

УДК 531.3

ОЦЕНКА МАСШТАБНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕТАЛЛОВ
ПО ДАННЫМ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ ОБРАЗЦОВ
С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

© 2025 г. Ю. О. Соляев^{a, b, *}, С.С. Щербаков^{c, **},
К. С. Голубкин^{b, ***}, П. О. Поляков^{b, ****}

^aИнститут прикладной механики РАН, Москва, Россия

^bМосковский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

^cБелорусский государственный университет, Минск, Белоруссия

*E-mail: yos@iam.ras.ru, **sherbakovss@mail.ru,

e-mail: golubkink@mail.ru, *e-mail: p.o.polyakov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.09.2024 г.

После доработки 26.09.2024 г.

Принята к публикации 27.09.2024 г.

Предложена методика идентификации масштабного параметра градиентной теории упругости на основе известных экспериментальных данных по влиянию размеров поверхностных коррозионных дефектов на параметры сопротивления усталости сталей и алюминиевых сплавов. Показана возможность естественного описания снижения коэффициента концентрации напряжений вблизи малоразмерных коррозионных дефектов, которые в данной работе моделируются в виде полуэллипсоидальных поверхностных полостей. Идентифицированные значения масштабных параметров лежат в диапазоне 20–230 мкм.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, масштабные параметры материала, коррозионные дефекты, численное моделирование, размерные эффекты, сопротивление усталости

DOI: 10.31857/S1026351925010098, EDN: SZWQAL

1. Введение. Присутствие коррозионных дефектов на поверхности металлов приводит к значительному снижению их статической и циклической прочности, причем существенную роль играют как относительные, так и абсолютные размеры дефектов. Влияние относительных размеров на уровень концентрации напряжений, в целом, хорошо изучено. Коррозионные дефекты обычно моделируются в виде полуэллипсоидальных поверхностных полостей, а оценка концентрации напряжений следует из аналитических или численных решений соответствующей задачи классической теории упругости [1–4]. Такие решения являются основой для современных стандартов по оценке статической прочности трубопроводов с коррозией, в которых используются регрессионные зависимости для расчета уровня

концентрации напряжений с учетом относительных характерных размеров дефектов, плотности их расположения, ориентации и относительной глубины по отношению к толщине стенки конструкции [5].

Влияние абсолютных размеров коррозионных дефектов в значительной степени проявляется в испытаниях на сопротивление усталости [6, 7]. В процессе циклического нагружения коррозионные полости становятся центрами зарождения поверхностных трещин, скорость развития которых определяет усталостную долговечность металла [8, 9]. Для прогноза числа циклов до разрушения для образцов с коррозией используются экспериментальные или расчетные данные по характерным (абсолютным) размерам поверхностных дефектов и по скорости роста трещин усталости в металле, не подверженном коррозии. При этом предполагается, что начальный размер трещин соответствует среднему размеру коррозионных полостей, либо вводятся дополнительные гипотезы о характере зарождения трещин на поверхностных дефектах с учетом их геометрии и реализующейся концентрации [8, 10]. При этом для малоразмерных поверхностных дефектов возникает стандартная проблема завышения числа циклов до разрушения, которая связана с использованием линейно-упругой механики разрушения (ЛУМР) [11, 7]. Одним из подходов, направленных на решение этой проблемы, является введение номинальной длины трещин a_0 , которые по предположению всегда присутствуют в материале и которые задаются пропорциональными масштабному параметру материала в испытаниях на сопротивление усталости $a_0 = \Delta K_0^2 / (\pi \sigma_R^2)$ (ΔK_0 – критическая амплитуда коэффициента интенсивности напряжений, при которой начинается рост усталостных трещин, σ_R – предел выносливости материала) [12]. Для коррозионных дефектов меньших a_0 расчет ведется по амплитуде номинальных напряжений и диаграмме усталости, для дефектов, характерные размеры которых превышают a_0 , привлекаются модели, основанные на ЛУМР и законе Эрисса [9]. Также существуют модели, в которых величина a_0 добавляется по умолчанию к фактическому характерному размеру коррозионных дефектов, присутствующих в материале [9, 11].

В настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных по влиянию абсолютных размеров изолированных и множественных поверхностных дефектов на сопротивление усталости сплавов [11, 13–15]. Возникающие размерные эффекты с достаточно хорошей степенью точности были описаны на основе указанных выше теоретических подходов, хотя проблема корректного описания многоцикловой усталости и режима зарождения и развития “коротких трещин” остается актуальной [7].

В настоящей работе предлагается использовать альтернативный подход к описанию размерного эффекта для усталостной прочности металлов, содержащих поверхностные дефекты. Для этого рассматривается решение задачи о поверхностной полуэллипсоидальной полости, построенное численно в рамках градиентной теории упругости (ГТУ) [16]. Предлагаемое решение является обобщением хорошо известных классических решений, которые широко используются при оценке концентрации напряжений вблизи коррозионных полостей [1–3]. В данной работе рассматривается упрощенный вариант ГТУ с определяющими соотношениями Айфантиса, содержащими единственный

дополнительный масштабный параметр [17]. Присутствие этого параметра позволяет описать зависимость коэффициента концентрации напряжений от абсолютных размеров дефекта. Идентификация масштабного параметра проводится на основе известных экспериментальных данных по зависимости предела ограниченной выносливости сталей и алюминиевых сплавов от размера поверхностных дефектов. Ранее, применение рассматриваемого варианта ГТУ для описания размерного эффекта прочности в материалах, содержащих трещины и острые вырезы различного размера, было представлено в работах [18–21]. Проблемы применения нелокальных и градиентных теорий и проблемы идентификация их масштабных параметров на основе испытаний образцов с трещинами рассматривались в работах [22, 23–26]. Теоретическая оценка масштабных параметров ГТУ для различных типов неоднородных сред была представлена, например, в работах [27, 28].

В настоящей работе идентификация масштабного параметра проводится для образцов с гладкой геометрией концентраторов, которые не приводят к возникновению сингулярных решений в классической теории упругости. Тем не менее, в задачах многоцикловой усталости металлов для подобных концентраторов возникают существенные масштабные эффекты, моделирование которых может быть реализовано в рамках ГТУ и концепции концентрации напряжений [24, 21].

2. Градиентная теория упругости. Плотность энергии деформаций изотропного материала в упрощенной ГТУ в форме Айфантиса может быть представлена в следующем виде:

$$W(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + l^2 C_{ijlm} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,k}, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – деформации, $\varepsilon_{ij,k}$ – тензор градиентов деформаций (запятой обозначается производная, по повторяющимся индексам предполагается суммирование), $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})$ – тензор модулей упругости, λ, μ – параметры Ламе, l – дополнительный масштабный параметр теории. При $l=0$ получаем плотность энергии классической теории упругости. Связь параметра l в ГТУ с масштабными параметрами, которые могут быть введены в механике разрушения, обсуждалась в работах [18, 21].

Определяющие соотношения вводятся для тензора напряжений τ_{ij} , а также для тензора градиентных (моментных) напряжений μ_{ijk} :

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.2)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l^2 \tau_{ij,k} = l^2 (\lambda \varepsilon_{pp,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,k}). \quad (2.3)$$

Постановка краевой задачи ГТУ может быть получена на основе вариационного подхода в следующем виде [16, 29]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad x_i \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$t_i = \bar{t}_i \text{ или } u_i = \bar{u}_i, \quad x_i \in \partial\Omega, \quad (2.5)$$

$$m_i = \bar{m}_i \text{ или } u_{i,j} n_j = \bar{g}_i, \quad x_i \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

$$s_i = \bar{s}_i \text{ или } u_i = \bar{v}_i, \quad x_i \in \partial\partial\Omega, \quad (2.7)$$

где Ω , $\partial\Omega$, $\partial\partial\Omega$ – это объем, поверхность и ребра рассматриваемой области; предполагается отсутствие объемных сил; величины с чертой обозначают заданные граничные условия на соответствующих частях поверхности $\partial\Omega$ и ребрах $\partial\partial\Omega$; $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$ – тензор полных напряжений; вектор напряжений t_i , вектор моментных напряжений m_i и вектор погонных сил на ребрах s_i определяются следующими выражениями:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j - \mu_{ijk,l} (\delta_{jl} - n_j n_l) n_k - 2H m_i, \quad (2.8)$$

$$m_i = \mu_{ijk} n_j n_k, \quad (2.9)$$

$$s_i = [\mu_{ijk} v_j n_k], \quad (2.10)$$

где $H = (-1/2)n_{i,j}(\delta_{ij} - n_i n_j)$ – средняя кривизна поверхности, скобки [...] обозначают разность стоящих в них величин, вычисляемых на частях поверхности $\partial\Omega$, образующих данное ребро $\partial\partial\Omega$, v_j – ко-нормаль к данному ребру $\partial\partial\Omega$, которая ориентирована по нормали к нему и параллельно рассматриваемой части поверхности.

Заметим, что на поверхностях тела в ГТУ необходимо задавать вектор напряжений t_i (2.8), который определяет заданную поверхностную нагрузку – как и в классической теории упругости. При этом также требуется задавать вектор моментных напряжений (2.9), который практически всегда задается нулевым ($m_i = 0$), так как для стандартных инженерных задач нет необходимости предполагать, что на поверхности действуют некоторые силы, совершающие работу на нормальных градиентах от перемещений (условие типа стесненного, упрочненного слоя [30]). Реберные усилия или перемещения могут быть заданы в ГТУ в явном виде (2.7), (2.10). Однако очевидно, что такая необходимость возникает далеко не всегда. Например, для исследования поведения решения вблизи нагруженных ребер такие условия использовались в работе [31]. В стандартных инженерных задачах обычно используются условия по отсутствию реберных усилий ($s_i = 0$). Вариант определяющих соотношений ГТУ, которые обеспечивает отсутствие дополнительных граничных условий на реберные усилия, был предложен в недавней работе [32].

