligned}$$

Удельная по объему материала безразмерная энергия, затраченная на работу против сил трения:

$$\frac{E_{fr}}{\pi\mu L(R_1^2 - R_0^2)} = \frac{|\sigma_{r\theta}(R_0)| 2\pi R_0}{\pi\mu L(R_1^2 - R_0^2)} \int_0^L R_0 \alpha \frac{z}{L} dz + \frac{|\sigma_{r\theta}(R_1)| 2\pi R_1}{\pi\mu L(R_1^2 - R_0^2)} \int_0^L R_1 \alpha \frac{z}{L} dz = \frac{T_{s1}}{\mu} \frac{2\alpha}{1 - \Delta_0}.$$

Крутящий момент, который нагружает конструкцию, рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{d(E_{fr} + E_{el})}{d\alpha}. \quad (3.1)$$

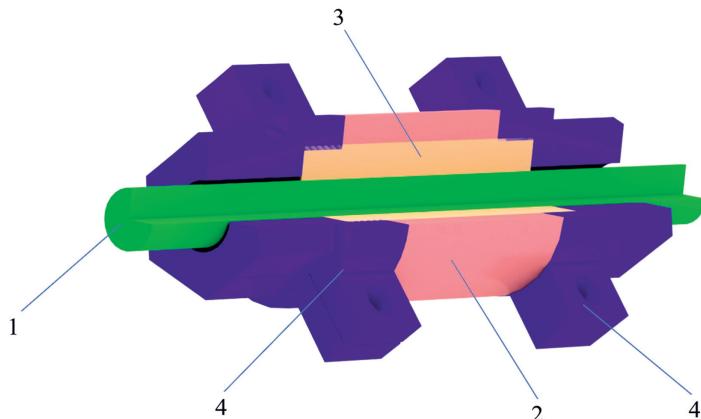


Рис. 2. Конструкция поворотного демпфера с трением: 1 – центральная втулка, 2 – наружная обойма, 3 – упругий элемент, 4 – захваты.

**3.2. Материал с разупрочнением. Численное решение. Сопоставление с экспериментальными данными.** Описываемая в статье схема деформирования реализована в виде конструкции поворотного демпфера (рис. 2).

Детали 1, 2, 4 (рис. 2) изготовлены методом 3D печати из полиэтилен-терефталат-гликоля (филамент – нить диаметром 1.75 мм производства Bestfilament, РФ) с помощью 3D-принтера Designer X PICASO 3D (РФ) по технологии послойного нанесения расплавленного материала FDM (Fused Deposition Modeling). Параметры печати соответствовали следующим показателям: сопло 0.5мм, высота слоя 0.25мм, заполнение 35%, температура сопла 240 °C, температура стола 60 °C. В качестве материала основного демпфирующего элемента (3) применялся полиуретан твердостью по Шору A83. Внешний диаметр демпфирующего элемента 22.2 мм, внутренний диаметр 10.5 мм. Внутреннее отверстие в демпфирующем элементе (3) получено методом высечки. Полная длина демпфирующего элемента 62 мм (расстояние между захватами 42 мм). Центральная втулка (1) представляет собой сплошной цилиндр длиной 150 мм и диаметром 10.5 мм. Наружная обойма длиной 42 мм имеет внешний диаметр 32 мм и внутренний диаметр 22.2 мм. Захваты (4) выполнены разъемными. На внутренней поверхности захватов выполнены шлицы для исключения проскальзывания (отмечены штриховкой на рис. 2). Захваты обжимают демпфирующий элемент (3). Внешняя поверхность захватов выполнена в виде шестигранников под ключ 24 мм. Фотография элементов демпфера представлена на рис. 3.

После сборки конструкции проведен замер крутящего момента на ключе в зависимости от угла поворота, экспериментальные данные представлены в виде маркеров на рис. 5. Измерение крутящего момента проведено с использованием электронного динамометрического ключа MXITA со шкалой измерения 2–200 Н·м, измерение угла поворота проведено с помощью кругового транспортира со шкалой измерения 360°.

Для описания упругого поведения полиуретана A83 проведены испытания на простое растяжение. Использован образец длиной 240 мм и диаметром

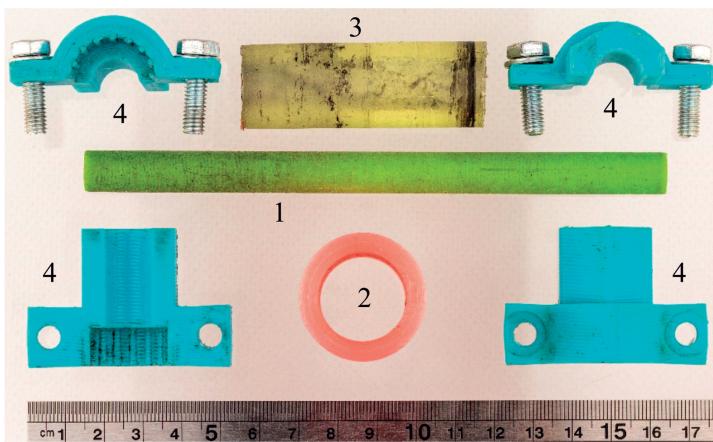


Рис. 3. Элементы конструкции поворотного демпфера с трением: 1 – центральная втулка, 2 – наружная обойма, 3 – упругий элемент, 4 – захваты.

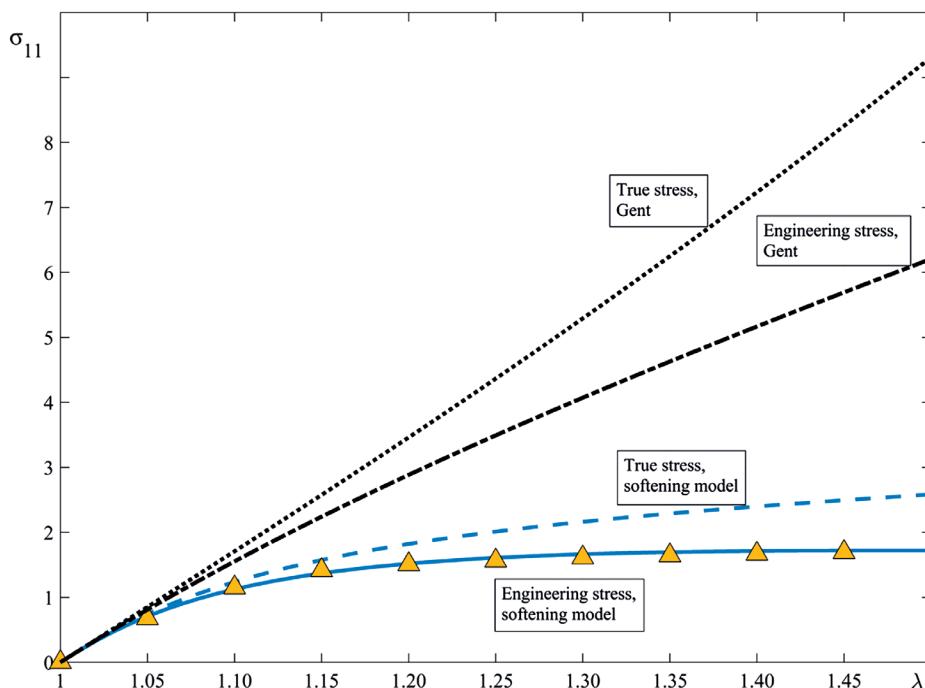


Рис. 4. Простое растяжение,  $\sigma_{11}$  в МПа. Маркеры – экспериментальные данные для полиуретана A83 (инженерные напряжения). Модель Гента с параметрами  $E=3\mu=17$  МПа,  $J_m=16$  (данные для полиуретана A90 по [21]). Модель (3.2) с параметрами  $E_0=17$  МПа,  $E_i=1$  МПа,  $\beta=0.29$ ,  $I_{la}=3=0.107$ .