Примеры аналитических решений ГТУ для классических задач о концентраторах напряжений в виде отверстия, острого выреза, сосредоточенной нагрузки и т.д. рассматривались в работах [33–37]. В настоящей работе строятся численные решения ГТУ для задачи о концентрации напряжений вблизи поверхностной полуэллипсоидальной полости. Для построения этих решений используется смешанный метод конечных элементов (МКЭ), предложенный и реализованный в ГТУ в работах [21, 38, 39].

3. Модель изолированного поверхностного полуэллипсоидального дефекта. В качестве модели поверхностного коррозионного дефекта рассматриваем призматический фрагмент ($|x| \leq A$, $|y| \leq B$, $0 \leq z \leq H$), содержащий

полуэллипсоидальную полость с полуосами $a/2$, $b/2$ и h . Таким образом, размеры дефекта в плоскости определяются значениями a и b , глубина дефекта — h . Размеры фрагмента задаются достаточно большими ($A=2a$, $B=2b$, $H=4h$) для возможности исследования концентрации напряжений без учета влияния внешних поверхностей. Расчеты проводятся для случая одноосного растяжения вдоль оси x . Соответствующие граничные условия задаются с учетом симметрии задачи для 1/4 части фрагмента (см. рис. 1а):

$$x = A: t_1 = \bar{t}, \quad t_2 = t_3 = 0, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0,$$

$$x = 0: u_1 = 0, \quad u_{2,1} = u_{3,1} = 0,$$

$$y = 0: u_2 = 0, \quad u_{1,2} = u_{3,2} = 0,$$

где используются обобщенные условия симметрии ГТУ, которые в явном виде определяют нулевое значение нормальной компоненты перемещений, а также нулевые нормальные градиенты от касательных компонент перемещений на плоскости симметрии [36]; на остальных поверхностях фрагмента задаются условия свободной поверхности ($t_i=0$, $m_i=0$). Реберные усилия также отсутствуют во всей модели.

Численные решения строятся в системе Comsol в модуле Weak Form PDE. В расчете используются тетраэдralные элементы с аппроксимацией в виде полиномов Эрмита третьего порядка для перемещений, градиентов перемещений и дополнительных множителе Лагранжа, которые вводятся в смешанном методе конечных элементов в ГТУ [38–39, 21]. Для уточнения решения вблизи полости задается сгущение конечно-элементной сетки (рис. 1а).

По результатам расчета определяется напряженно-деформированное состояние фрагмента и распределение максимальных главных напряжений τ_j (рис. 1б) и эквивалентных напряжений по Мизесу τ_g , вычисляемых на основе стандартных соотношений для тензора τ_{ij} , входящего в определяющие

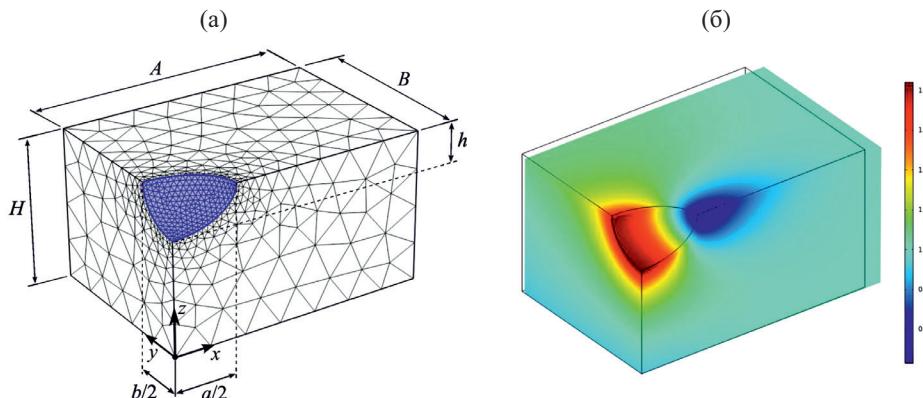


Рис. 1. Модель полуэллипсоидального поверхностного дефекта, а – геометрия модели и пример конечно-элементной сетки. Фиолетовым цветом показана поверхность полости, б – пример результатов расчетов для концентрации максимальных главных напряжений τ_j/\bar{t} в условиях одноосного растяжения.

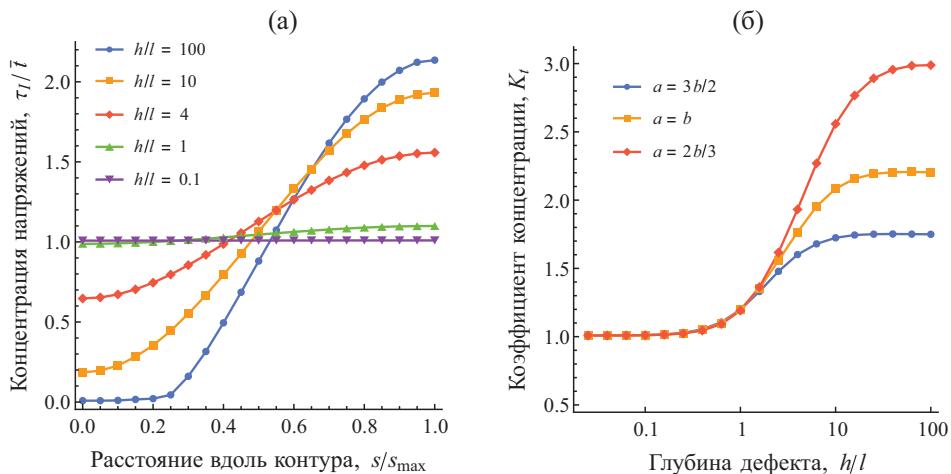


Рис. 2. Примеры расчетов, (а) – изменение концентрации напряжений вдоль контура полусфериодальной полости ($a = b = 2h$) для различных соотношений h/l , (б) – зависимость коэффициента концентрации напряжений от отношения h/l для различной геометрии полости ($b/h = 2$).

соотношения модели (2). Коэффициент концентрации напряжений вычисляется как отношение максимального значения максимальных главных напряжений или напряжений по Мизесу, реализующихся во фрагменте, к заданной нагрузке: $K_\tau = (\tau_1)_{\max}/\bar{\tau}$ или $K_{\tau,3} = (\tau_3)_{\max}/\bar{\tau}$. По результатам расчетов устанавливается зависимость коэффициента концентрации от геометрических размеров дефекта и масштабного параметра материала (рис. 2). Эти зависимости используются для обработки экспериментальных данных.

Размер сетки в конечно-элементных моделях выбирался по условиям сходимости численного решения относительно интересующих нас напряжений τ_{ij} . Дальнейшее уменьшение размера сетки позволяет уточнить значения коэффициентов концентрации не более чем на 1%. Точность построенный численных решений может быть проверена и относительно выполнения задаваемых граничных условий. В частности, интерес могут представлять неклассические граничные условия на ребрах, которые формулируются относительно комбинаций градиентных напряжений (2.7), (2.10), и поэтому их выполнение может вызывать некоторые сложности, связанные с численным дифференцированием функций формы и вычислением значений моментных напряжений на острой кромке на поверхности полости. Тем не менее и эти граничные условия выполняются в построенных решениях достаточно точно, что проиллюстрировано на рис. 3. Здесь показано распределение реберных усилий (s_i) вдоль контура полусферической полости. Эти усилия равны нулю с точностью до возникающей погрешности численного решения. Для сравнения, на рис. 3 также показано значение моментных усилий $m_1 = \mu_{111}$, которые принимают нулевое значение только в начальной точке контура, где нормаль к поверхности полости оказывается параллельна оси x . Все представленные величины на рис. 3 нормированы на максимальное значение моментных напряжений,

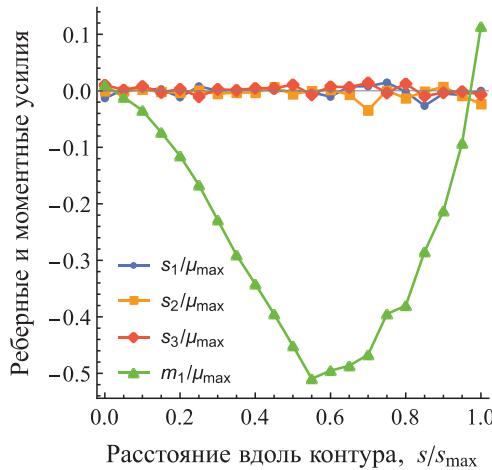


Рис. 3. Оценка точности выполнения граничных условий по отсутствию реберных усилий (s_i) на острой кромке (ребре) поверхности полости.

которые реализуются в рассматриваемой задаче ($\mu_{\max} = (\mu_{113})_{\max}$). На рис. 3 видно, что величина погрешности в выполнении граничных условий относительно указанных неклассических усилий не превышает $\sim 4\%$ от μ_{\max} . Дальнейшее уточнение решения для моментных напряжений может быть получено с использованием более мелкой конечно-элементной сетки либо с использованием функций формы более высокого порядка. Однако это уточнение представляется излишним (и достаточно ресурсоемким) при анализе напряженного состояния в терминах тензора напряжений τ_{ij} .