22.2 мм. Испытание проведено при комнатной температуре на универсальной испытательной машине AG-Xplus 250kN (Shimadzu, Япония) при скорости движения траверсы 10 мм/мин. В отличие от экспериментальных данных [21] для полиуретана с твердостью по Шору A90, используемый нами образец проявляет заметное разупрочнение (см. рис. 4). Это может быть вызвано эффектом Муллинса [22], связанным с накоплением повреждений в материале вследствие предварительного деформирования. Материал был использован в том состоянии, в котором он поставлен.

Для описания упругого поведения материала с разупрочнением использована следующая модель:

$$W = \frac{E_1}{6}(I_1 - 3) + \frac{E_0 - E_1}{12} \left\{ (I_1 - 3) \operatorname{erfc} \left( \beta \ln \frac{I_1 - 3}{I_{1a} - 3} \right) + (I_{1a} - 3) e^{\left[ \frac{1}{2\beta} \right]^2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2\beta} - \beta \ln \frac{I_1 - 3}{I_{1a} - 3} \right) \right\}, \quad (3.2)$$

$$W|_{I_1=3} = 0, \quad \frac{dW}{dI_1} = \frac{E_1}{6} + \frac{E_0 - E_1}{12} \operatorname{erfc} \left( \beta \ln \frac{I_1 - 3}{I_{1a} - 3} \right).$$

Здесь  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\beta$ ,  $I_{1a}$  – константы материала.

Для простого растяжения имеем по известной формуле:

$$\sigma_{11}^{eng} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda} = 2 \frac{dW}{dI_1} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 2 \left[ \frac{E_1}{6} + \frac{E_0 - E_1}{12} \operatorname{erfc} \left( \beta \ln \frac{\lambda^2 + 2/\lambda - 3}{I_{1a} - 3} \right) \right] \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (3.3)$$

где  $\lambda$  – относительное удлинение образца.

На рис. 4 приведен график (3.3) в сравнении с экспериментальными данными при следующих значениях параметров материала:  $E_0 = 17$  МПа,  $E_1 = 1$  МПа,  $\beta = 0.29$ ,  $I_{1a} - 3 = 0.107$ .

Упругая модель (3.2) использована для расчета зависимости крутящего момента, приложенного к поворотному демпферу, от угла поворота  $\alpha$ . Использован следующий алгоритм численного решения:

1) задано  $\sigma_{r\theta}|_{r=R_1} = T_{s1}$ ;

2) задано начальное приближение  $\alpha$ ;

3) по (1.8) и (1.9) имеем уравнение  $2wr^3\psi' = R_1^2 T_{s1}$ , где

$$w = \frac{dW}{dI_1} = \frac{E_1}{6} + \frac{E_0 - E_1}{12} \operatorname{erfc} \left( \beta \ln \frac{I_1 - 3}{I_{1a} - 3} \right);$$

по (1.7)  $I_1 - 3 = (r\psi')^2 + (r\alpha/L)^2$ ; это алгебраическое уравнение решается численно относительно  $\psi'$  в узловых точках по координате  $r$ ;

4) численно интегрируем первое уравнение (1.5)

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 2 \left[ (r\psi')^2 + (r\alpha/L)^2 \right] w$$

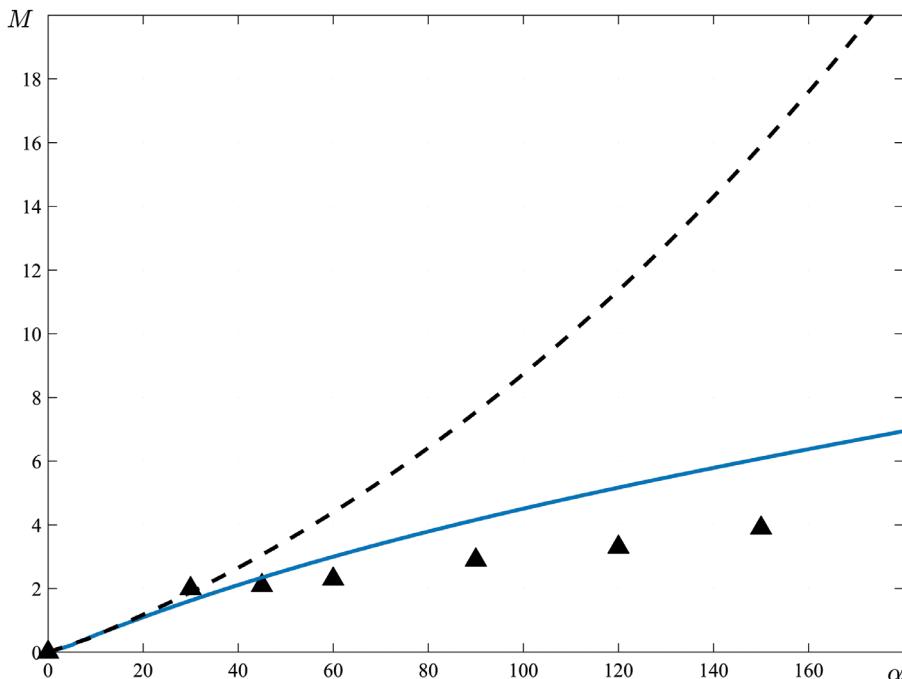


Рис. 5. Крутящий момент  $M$  [Н·м] при нагружении поворотного демпфера углом поворота  $\alpha$  (в градусах). Маркеры – экспериментальные данные. Сплошная линия – численно-аналитический расчет по упругой модели (3.2). Пунктирная линия – аналитический расчет для материала Гента с параметрами  $E=3\mu=17$  МПа,  $J_m=16$ .

с граничным условием  $\sigma_{rr}(R_1) = -T_{s1}/k_1$ ; получаем значение  $\sigma_{rr}(R_0)$ , которое сравниваем с краевым условием  $\sigma_{rr}(R_0) = -T_{s1}(R_1/R_0)^2/k_0$ ; если с заданной точностью краевое условие не выполнено, то корректируем значение  $\alpha$  и возвращаемся в пункт 3.

Шаги 1–4 повторяются с увеличивающимся значением  $\sigma_{r0}|_{r=R_1} = T_{s1}$ .

На рис. 5 приведен результат численного решения задачи по указанному алгоритму для упругой модели (3.2) с параметрами  $E_0=17$  МПа,  $E_1=1$  МПа,  $\beta=0.29$ ,  $I_{1a}-3=0.107$ . Коэффициенты трения полиуретана по материалу втулки (1) и обоймы (2) (см. рис. 2) – полиэтилентерефталат-гликолю – определены экспериментально и составляют  $k_0=k_1=0.35$ . Продольный размер деформируемого материала принят равным расстоянию между захватами,  $L=42$  мм.

Качественно решение согласуется с экспериментальными данными. Некоторое несовпадение может быть обусловлено неидеальным контактом деформируемого материала с оснасткой на поверхностях трения, а также изменением свойств материала после пробития центрального отверстия в цилиндрическом образце. Для сравнения приведены расчетные данные по модели Гента с параметрами  $E=3\mu=17$  МПа,  $J_m=16$  (данные для полиуретана A90 по [21]), которые получены по аналитическому решению (3.1).