4. Методика идентификации масштабного параметра. Как видно из рис. 2, величина масштабного параметра, который в рамках ГТУ входит в определяющие соотношения и по предположению является характеристикой материала, существенно влияет на уровень концентрации напряжений. Максимальная концентрация ожидаемо реализуется на плоскости симметрии модели, перпендикулярной действующей нагрузке (рис. 2а, $s/s_{\max} = 1$). На этом рисунке и далее на аналогичных рисунках расстояние вдоль контура полости отсчитывается на поверхности фрагмента от точки $x = a/2, y = 0, z = H$ ($s = 0$) до точки $x = 0, y = b/2, z = H$ ($s = s_{\max}$). Для малого значения масштабного параметра ($h/l = 100$) в результатах, представленных на рис. 2а, реализуется решение близкое к классическому с максимальной концентрацией напряжений. При увеличении масштабного параметра, концентрация снижается, и при $h/l < 1$ материал перестает “чувствовать” присутствие концентратора и находится в состоянии, близком к однородному одноосному растяжению. Такие эффекты хорошо известны в решениях ГТУ [33, 37], и они связаны со сглаживающим характером операторов типа Гельмгольца, которые присутствуют в уравнениях равновесия ГТУ, записываемых относительно перемещений [40, 41].

Возникающий масштабный эффект для концентрации напряжений в задаче с поверхностью полостью проиллюстрирован на рис. 2б. Здесь показана зависимость коэффициента концентрации от относительных и абсолютных

размеров полости. Относительные размеры, как и в классическом решении, определяют собственную геометрию полости – ее вытянутость, относительную глубину. Эти характеристики входят в стандартные соотношения для оценки концентрации напряжений вблизи коррозионных полостей [3–5]. Абсолютные размеры полости начинают влиять на решение ГТУ (на распределение напряжений, на значение коэффициента концентрации напряжений) благодаря присутствию в определяющих соотношениях модели масштабного параметра l . Так как этот параметр l является размерным, то и все остальные размеры в решении могут быть вычислены в долях l . Соответственно, представленная зависимость концентрации от отношения h/l на рис. 2б определяет зависимость решения для K_I от абсолютного размера h , если известно значение l .

Таким образом, идентификация масштабного параметра ГТУ возможна, если в эксперименте установлена зависимость коэффициента концентрации от абсолютных и относительных размеров полости (полостей), присутствующих на поверхности испытываемых образцов. Задача идентификации – наложить расчетные данные (рис. 2б) и соответствующие экспериментальные данные. При этом необходимо добиться, чтобы единственное значение масштабного параметра с удовлетворительной точностью обеспечивало соответствие расчета и эксперимента для разных размеров полостей, то есть желательна проверка нескольких экспериментальных точек на графиках, представленных на рис. 2б для разных размеров и формы поверхностных дефектов. Упругие константы материала задаются стандартными для данных материалов. В частности, далее для сталей и алюминиевых сплавов используются значения модуля Юнга 200 ГПа и 70 ГПа (эти значения, вообще говоря, не влияют на уровень концентрации в рассматриваемых задачах) и коэффициент Пуассона 0.3 и 0.33 соответственно.

Аналогичные подходы для идентификации параметров неклассических нелокальных и градиентных теорий на основе экспериментальных данных по влиянию размерных (масштабных) эффектов активно развиваются в последнее время. При этом используются эксперименты с образцами, содержащими различные типы концентраторов и неоднородностей [17–21, 23–25]. В настоящей работе предлагается использовать экспериментальные данные по зависимости параметров сопротивления усталости образцов металлов от характерных размеров коррозионных полостей, присутствующих на их поверхности. В настоящее время известно достаточно большое количество таких экспериментов, где проводились детальные исследования влияния характерных размеров точечных коррозионных дефектов на характер развития повреждений и усталостное разрушение металлических образцов [8, 9, 11, 13–15]. Эти данные предлагается описать на основе концепции концентрации напряжений. То есть предполагается, что предельное состояние материала полностью определяется уровнем максимальных напряжений, который реализуются для данной геометрии дефекта и который может быть найден на основе численного решения задачи ГТУ. При этом для прогноза прочности образца с коррозионным дефектом используются известные экспериментальные данные для свойств материала без дефектов и учитывается коэффициент концентрации. То есть предполагается, что поведение материала с дефектом

эквивалентно поведению материала без дефекта, но при более высокой нагрузке, которая вычисляется через найденный коэффициент концентрации. Таким образом, проводится стандартный прочностной анализ для образца с концентратором без привлечения дополнительных гипотез о развитии повреждений в режиме “коротких” и “длинных” трещин и т.п.

Предлагаемый подход является приближенным, так как он не учитывает характера развития пластических деформаций вблизи коррозионной полости в процессе усталостного нагружения. Однако заметим, что аналогичные известные классические подходы также основаны на использовании ЛУМР [9–11, 14]. Это определяется тем, что по сравнению со статическими режимами разрушения, в процессах усталостного разрушения намного больший объем материала работает в зоне упругих деформаций, а концентрация пластических деформаций оказывается существенно локальной.

5. Примеры идентификации. Рассмотрим данные экспериментов, в которых было исследовано влияние размеров единичных поверхностных полусфероидальных полостей на количество циклов нагружения, необходимых для начала зарождения усталостных трещин в стали API-5L X65 [13]. Появление и рост трещин контролировалось на поверхности образцов с использованием электронной микроскопии и данных DIC анализа. Амплитуда цикла напряжений составляла 450 МПа (коэффициент асимметрии цикла $R = 0.1$), что соответствует пределу выносливости для данной марки стали [42]. Было установлено, что для полостей глубиной 190 мкм рост усталостных трещин не начинается и образцы демонстрируют предел выносливости на базе измерений 10^7 циклов аналогично образцам со стандартной подготовкой поверхности. Для более глубоких полостей (270–440 мкм) была установлена амплитуда напряжений, при которой начинался рост усталостных трещин (см. табл. 1.). Для объяснения наблюдаемых особенностей зарождения трещин было отмечена возможность локализации пластических деформаций в образцах с более глубокими дефектами. В образцах с полостью глубиной 190 мкм, по предположению, локализация пластических деформаций была слишком мала, для того чтобы на выбранной базе измерений произошло появление усталостных трещин. Рассчитанный уровень концентрации напряжений K_t в рамках классической теории упругости был представлен в работе [13] и приведен в табл. 1. Этот уровень концентрации соответствует решениям ГТУ, получаемым при $l = 0$.

Таблица 1. Обработка экспериментальных данных по влиянию поверхностных полостей на развитие микротрещин в образцах стали API-5L X65 [3]

Глубина полости, мкм	Диаметр полости, мкм	Число циклов до образования микротрещин	K_t (классическое решение, $l = 0$)	K_t (решение ГТУ)		
				$l = 190$ мкм	$l = 240$ мкм	$l = 270$ мкм
190	630	$>10^7$	1.87	1.27	1.26	1.17
270	680	$5.28 \cdot 10^5$	1.98	1.34	1.32	1.22
380	795	$2.3 \cdot 10^4$	2.15	1.46	1.43	1.31
440	800	$7.5 \cdot 10^3$	2.22	1.51	1.49	1.35

В настоящей работе предлагается альтернативная трактовка экспериментальных данных работы [13], которая может быть получена на основе сравнения решения задачи классической теории упругости и решения ГТУ. Эти решения были построены для размеров поверхностных полостей, которые использовались в экспериментах (табл. 1). На основе расчетов были определены коэффициенты концентрации K_t в решении ГТУ, при этом значения масштабного параметра выбирались из следующих соображений. Из результатов экспериментов известно, что для полости глубиной 190 мкм роста трещин не наблюдается. В то же время, из теоретических расчетов следует, что концентрация напряжений в образце с поверхностной полостью практически не возникает в решении ГТУ, если глубина этой полости примерна равна масштабному параметру материала (то есть $h/l = 1$, см. рис. 2б). Поэтому предполагая, что отсутствие роста трещины связано с недостаточным уровнем концентрации напряжений, получаем, что масштабный параметр материала может лежать в диапазоне от 190 мкм (глубина полостей, для которых не появлялись трещины) до 270 мкм (глубина полостей, для которых начали появляться трещины).

Результаты расчетов коэффициента концентрации для трех вариантов масштабного параметра $l = 190$ мкм, 230 мкм и 270 мкм представлены в таблице 1. Оказывается, что для указанных значений масштабных параметров решение ГТУ прогнозирует уровень концентрации напряжений в диапазоне 1.17–1.27. Концентрация эквивалентных напряжений по Мизесу имеет очень близкие значения (отличие K_t от $K_{t,0}$ не более 5%, причем $K_{t,0} < K_t$). Важным является тот факт, что полученное значение концентрации примерно соответствует уровню предела текучести, который для стали X65 для скоростей нагружения, используемых в усталостных испытаниях, достигает $\sigma_m = 544$ МПа (этот уровень напряжений возникает при концентрации $K_t = 544/450 = 1.2$). Таким образом, решение ГТУ прогнозирует, что для полости глубиной 190 мкм материал вообще не переходит в состояние пластических деформаций, и именно поэтому в нем не происходит локализации пластических деформаций, и не образуются трещины. Заметим, что классическое решение для этой глубины полости дает очень высокое значение коэффициента концентрации (1.87). При этом для глубины 270 мкм рост концентрации происходит всего до уровня 1.98, а число циклов до начала образования трещин снижается минимум на два порядка.