Исследование выполнено в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mioduchowski A., Haddow J.B.* Combined torsional and telescopic shear of a compressible hyperelastic tube // *J. Appl. Mech-T Asme.* 1979. V. 46. № 1. P. 223–226.  
<https://doi.org/10.1115/1.3424509>
2. *Fosdick R.L., MacSithigh G.* Helical shear of an elastic, circular tube with a non-convex stored energy // *Arch. Ration. Mech. An.* 1983. V. 84. P. 31–53.  
<https://doi.org/10.1007/BF00251548>
3. *Tao L., Rajagopal K.R., Wineman A.S.* Circular shearing and torsion of generalized neo-Hookean materials // *IMA J. Appl. Math.* 1992. V. 48. № 1. P. 23–37.  
<https://doi.org/10.1093/imamat/48.1.23>
4. *Zidi M.* Azimuthal shearing and torsion of a compressible hyperelastic and prestressed tube // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2000. V. 35. № 2. P. 201–209.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(99\)00008-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(99)00008-6)
5. *Zidi M.* Combined torsion, circular and axial shearing of a compressible hyperelastic and prestressed tube // *J. Appl. Mech-T. Asme.* 2000. V. 67. № 1. P. 33–40.  
<https://doi.org/10.1115/1.321149>
6. *Zidi M.* Finite torsion and shearing of a compressible and anisotropic tube // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2000. V. 35. № 6. P. 1115–1126.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(99\)00083-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(99)00083-9)
7. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Helical shear for hardening generalized neo-Hookean elastic materials // *Math. Mech. Solids.* 2003. V. 8. № 5. P. 539–559.  
<https://doi.org/10.1177/10812865030085007>
8. *Saravanan U., Rajagopal K.R.* Inflation, extension, torsion and shearing of an inhomogeneous compressible elastic right circular annular cylinder // *Math. Mech. Solids.* 2005. V. 10. № 6. P. 603–650.  
<https://doi.org/10.1177/1081286505036422>
9. *Жуков Б.А.* Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // *Изв. РАН. МТТ.* 2015. № 3. С. 127–135.
10. *Севастьянов Г.М.* Кручение с круговым сдвигом материала Муни – Ривлина // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 2. С. 142–146.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329920020129>
11. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // *Philos. Tr. Royal Soc. A.* 1949. V. 242. № 845. P. 173–195.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
12. *Ericksen J.L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // *Z. Angew. Math. Phys.* 1954. V. 5. № 6. P. 466–489.  
<https://doi.org/10.1007/BF01601214>
13. *Knowles J.K.* The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids // *Int. J. Fracture.* 1977. V. 13. P. 611–639.  
<https://doi.org/10.1007/BF00017296>
14. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Technol.* 1996. V. 69. № 1. P. 59–61.  
<https://doi.org/10.5254/1.3538357>
15. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Constitutive modelling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility // *Math. Mech. Solids.* 2002. V. 7 № 4. P. 353–371.  
<https://doi.org/10.1177/108128028477>

16. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Pure azimuthal shear of isotropic, incompressible hyperelastic materials with limiting chain extensibility // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2001. V. 36. № 3. P. 465–475.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(00\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(00)00048-2)
17. *Ansari-Benam A., Horgan C.O.* Extension and torsion of rubber-like hollow and solid circular cylinders for incompressible isotropic hyperelastic materials with limiting chain extensibility // *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2022. V. 92. P. 104443.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104443>
18. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаник Л.В.* Винтовое вязкопластическое течение в зазоре между жесткими цилиндрами // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 55–70.
19. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
20. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003. 416 с.
21. *Kut S., Ryzińska G.* Modeling elastomer compression: Exploring ten constitutive equations // *Materials.* 2023. V. 16. № 11. P. 4121.  
<https://doi.org/10.3390/ma16114121>
22. *Mullins L., Tobin N.R.* Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber // *J. Appl. Polym. Sci.* 1965. V. 9. № 9. P. 2993–3009.  
<https://doi.org/10.1002/app.1965.070090906>

## TORSION AND CIRCULAR SHEAR COUPLING IN NONLINEAR-ELASTIC HOLLOW CYLINDER

G. M. Sevastyanov<sup>a</sup>, \*, O. N. Komarov<sup>a</sup>, \*\*, A. V. Popov<sup>a</sup>, \*\*\*

<sup>a</sup>*Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

<sup>\*</sup>*E-mail: akela.86@mail.ru, <sup>\*\*</sup>e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru,*

<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: popov.av@live.com*

**Abstract** – Combined torsional and circular shear of an incompressible nonlinear-elastic right-circular hollow cylinder is studied. A solution to the problem is obtained for an arbitrary elastic potential depending on the first invariant of the left Cauchy – Green deformation tensor solely (generalized neo-Hookean solid). For the Gent material, an analytical solution in closed form is obtained. A rotary damper design based on the obtained solution is proposed. Formulas for the dissipation of kinetic energy due to friction on the cylindrical surfaces of the pipe are given. For a strain softening material, a numerical solution is obtained, which is compared with experimental results.

**Keywords:** nonlinear elasticity, torsion, circular shear, Gent material, rotary damper

## REFERENCES

1. *Mioduchowski A., Haddow J.B.* Combined torsional and telescopic shear of a compressible hyperelastic tube // *J Appl Mech-T Asme.* 1979. V. 46. № 1. P. 223–226.  
<https://doi.org/10.1115/1.3424509>
2. *Fosdick R.L., MacSithigh G.* Helical shear of an elastic, circular tube with a non-convex stored energy // *Arch. Ration Mech. AN.* 1983. V. 84. P. 31–53.  
<https://doi.org/10.1007/BF00251548>
3. *Tao L., Rajagopal K.R., Wineman A.S.* Circular shearing and torsion of generalized neo-Hookean materials // *IMA J Appl Math.* 1992. V. 48. № 1. P. 23–37.  
<https://doi.org/10.1093/imamat/48.1.23>
4. *Zidi M.* Azimuthal shearing and torsion of a compressible hyperelastic and prestressed tube // *Int. J Nonlin Mech.* 2000. V. 35. № 2. P. 201–209.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(99\)00008-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(99)00008-6)
5. *Zidi M.* Combined torsion, circular and axial shearing of a compressible hyperelastic and prestressed tube // *J Appl. Mech-T Asme.* 2000. V. 67. № 1. P. 33–40.  
<https://doi.org/10.1115/1.321149>
6. *Zidi M.* Finite torsion and shearing of a compressible and anisotropic tube // *Int. J Nonlin Mech.* 2000. V. 35. № 6. P. 1115–1126.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(99\)00083-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(99)00083-9)
7. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Helical shear for hardening generalized neo-Hookean elastic materials // *Math. Mech. Solids.* 2003. V. 5. № 5. P. 539–559.  
<https://doi.org/10.1177/10812865030085007>
8. *Saravanan U., Rajagopal K.R.* Inflation, extension, torsion and shearing of an inhomogeneous compressible elastic right circular annular cylinder // *Math. Mech. Solids.* 2005. V. 10. № 6. P. 603–650.  
<https://doi.org/10.1177/1081286505036422>
9. *Zhukov B.A.* Nonlinear interaction of finite longitudinal shear with finite torsion of a rubber-like bushing // *Mech. Solids.* 2015. V. 50. P. 337–344.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415030097>
10. *Sevastyanov G.M.* Torsion with circular shear of a Mooney – Rivlin solid // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. P. 273–276.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020156>
11. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // *Philos. TR R Soc. S-A.* 1949. V. 242. № 845. P. 173–195.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
12. *Ericksen J.L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // *Z Angew Math. Phys.* 1954. V. 5. № 6. P. 466–489.  
<https://doi.org/10.1007/BF01601214>
13. *Knowles J.K.* The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids // *Int. J Fracture.* 1977. V. 13. P. 611–639.  
<https://doi.org/10.1007/BF00017296>
14. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Technol.* 1996. V. 69. № 1. P. 59–61.  
<https://doi.org/10.5254/1.3538357>
15. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Constitutive modelling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility // *Math. Mech. Solids.* 2002. V. 7. № 4. P. 353–371.  
<https://doi.org/10.1177/108128028477>

16. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Pure azimuthal shear of isotropic, incompressible hyperelastic materials with limiting chain extensibility // *Int. J Nonlin. Mech.* 2001. V. 36. № 3. P. 465–475. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(00\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(00)00048-2)
17. *Anssari-Benam A., Horgan C.O.* Extension and torsion of rubber-like hollow and solid circular cylinders for incompressible isotropic hyperelastic materials with limiting chain extensibility // *Eur. J Mech. A-Solids.* 2022. V. 92. P. 104443. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104443>
18. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Helical viscoplastic flow in a gap between rigid cylinders // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 640–652. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060048>
19. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. North-Holland, New York, 1990.
20. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Moussiaux A.* Handbook of first order partial differential equations. Taylor & Francis, London, 2002.
21. *Kut S., Ryzinska G.* Modeling elastomer compression: Exploring ten constitutive equations // *Materials.* 2023. V. 16. № 1. P. 4121. <https://doi.org/10.3390/ma161141>
22. *Mullins L., Tobin N.R.* Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber // *J Appl. Polym. Sci.* 1965. V. 9. P. 2993–3009. <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090906>