Очевидно, что классическое упругое решение, как и решение ГТУ, нельзя использовать для оценки локализации пластических деформаций. Но эти решения можно использовать для оценки перехода материала в состояние текучести и первичной оценки размеров области, в которой материал находится в состоянии пластичности. На рис. 4 показано распределение концентрации для максимальных главных напряжений и для эквивалентных напряжений по Мизесу в классическом решении и в решении ГТУ (для случая $l = 0.24$ мкм). Здесь видно, что для всех размеров полостей классическое решение (маркеры без заливки на рис. 4) прогнозирует очень большие зоны с высокой концентрацией, где материал должен находиться в состоянии текучести, которые, судя по данным работы [13] в эксперименте не наблюдались. В то же

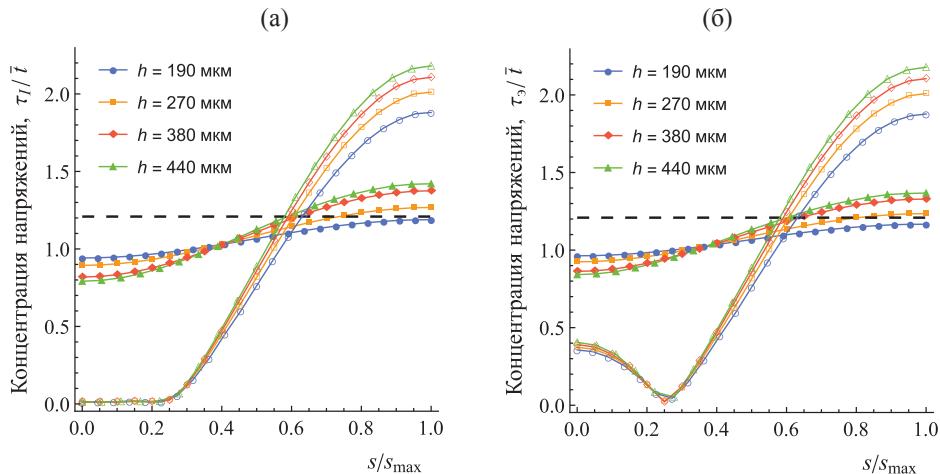


Рис. 4. Распределение концентрации максимальных главных напряжений (а) и эквивалентных напряжений по Мизесу (б) вдоль контура полостей разной глубины в стали X65 в классическом решении (маркеры без заливки) и в решении ГТУ при значении масштабного параметра $l = 0.24$ мм (маркеры с заливкой). Горизонтальным пунктиром показан уровень концентрации, соответствующий пределу текучести.

время решение ГТУ при выбранном значении масштабного параметра дает естественное объяснение отсутствию трещин в образцах с полостями глубиной 190 мкм — в этих образцах материал полностью работает в зоне упругих деформаций (синие маркеры с заливкой на рис. 4). Для более глубоких полостей прогнозируется образования области пластических деформаций, которая при определенном числе циклов нагружения может приводить к образованию трещин.

Таким образом, оценка масштабного параметра для стали X65, полученная по данным экспериментов [13], составляет 0.2–0.25 мм, причем это значение существенно больше среднего размера зерен данной стали, который составляет ~ 10 мкм [13] и обычно принимается в качестве первичной оценки для масштабного параметра квази-хрупких поликристаллических материалов [16, 27]. Такое высокое значение масштабного параметра может быть связано, во-первых, с тем, что материал является пластичным [43], а во-вторых, с тем, что на значения масштабного параметра могут дополнительно влиять особенности текстуры поликристаллического материала, присутствующие примеси, межзеренные границы и т.д. [27].

Далее рассмотрим экспериментальные данные, полученные в испытаниях на сопротивление усталости образцов стали X20Cr13 (российский аналог — сталь 20Х13) [11]. В этих испытаниях использовались три типа образцов, подверженных предварительному воздействию коррозионно-активной среды в течение различных периодов времени и содержащие, соответственно, множественные поверхностные коррозионные дефекты различной глубины (h). Отношение размеров дефектов в плоскости к глубине было примерно постоянным и составляло $h/a = 0.62$ ($a = b$). Были определены напряжения, при

которых в режиме усталостных испытаний в материале начинается рост трещин вблизи поверхностных дефектов при различном значении коэффициента асимметрии цикла R (табл. 2). Было установлено, что эти критические напряжения снижаются при увеличении глубины поверхностных дефектов, что было объяснено на основе модели ЛУМР, в которой предполагалось, что размер поверхностных полостей может считаться начальным размером поверхностных полуэллиптических трещин [11]. Для обработки результатов этих испытаний на основе ГТУ и концепции концентрации напряжений, оценим номинальный уровень концентрации напряжений, который реализовывался в экспериментах. Значение номинального уровня концентрации получим, как отношение напряжений начала роста усталостных трещин в образцах, неподверженных коррозии, к соответствующим напряжениям в образцах с коррозией для данного значения R . В таблице 1 показано, что величина номинальной концентрации изменяется от значений близких к 1 для малых коррозионных полостей глубиной 25 мкм до значений более 2 для крупных полостей, которые в среднем обладали глубиной 250 мкм.

Таблица 2. Обработка экспериментальных данных по влиянию поверхностных дефектов на критические напряжения начала роста усталостных трещин в стали X20Cr13 [11]

Глубина полости, мкм	Диаметр полости, мкм	R	Напряжения, приводящие к образованию микротрещин, МПа	Номинальный коэффициент концентрации
0	0	0.1	250	1
25	40		230	1.09
145	234		115	2.17
250	403		90	2.78
0	0	0.3	225	1
25	40		215	1.05
145	234		110	2.05
0	0	0.5	175	1
25	40		160	1.09
145	234		100	1.75
250	403		90	1.94

Описание экспериментальных данных работы [11] нельзя построить на основе классических решений теории упругости, так как полости на поверхности образцов обладали примерно одинаковыми относительными размерами и были достаточно малы по сравнению с толщиной этих образцов. Для среднего отношения глубины к диаметру полостей $h/a = 0.62$ классическое решение дает постоянный уровень концентрации напряжений 2.35. Дополнительных параметров, которые могли бы позволить описать наблюдавшийся размерный эффект для номинального коэффициента концентрации, в

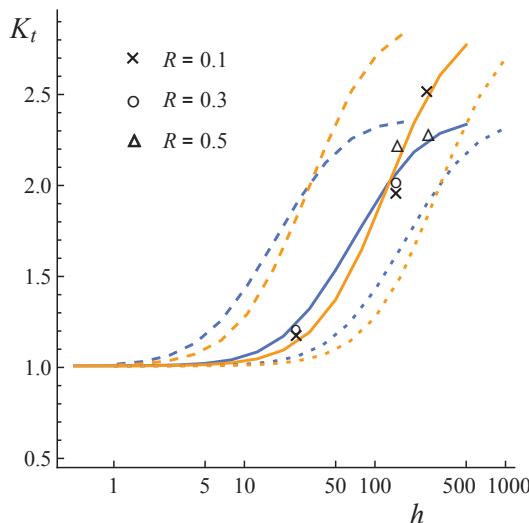


Рис. 5. Зависимость коэффициента концентрации напряжений от глубины дефекта h [мкм] в образцах стали X20Cr13. Точки – номинальные значения K_t , соответствующие экспериментальным данным. Линии – решение ГТУ ($l = 20$ мкм – сплошные, $l = 5$ мкм – штриховые, $l = 50$ мкм – пунктирные). Синий цвет – $h/a = 0.62$, желтый цвет – $h/a = 1.24$.

классическом решении теории упругости нет. Напротив, решение ГТУ содержит масштабный параметр и прогнозирует изменение уровня концентрации напряжений в зависимости от абсолютных размеров поверхностных дефектов. Сопоставление экспериментальных данных работы [11] и решения ГТУ представлено на рис. 5. Линиями здесь показано прогнозируемое изменение концентрации напряжений при изменении глубины полостей для трех различных значений масштабного параметра 5–50 мкм. Точками показаны экспериментальные значения номинальной концентрации, которые были представлены в таблице 2. Решения ГТУ даны для среднего значения относительной глубины полостей ($h/a = 0.62$, синие линии), а также для случая более глубоких полостей, которые по данными работы [11] также присутствовали в образцах ($h = 500$ мкм, $h/a = 1.24$, желтые линии). Из представленного сопоставления видно, что решение ГТУ с масштабным параметром $l = 20$ мкм позволяет достаточно хорошо описать экспериментальные данные. При этом полученная величина масштабного параметра для стали X20Cr13 значительно ниже, чем определенная выше для стали X65. Объяснение этому факту может быть основано на том, что сталь X20Cr13 является более хрупкой. Для хрупких материалов известно, что их масштабные параметры всегда ниже по сравнению с квази-хрупкими и пластичными материалами [18–20, 25]. Сталь X20Cr13 обладает более высокой прочностью (до 1000 МПа и выше) по сравнению с X65 (до 620 МПа [42]) и значительно более низким значением критического коэффициента интенсивности напряжений K_{lc} (X20Cr13 – 35 МПа·м^{0.5}, X65 – 226 МПа·м^{0.5} [12, 44]).

Далее рассмотрим экспериментальные данные по влиянию размера поверхностных дефектов на количество циклов до разрушения образцов алюминиевого сплава Al 2024-T3 (российский аналог – сплав Д16) [14]. Испытания проводились для амплитуды напряжений 206 МПа ($R = 0.2$) с образцами сплава, содержащими единичные поверхностные полости. Размеры полостей и полученное в экспериментах количество циклов до разрушения представлены в табл. 3. Здесь же указаны соответствующие значения предела ограниченной выносливости сплава Al 2024-T3 (для данного числа циклов до разрушения) со стандартной подготовкой поверхности [45, 46]. Номинальный коэффициент концентрации вычислен как отношение предела ограниченной выносливости для данного числа циклов до разрушения к амплитуде напряжений, заданной в испытаниях (206 МПа). Экспериментальные данные взяты из работы [14] для полостей относительно малой глубины (до 400 мкм) по сравнению с полной толщиной образца (1.6 мм), чтобы исключить влияние краевых эффектов. Заметим, что для этих данных теоретическое описание на основе ЛУМР дает погрешности порядка 15–40% [14], что соответствует известной проблеме моделирования усталости на этапе развития “малых” коррозионных полостей и “коротких” трещин [7].

Таблица 3. Обработка экспериментальных данных по влиянию поверхностных полостей на число циклов до разрушения образцов сплава Al 2024-T3 с поверхностными дефектами [14]

Глу- бина поло- сти, мкм	Диа- метр поло- сти, мкм	Число циклов до раз- руше- ния	Предел ограничен- ной выно- сливости образцов без дефек- тов, МПа	Номи- наль- ный ко- эффи- циент концен- трации K_t	K_t (clas- sic- cal solu- tion, $l = 0$)	K_t (решение ГТУ)		
						$l = 50$ мкм	$l = 100$ мкм	$l = 200$ мкм
30	230	$7.4 \cdot 10^5$	240	1.17	1.63	1.23	1.1	1.04
75	240	$5.2 \cdot 10^5$	250	1.21	1.91	1.42	1.19	1.07
170	240	$3.4 \cdot 10^5$	270	1.31	2.47	1.69	1.33	1.12
375	250	$2.2 \cdot 10^5$	290	1.41	3.12	2.08	1.54	1.2

Для обработки данных работы [14] предполагаем, что при наличии дефекта материал работает так же, как образец с гладкой поверхностью, но при повышенном уровне напряжений, который соответствует номинальному коэффициенту концентрации. Теоретические значения K_t , найденные для заданных размеров полостей в классической теории упругости и в ГТУ представлены в табл. 3. Как видно, классическое решение прогнозирует значительно более высокое значение коэффициента концентрации напряжений по сравнению с установленным по экспериментальным данным. Если бы в материале реализовалась концентрация, соответствующая классическому решению, то он бы начал разрушаться при значительно меньшем числе циклов нагружения. На рис. 6 показан размер зоны пластических деформаций, реализующейся

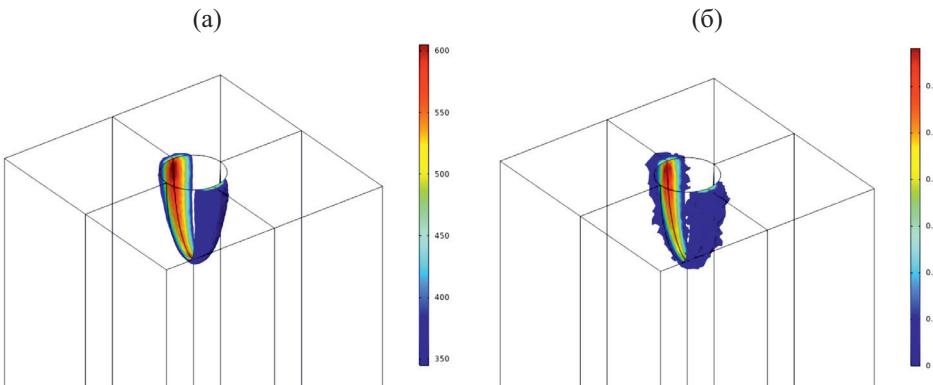


Рис. 6. Оценка размеров зоны пластических деформаций в классическом упругом решении (а, эквивалентные напряжения, МПа) и в упругопластическом решении (б, пластические деформации, %) для образцов сплава Al 2024-T3 с поверхностной полостью с размерами $a = b = 250$ мкм, $h = 375$ мкм при растягивающей нагрузке 206 МПа.

вблизи самой глубокой полости (375 мкм). Для оценки размеров зоны текучести здесь использовано как упругое классическое решение (рис. 6а), так и упругопластическое решение (рис. 6б). Для моделирования упруго-пластических деформаций задавалась билинейная аппроксимация диаграммы напряжения-деформации сплава Al 2024-T3 с пределом текучести 345 МПа, пределом прочности 483 МПа и предельными деформациями 17.5%. В расчете предполагалось изотропное упрочнение и использовался критерий пластичности Мизеса. Найденные максимальные пластические деформации превышают 0.6% (рис. 6б), что соответствует уровню напряжений на диаграмме напряжения-деформации ~ 360 МПа. При таком уровне напряжений в сплаве Al 2024-T3 число циклов до разрушения не превышает $7 \cdot 10^4$ [45, 46], т.е. в три раза меньше, чем наблюдалось в эксперименте (см. табл. 3).

В решении ГТУ удается подобрать значение масштабного параметра, при котором можно описать реализующуюся зависимость номинальной концентрации напряжений от размеров полости. Это значение составляет порядка $l = 100$ мкм (табл. 3). При этом в решении ГТУ материал полностью находится в упругом состоянии, что соответствует экспериментальным данным, так как переход в состояние текучести происходило бы при значениях $K_t \sim 375/206 = 1.82$. Соответствие решения ГТУ и эксперимента для коэффициента концентрации показано на рис. 7, где даны прогнозируемые зависимости K_t от абсолютной и относительной глубины поверхности полости. Относительные глубины (a/h) даны в соответствии с экспериментальными данными, указанными в табл. 3. На рис. 7 видно, что концентрация напряжений вблизи полостей с разной геометрией с достаточно высокой точностью может быть аппроксимирована представленным решением ГТУ при выбранном значении $l = 100$ мкм.

Погрешности расчета по отношению к эксперименту для полостей с самой малой и самой большой глубиной (синий и зеленый цвет на рис. 7) могут быть, по-видимому, снижены, если рассматривать более общий вариант

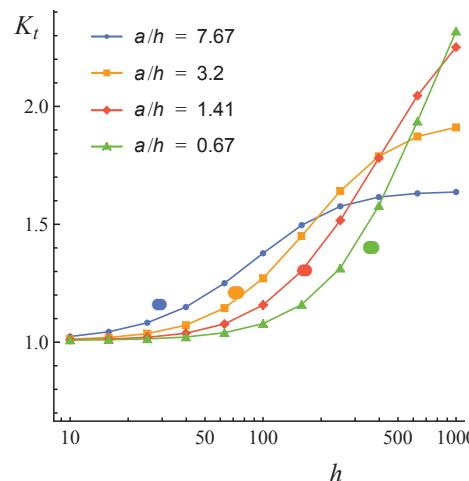


Рис. 7. Зависимость концентрации напряжений от глубины поверхности полости в образце сплава Al 2024-T3 для разных соотношений диаметра к глубине (a/h). Точки – экспериментальные данные, линии – решение ГТУ с масштабным параметром $l = 100$ мкм, h [мкм].

определяющих соотношений ГТУ (2.3) с большим числом масштабных параметров, отвечающих за характер размерного эффекта в областях с разной геометрией концентраторов и разным характером напряженно-деформированного состояния (см., например, [21, 47]). Используемые определяющие соотношения (2.3) являются наиболее простыми среди частных случаев общей градиентной теории Миндлина [16, 17], хотя в то же время они отвечают требованиям по материальной объективности и положительной определенности плотности энергии деформаций. Помимо рассматриваемой упрощенной теории Айфантиса, в качестве альтернативы можно также использовать упрощенные теории, отвечающие более общим условиям симметрии (см., например, [49, 50]). Рассмотрение вариантов ГТУ с различными определяющими соотношениями для уточненного описания рассматриваемых эффектов планируется реализовать в процессе будущей работы авторов.

В качестве последнего примера идентификации, рассмотрим экспериментальные данные работы [15] для алюминиевого сплава 7075-T6 (российский аналог – В95Т1). В данной работе были использованы образцы сплава, предварительно подвергнутые воздействию коррозионно-активной среды в течение времени до 1536 ч и содержащие множественные коррозионные поверхностные дефекты, размеры которых были детально исследованы (табл. 4). Было отмечено, что для образцов, содержащих более крупные дефекты, происходило снижение предела ограниченной выносливости, соответствующее изменению номинального коэффициента концентрации напряжений в диапазоне от 1 (отсутствие дефекта) до 2 (для наиболее крупных дефектов) [15]. Описание этого явления было дано на основе ЛУМР в предположении, что начальный размер поверхностных полуэллиптических трещин равен среднему размеру коррозионных полостей. В экспериментах образцы обладали толщиной 2 мм

и испытывались на усталость при амплитуде напряжений 414 МПа ($R = 0.02$) в направлении поперек проката. Коррозионные дефекты обладали полуэллипсоидальной формой, вытянутой в направлении вдоль проката, поэтому наибольший характерный размер этих дефектов в плоскости в рассматриваемых нами обозначениях задается как b , а меньший — a (см. рис. 1а). Заметим, что для разного времени обработки образцов, в них появились дефекты с разными абсолютными и относительными размерами (см. табл. 4), что приводит к неоднозначному изменению уровня концентрации напряжений. В частности, самые глубокие полости ($h = 50.5$ мкм) являются более пологими по сравнению с полостями самой малой глубины ($h = 13.9$ мкм). Более того, абсолютные средние размеры дефектов немонотонно зависят от времени обработки образцов.

Таблица 4. Обработка экспериментальных данных для образцов сплава 7075-T6 с поверхностными коррозионными дефектами [10]

Время обработки, ч	Длина полости, a , мкм	Ширина полости, b , мкм	Глубина полости, h , мкм	Относительная длина, a/h	Относительная ширина, b/h	K_t (классическое решение, $l = 0$)	K_t (решение ГТУ, $l = 20$ мкм)
96	64.3	107	13.9	4.6	7.7	2	1.31
384	187	238	25.4	7.4	9.4	1.76	1.51
768	140.3	163	23.5	6	6.9	1.74	1.45
1536	399	426	50.5	7.9	8.4	1.66	1.59

Для оценки масштабного параметра, который позволил бы описать данные работы [14] по влиянию размеров поверхностных дефектов на предел ограниченной выносливости образцов сплава 7075-T6, были построены зависимости прогнозируемых ГТУ значений коэффициента концентрации от значения масштабного параметра (рис. 8а) для размеров полостей, указанных в табл. 4. Заметим, что эти зависимости на рис. 8а имеют различные асимптоты в зоне малых значений масштабного параметра ($l < 10$ мкм), которые соответствует классическому решению (см. табл. 4) и которое определяется только относительными размерами дефектов. Видно, что получаемое в этой области (классическое) решение в рамках концепции концентрации напряжений принципиальным образом не может описать экспериментальные данные, в которых выдержка в коррозионно-активной среде в течение 96 ч приводила к меньшему снижению предела ограниченной выносливости по сравнению с образцами, полученными с использованием более долгой обработки (см. рис. 8б, экспериментальные данные — точки). Напротив, применение решения ГТУ позволяет приблизиться к описанию эксперимента с достаточно хорошей точностью, сопоставимой с той, которая была получена на основе модели ЛУМР в работе [15]. Для этого на рис. 8а была рассмотрена область относительно больших значений масштабного параметра ($l > 10$ мкм), в которой размерный эффект в решении ГТУ проявляется достаточно сильно и зависимость уровня концентрации напряжений начинает определяться

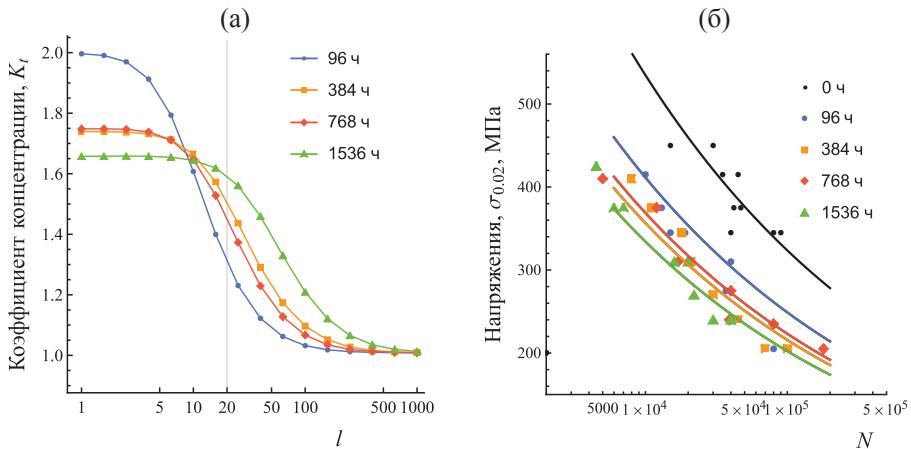


Рис. 8. Обработка экспериментальных данных для образцов сплава 7075-T6, содержащих дефекты различного размера (в соответствии с табл. 4). (а) Зависимость концентрации напряжений в решении ГТУ от масштабного параметра. (б) Кривые усталости. Точки – экспериментальные данные (в часах) [15], линии – аппроксимация на основе вычисленных значений концентрации напряжений в решении ГТУ, l [мкм], N – число циклов до разрушения.

абсолютными размерами дефекта. В этой области реализуется решение для K_t , которое качественно соответствует эксперименту, в частности, наибольшая концентрация напряжений и наибольшее снижение прочности реализуется в образцах, подвергнутых наиболее длительной обработке (1536 ч, зеленый цвет).

Для обработки эксперимента было подобрано значение масштабного параметра $l = 20$ мкм, при котором в решении ГТУ реализуется уровень концентрации в диапазоне $K_t = 1.31–1.59$ (см. рис. 8а и табл. 4). Эти значения K_t были использованы для построения аппроксимаций экспериментальных данных на рис. 8б (линии). Здесь для описания данных для образцов без дефектов (черный цвет) использована степенная аппроксимация вида $\sigma_{0.02} = 3989N^{-0.218}$, полученная в среднеквадратичном приближении для экспериментальных данных работы [15], а также с учетом дополнительной точки в зоне малоциклической усталости ($N = 10\,000$, $\sigma_{0.02} = 550$ МПа), взятой из справочника [48]. Эта дополнительная точка необходима для расширения зоны аппроксимации для описания результатов для образцов с дефектами, в которых число циклов до разрушения значительно снижалось. Аппроксимации для дефектных образцов на рис. 8б построены в предположении, что реализующаяся концентрация напряжений вблизи дефектов приводит к тому, что материал работает в условиях, соответствующих усталостным испытаниям при более высоком уровне максимальных напряжений цикла. Соответственно аппроксимации для образцов с дефектами на рис. 8б были построены как $\sigma_{0.02}(N)/K_t$, где значение K_t найдены из решений ГТУ (табл. 4). Видно, что результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом.

Выводы и обсуждение результатов. В данной работе предложена методика идентификации масштабного параметра ГТУ для металлов на основе данных

усталостных испытаний. Для этого предложено использовать известные эксперименты по влиянию размера поверхностных полостей (дефектов) на параметры сопротивления усталости. Классическое описание таких экспериментов требует привлечения ЛУМР, в то время как применение решений ГТУ позволяет получать хорошую точность теоретических оценок в рамках концепции концентрации напряжений.

Показано, что решения ГТУ естественным образом позволяют описывать зависимость номинального коэффициента концентрации напряжений от размера поверхностных полостей и дефектов, которые наблюдаются в экспериментах. Возникающий размерный эффект в решении ГТУ является естественным следствием более сложной структуры плотности энергии деформаций (2.1) и следующих из нее определяющих соотношений (2.2), (2.3). При этом учет влияния градиентных эффектов оказывается значительным, если размеры концентраторов сопоставимы с масштабным параметром материала.

Предложено несколько подходов для идентификации масштабного параметра ГТУ. Во-первых, можно использовать данные по значению критических напряжений и/или количеству циклов, при которых происходит зарождение усталостных трещин на дефектах различного размера (как это было сделано для сталей). Такой подход, однако, является достаточно трудоемким и требует детального изучения поверхности образцов с использованием микроскопии в процессе испытаний в целях выявления момента зарождения трещин. Во-вторых, можно использовать данные по зависимости предела ограниченной выносливости от размера поверхностных дефектов (как это было сделано для сплава 7075). Такой подход, как и в стандартных испытаниях, требует использования достаточно большого числа образцов. Упростить его можно если использовать данные по числу циклов до разрушения образцов с дефектами при заданных одинаковых параметрах цикла, если для сплава известна диаграмма сопротивления усталости (как это было сделано для сплава 2024),

Основная идея во всех подходах одинакова. Предполагается справедливость концепции концентрации напряжений и считается, что наличие дефектов приводит к повышению напряжений вблизи концентратора и, как следствие, материал проявляется свои характеристики сопротивления усталости, соответствующие более высокой амплитуде прикладываемых напряжений. Заметим, что коэффициент концентрации напряжений для типичных коррозионных дефектов не превышает 3, что для статических испытаний пластичных материалов обычно оказывается не существенным при малых абсолютных размерах дефекта и, соответственно, при малой зоне локализации пластических деформаций. Поэтому такие данные статических испытаний с несингулярными концентраторами сложно использовать для оценки реализующегося размерного эффектов в упругой области деформаций (в отличие от данных по испытаниям образцов с трещинами [18–21, 23–26]). Однако в режиме усталостных испытаний повышение уровня напряжений на 20–30% может уменьшать на порядки число циклов до разрушения или до начала роста трещин. Поэтому представляется, что использование данных усталостных испытаний является достаточно информативным для рассматриваемых задач идентификации. Кроме этого, реализация усталостных испытаний в зоне упругих деформаций позволяет говорить о возможности использования

рассматриваемой линейно упругой теории (так же, как и ЛУМР) без привлечения нелинейных моделей.

По результатам расчетов показано, что для рассмотренных сталей и алюминиевых сплавов идентифицированные значения масштабного параметра изменяются в достаточно широком диапазоне (20–270 мкм), что, по-видимому, связано с различными характеристиками вязкости разрушения рассматриваемых материалов. Более хрупкие материалы обладают меньшим масштабным параметром, по сравнению с более пластичными.

В будущей работе целесообразно рассмотреть более сложные определяющие соотношение ГТУ [16, 49–52], которые позволили бы расширить возможности описания различных масштабных эффектов, реализующихся для полостей с различной характерной геометрией и размерами. Также целесообразно рассмотреть модели образцов, содержащих множественные взаимодействующие дефекты и проверить соответствие значений масштабных параметров, найденных по данным статических испытаний для образцов с трещинами и по данным усталостных испытаний для образцов с поверхностными дефектами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10061)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eubanks R.A.* Stress concentration due to a hemispherical pit at a free surface // J. Appl. Mech. 1954. V. 21. № 1. P. 57–62.
<https://doi.org/10.1115/1.4010819>
2. *Fujita T., Tsuchida E., Nakahara I.* Stress concentration due to a hemi-prolate spheroidal pit at a free surface of a semi-infinite body under all-around tension // Bulletin of JSME. 1980. V. 23. № 181. P. 1048–1054.
<https://doi.org/10.1299/JSME1958.21.561>
3. *Cerit M., Genel K., Eksi S.* Numerical investigation on stress concentration of corrosion pit // Eng. Fail. Anal. 2009. V. 16. № 7. P. 2467–2472.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2009.04.004>
4. *An L.S., Park Y.C., Kim H.K.* A numerical study of the tensile stress concentration in a hemi-ellipsoidal corrosion pit on a plate // Int. J. Steel Struct. 2019. V. 19. P. 530–542.
<https://doi.org/10.1007/s13296-018-0134-7>
5. *Capula-Colindres S. et al.* Mechanical behavior of X60 pipelines containing pitting corrosion defects based on finite element method // Forces in Mechanics. 2024. V. 16. P. 100278.
<https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100278>
6. *Zerbst U. et al.* Defects as a root cause of fatigue failure of metallic components. III: Cavities, dents, corrosion pits, scratches // Eng. Fail. Anal. 2019. V. 97. P. 759–776.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.01.034>
7. *Katona R.M., Karasz E.K., Schaller R.F.* A review of the governing factors in pit-to-crack transitions of metallic structures // Corrosion. 2023. V. 79. № 1. P. 72–96.
<https://doi.org/10.5006/4179>
8. *Dolley, Lee, Wei.* The effect of pitting corrosion on fatigue life // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2000. V. 23. № 7. P. 555–560.
<https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2000.00323.x>

9. Wang Q.Y., Pidaparti R.M., Palakal M.J. Comparative study of corrosion-fatigue in aircraft materials // AIAA J. 2001. V. 39. № 2. P. 325–330.
<https://doi.org/10.2514/2.1308>
10. Larrosa N.O., Akid R., Ainsworth R.A. Corrosion-fatigue: a review of damage tolerance models // Int. Mater. Rev. 2018. V. 63. № 5. P. 283–308.
<http://dx.doi.org/10.1080/09506608.2017.1375644>
11. Becker K. et al. The effect of surface degradation on fatigue and fracture behaviour // Materials & Design. 1993. V. 14. № 3. P. 175–182.
12. Beltran-Zuñiga M.A. et al. Effect of microstructure and crystallographic texture on the toughness anisotropy of API 5L X46 steel // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2018. V. 41. № 4. P. 749–761.
<https://doi.org/10.1111/ffe.12782>
13. Evans C., Leiva-Garcia R., Akid R. Strain evolution around corrosion pits under fatigue loading // Theor. Appl. Fract. Mech. 2018. V. 95. P. 253–260.
<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.02.015>
14. Rokhlin S.I. et al. Effect of pitting corrosion on fatigue crack initiation and fatigue life // Eng. Frac. Mech. 1999. V. 62. № 4–5. P. 425–444.
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00101-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00101-5)
15. Sankaran K.K., Perez R., Jata K.V. Effects of pitting corrosion on the fatigue behavior of aluminum alloy 7075-T6: modeling and experimental studies // Mater. Sci. Eng. A. 2001. V. 297. № 1–2. P. 223–229.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01216-8](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01216-8)
16. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
17. Askes H., Aifantis E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // Int. J. Solids Struct. 2011. V. 48. № 13. P. 1962–1990.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>
18. Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // Fatigue Fract. Eng. Materials Structures. 2015. V. 38. № 2. P. 154–160.
<https://doi.org/10.1111/ffe.12183>
19. Razavi N. et al. Length scale parameters to estimate fatigue lifetime of 3D-printed titanium alloy Ti6Al4V containing notches in the as-manufactured condition // Int. J. Fatigue. 2023. V. 167. P. 107348.
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107348>
20. Jadallah O. et al. Microstructural length scale parameters to model the high-cycle fatigue behaviour of notched plain concrete // Int. J. Fatigue. 2016. V. 82. P. 708–720.
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.09.029>
21. Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y. New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity // Eng. Fract. Mech. 2021. V. 258. P. 108080.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108080>
22. Vasiliev V., Lurie S. On the failure analysis of cracked plates within the strain gradient elasticity in terms of the stress concentration // Procedia Structural Integrity. 2021. V. 32. P. 124–130.
<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.018>

23. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4. С. 5–12. <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-14001>
24. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новый метод исследования прочности хрупких тел с трещинами // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 9. С. 12–19. <https://doi.org/10.31044/1814-4632-2019-9-12-19>
25. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 43–49. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040133>
26. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 61–67.
27. *Solyaev Y.* Self-consistent homogenization approach for polycrystals within second gradient elasticity // Mech. Res. Commun. 2023. V. 132. P. 104162. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.11074>
28. *Solyaev Y.* Self-consistent assessments for the effective properties of two-phase composites within strain gradient elasticity // Mech. Mater. 2022. V. 169. P. 104321. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104321>
29. *Gao X.L., Park S.K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // Int. J. Solids Struct. 2007. V. 44. № 22–23. P. 7486–7499. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>
30. *Froio F., Zervos A.* Second-grade elasticity revisited // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24. № 3. P. 748–777.
31. *Solyaev Y., Lurie S., Altenbach H., dell'Isola F.* On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories // Int. J. Solids Struct. 2022. V. 239–240. P. 111433. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111433>
32. *Lurie S., Solyaev Y.* Variant of strain gradient elasticity with simplified formulation of traction boundary value problems // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2023. V. 103. № 12. P. e202300329. <http://doi.org/10.1002/zamm.202300329>
33. *Khakalo S., Niiranen J.* Gradient-elastic stress analysis near cylindrical holes in a plane under bi-axial tension fields // Int. J. Solids Struct. 2017. V. 110–111. P. 351–366. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.10.025>
34. *Georgiadis H.G., Gourgiotis P.A., Anagnostou D.S.* The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity // Arch. Appl. Mech. 2014. V. 84. P. 1373–1391. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0854-x>
35. *Gourgiotis P.A., Sifnaiou M.D., Georgiadis H.G.* The problem of sharp notch in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity // Int. J. Fract. 2010. V. 166. P. 179–201. <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9523-4>
36. *Dell'Isola F. et al.* Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces // Eur. J. Mech. A/Solids. 2024. V. 103. P. 105153. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105153>

37. *Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V.* Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2019. V. 78. P. 103853.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103853>
38. *Andreaus U. et al.* Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity // *Int. J. Eng. Sci.* 2016. V. 108. P. 34–50.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.08.003>
39. *Reiher J.C., Giorgio I., Bertram A.* Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity // *J. Eng. Mech.* 2017. V. 143. № 2. P. 04016112.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001184](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001184)
40. *Solyaev Y.* Complete general solutions for equilibrium equations of isotropic strain gradient elasticity // *J. Elast.* 2024. V. 156. P. 107–124.
<https://doi.org/10.1007/s10659-023-10039-4>
41. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodskiy D.B., Belov P.A.* On General Representations of Papkovich–Papkovich Solutions in Gradient Elasticity // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44. № 6. P. 2336–2351.
<https://doi.org/10.1134/S199508022306032X>
42. *Fatoba O., Akid R.* Uniaxial cyclic elasto-plastic deformation and fatigue failure of API-5L X65 steel under various loading conditions // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2018. V. 94. P. 147–159.
<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.01.015>
43. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 4. С. 43–49.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040133>
44. *Capula-Colindres S. et al.* Determination of fracture toughness and KIC-CVN correlations for BM, HAZ, and WB in API 5L X60 pipeline // *Arab. J. Sci. Eng.* 2021. V. 46. № 8. P. 7461–7469.
<https://doi.org/10.1007/s13369-021-05451-8>
45. *Sivaranjani T. et al.* Fatigue life estimation of aircraft structural component using FE approach and validation through analytical and experimental methods // *Materials Today: Proceedings.* 2023.
<https://doi.org/10.1016/j.matpr.2023.07.333>
46. *Sayah Badkhor M. et al.* Behavior Analysis of Cold Expanded-Bolt Clamped AL2024-T3 Plate // *Int. J. ADV Manuf. Tech.* 2017. V. 10. № 2. P. 1–13.
47. *Короленко В., Соляев Ю. О.* Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // *Труды МАИ.* 2021. № 121. С. 4.
<https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-04>
48. Military Handbook, Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures, Mil-HDBK-5G, United States Department of Defense, 1994.
49. *Gusev A.A., Lurie S. A.* Symmetry conditions in strain gradient elasticity // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22. № 4. P. 683–691.
<https://doi.org/10.1177/1081286515606960>
50. *Lurie S.A. et al.* Dilatation gradient elasticity theory // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2021. V. 88. P. 104258.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104258>

51. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O. On possible reduction of gradient theories of elasticity // Sixty Shades of Generalized Continua. Advancer Structured Materials. 2023. V. 170. P. 479–498.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_30
52. Lurie S., Belov P., Solyaev Y. On an extended family of quasi-equivalent models of the gradient elasticity theory // Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Advancer Structured Materials. 2022. V. 175. P. 155–182.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_9

EVALUATION OF THE LENGTH SCALE PARAMETERS OF METALS BASED ON FATIGUE TESTS DATA FOR SAMPLES WITH SURFACE DEFECTS

Y.O. Solyaev^{a,b,*}, S. S. Sherbakov^{c, **}, K. S. Golubkin^{b,*}, P. O. Polyakov^{b,****}**

^a*Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

^c*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

E-mail: yos@iam.ras.ru, **e-mail: sherbakovss@mail.ru, *e-mail: golubkink@mail.ru,
****e-mail: p.o.polyakov@yandex.ru*

Absract —A method for identifying the scale parameter of the gradient theory of elasticity is proposed based on known experimental data on the effect of the size of surface corrosion defects on the fatigue resistance parameters of steels and aluminum alloys. The possibility of a natural description of a decrease in the stress concentration coefficient near small-sized corrosion defects, which in this work are modeled as semi-ellipsoidal surface cavities, is shown. The identified values of the scale parameters are in the range of 20–230 microns.

Keywords: strain gradient elasticity, length scale parameter, corrosion defects, numerical simulations, size effects, fatigue test

REFERENCES

1. Eubanks R.A. Stress Concentration Due to a Hemispherical Pit at a Free Surface // J. Appl. Mech. 1954. V. 21. № 1. P. 57–62.
2. Fujita T., Tsuchida E., Nakahara I. Stress Concentration due to a hemi-prolate spheroidal pit at a free surface of a semi-infinite body under all-around tension // Bulletin of JSME. 1980. V. 23. № 181. P. 1048–1054.
3. Cerit M., Genel K., Eksi S. Numerical investigation on stress concentration of corrosion pit // Eng. Failure Analysis. 2009. V. 16. № 7. P. 2467–2472.
4. An L.S., Park Y.C., Kim H.K. A numerical study of the tensile stress concentration in a hemi-ellipsoidal corrosion pit on a plate // Int. J. Steel Struct. 2019. V. 19. P. 530–542.

5. Capula-Colindres S. et al. Mechanical behavior of X60 pipelines containing pitting corrosion defects based on finite element method // Forces Mech. 2024. V. 16. P. 100278.
6. Zerbst U. et al. Defects as a root cause of fatigue failure of metallic components. III: Cavities, dents, corrosion pits, scratches // Eng. Failure Analysis. 2019. V. 97. P. 759–776.
7. Katona R.M., Karasz E.K., Schaller R.F. A review of the governing factors in pit-to-crack transitions of metallic structures // Corrosion. 2023. V. 79. № 1. P. 72–96.
8. Dolley, Lee, Wei. The effect of pitting corrosion on fatigue life // Fat. Fract. Eng. Mat. Struct. 2000. V. 23. № 7. P. 555–560.
9. Wang Q.Y., Pidaparti R.M., Palakal M.J. Comparative study of corrosion-fatigue in aircraft materials // AIAA J. 2001. V. 39. № 2. P. 325–330.
10. Larrosa N.O., Akid R., Ainsworth R.A. Corrosion-fatigue: a review of damage tolerance models // Int. Mat. Rev. 2018. V. 63. № 5. P. 283–308.
11. Becker K. et al. The effect of surface degradation on fatigue and fracture behaviour // Mat. Design. 1993. V. 14. № 3. P. 175–182.
12. Beltran-Zuñiga M.A. et al. Effect of microstructure and crystallographic texture on the toughness anisotropy of API 5L X46 steel // Fat. Frac. Eng. Mat. Structs. 2018. V. 41. № 4. P. 749–761.
13. Evans C., Leiva-Garcia R., Akid R. Strain evolution around corrosion pits under fatigue loading // Theor. Appl. Fract. Mech. 2018. V. 95. P. 253–260.
14. Rokhlin S.I. et al. Effect of pitting corrosion on fatigue crack initiation and fatigue life // Eng. Frac. Mech. 1999. V. 62. № 4–5. P. 425–444.
15. Sankaran K.K., Perez R., Jata K.V. Effects of pitting corrosion on the fatigue behavior of aluminum alloy 7075-T6: modeling and experimental studies // Mat. Sci. Eng.: A. 2001. V. 297. № 1–2. P. 223–229.
16. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
17. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // Int. J. Solids Struct. 2011. V. 48. № 13. P. 1962–1990.
18. Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // Fat. Frac. Eng. Mat. Struct. 2015. V. 38. № 2. P. 154–160.
19. Razavi N. et al. Length scale parameters to estimate fatigue lifetime of 3D-printed titanium alloy Ti6Al4V containing notches in the as-manufactured condition // Int. J. Fat. 2023. V. 167. P. 107348.
20. Jadallah O. et al. Microstructural length scale parameters to model the high-cycle fatigue behaviour of notched plain concrete // Int. J. Fat. 2016. V. 82. P. 708–720.
21. Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y. New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity // Eng. Fract. Mech. 2021. V. 258. P. 108080.
22. Vasiliev V., Lurie S. On the failure analysis of cracked plates within the strain gradient elasticity in terms of the stress concentration // Proc. Struct. Integ. 2021. V. 32. P. 124–130.
23. Vasiliev V.V., Lurie S.A., Salov V.A. Issledovaniye prochnosti plastin s treshchinami na osnove kriteriya maksimal'nykh napryazheniy v masshtabno-zavisimoy obobshchennoy teorii uprugosti // Fizicheskaya mezomekhanika. 2018. V. 21. № 4. P. 5–12.
24. Vasiliev V.V., Lurie S.A. Novyy metod issledovaniya prochnosti khrupkikh tel s treshchinami // Deformatsiya i razrusheniye materialov. 2019. № 9. P. 12–19.

25. *Vasiliev V.V., Lurie S.A., Salov V.A.* Opredeleniye nagruzki, vyzyvayushchey poyavleniye plasticheskoy deformatsii v rastyagivayemoy plastine s treshchinoy // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2020. № 4. P. 43–49.
26. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Novoye resheniye ploskoy zadachi o ravnovesnoy treshchine // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2016. № 5. P. 61–67.
27. *Solyaev Y.* Self-consistent homogenization approach for polycrystals within second gradient elasticity // Mech. Res. Commun. 2023. V. 132. P. 104162.
28. *Solyaev Y.* Self-consistent assessments for the effective properties of two-phase composites within strain gradient elasticity // Mech. Mater. 2022. V. 169. P. 104321.
29. *Gao X.L., Park S.K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // Int. J. Solids Struct. 2007. V. 44. № 22–23. P. 7486–7499.
30. *Frolio F., Zervos A.* Second-grade elasticity revisited // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24. № 3. P. 748–777.
31. *Solyaev Y., Lurie S., Altenbach H., dell'Isola F.* On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories // Int. J. Solids Struct. 2022. V. 239. P. 111433.
32. *Lurie S., Solyaev Y.* Variant of strain gradient elasticity with simplified formulation of traction boundary value problems // ZAMM – J. Appl. Math. Mech. / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2023. V. 103. № 12. P. e202300329.
33. *Khakalo S., Niiranen J.* Gradient-elastic stress analysis near cylindrical holes in a plane under bi-axial tension fields // Int. J. Solids Struct. 2017. V. 110. P. 351–366.
34. *Georgiadis H.G., Gourgiotis P.A., Anagnostou D.S.* The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity // Arch. Appl. Mech. 2014. V. 84. P. 1373–1391.
35. *Gourgiotis P.A., Sifnaiou M.D., Georgiadis H.G.* The problem of sharp notch in micro-structured solids governed by dipolar gradient elasticity // Int. J. Fract. 2010. V. 166. P. 179–201.
36. *Dell'Isola F. et al.* Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces // Eur. J. Mech.-A/Solids. 2024. V. 103. P. 105153.
37. *Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V.* Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // Eur. J. Mech.-A/Solids. 2019. V. 78. P. 103853.
38. *Andreous U. et al.* Numerical simulations of classical problems in two-dimensional (non) linear second gradient elasticity // Int. J. Eng. Sci. 2016. V. 108. P. 34–50.
39. *Reiher J.C., Giorgio I., Bertram A.* Finite-element analysis of polyhedra under point and line forces in second-strain gradient elasticity // J. Eng. Mech. 2017. V. 143. № 2. P. 04016112.
40. *Solyaev Y.* Complete General Solutions for Equilibrium Equations of Isotropic Strain Gradient Elasticity // J. Elast. 2024. V. 156. P. 107–124.
41. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodskiy D.B., Belov P.A.* On General Representations of Papkovich–Papkovich Solutions in Gradient Elasticity // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. № 6.
42. *Fatoba O., Akid R.* Uniaxial cyclic elasto-plastic deformation and fatigue failure of API-5L X65 steel under various loading conditions // Theoret. Appl. Fract. Mech. 2018. V. 94. P. 147–159.

-
43. *Vasiliev V.V., Lurie S.A., Salov V.A.* Opredeleniye nagruzki, vyzvyayushchey poyavleniye plasticheskoy deformatsii v rastyagivayemoy plastine s treshchinoy // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2020. № 4. P. 43–49.
 44. *Capula-Colindres S. et al.* Determination of fracture toughness and KIC-CVN correlations for BM, HAZ, and WB in API 5L X60 pipeline // Arab. J. Sci. Eng. 2021. V. 46. № 8. P. 7461–7469.
 45. *Sivarajanji T. et al.* Fatigue life estimation of aircraft structural component using FE approach and validation through analytical and experimental methods // Mater. Today: Proc. 2023.
 46. *Sayah Badkhor M. et al.* Behavior Analysis of Cold Expanded-Bolt Clamped AL2024-T3 Plate // Int. J. Adv. Des. Manufact. Technol. 2017. V. 10. № 2. P. 1–13.
 47. *Korolenko V., Solyaev Y.O.* Otsenka urovnya kontsentratsii napryazheniy vblizi mikro-razmernykh otverstiy na osnove uproschennykh modeley gradiyentnoy teorii uprugosti // Trudy MAI. 2021. № 121. P. 4.
 48. Military Handbook, Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures, Mil-HDBK-5G, United States Department of Defense, 1994.
 49. *Gusev A.A., Lurie S.A.* Symmetry conditions in strain gradient elasticity // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22. № 4. P. 683–691.
 50. *Lurie S.A. et al.* Dilatation gradient elasticity theory // Eur. J. Mech.-A/Solids. 2021. V. 88. P. 104258.
 51. *Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O.* On possible reduction of gradient theories of elasticity // Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. V.A. Eremeyev. Cham: Springer International Publishing, 2023. P. 479–498.
 52. *Lurie S., Belov P., Solyaev Y.* On an extended family of quasi-equivalent models of the gradient elasticity theory // Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials: A Tribute to Francesco dell'Isola. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 155–182.