

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ  
ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПОГРАНСЛОЕ В ОБОЛОЧКАХ  
ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ  
НОРМАЛЬНОГО ТИПА

© 2025 г. И. В. Кириллова<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>ФГБОУ ВО “СГУ им. Н.Г. Чернышевского”, Саратов, Россия

\*E-mail: iv@sgu.ru

Поступила в редакцию 24.09.2024 г.

После доработки 30.09.2024 г.

Принята к публикации 30.09.2024 г.

Асимптотический метод исследования поведения нестационарных волн в тонких оболочках в целом заключается в применении метода расчленения решений в фазовой плоскости на составляющие с разными показателями изменяемости по координатам и времени. В случае ударных воздействий нормального вида одной из таких составляющих является эллиптический погранслой, имеющий место в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Его уравнения выведены методом асимптотического интегрирования из точных трехмерных уравнений теории упругости и являются уравнениями в частных производных эллиптического типа с граничными условиями, задаваемыми уравнениями гиперболического типа. В статье представлен общий асимптотический метод решения уравнений рассматриваемого погранслоя в случае геометрии произвольных оболочек на примере оболочек вращения. Основывается он на предварительном исследовании базовых задач для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны с помощью интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Разрешающие уравнения этого погранслоя для разных видов нормальных воздействий имеют общее характерное свойство: асимптотически главные составляющие совпадают с соответствующими уравнениями для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Данное свойство, в совокупности со свойством разной изменяемости компонент напряженно-деформированного состояния и геометрических параметров, позволяет при использовании метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа функционально связать решения для общего случая оболочек с решениями для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Разработанный общий подход применяется в данной статье к решению задачи об эллиптическом погранслое в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа. Приведен численный расчет касательного напряжения для полученного асимптотического решения в случае сферической оболочки.

**Ключевые слова:** асимптотический метод, эллиптический погранслой, оболочка вращения, касательное напряжение, условный фронт поверхностных волн Рэлея, метод экспоненциальных представлений, преобразование Лапласа, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S1026351925010085, EDN: TAAVGH

**1. Введение.** В работах У.К. Нигула [1,2] проведена классификация ударных торцевых воздействий на тонкие упругие оболочки. Среди трех типов классификаций воздействие NW (воздействие нормального типа) выделяется наличием скачка касательных напряжений в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Отметим, что в работе [3] обобщены работы авторов по применению асимптотического подхода к построению приближенных теорий описания нестационарных волн в оболочках вращения в случае рассматриваемого воздействия. Здесь можно выделить два аспекта: первый из них заключается в выделении областей фазовой плоскости с различными значениями показателей изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) по пространственным координатам и времени, а второй – в построении асимптотически оптимальных уравнений для каждой точки области.

В рамках указанного выше первого аспекта авторами доказывается корректность предложенной схемы расчленения НДС: выделены области соглашения приближенных теорий в соседних областях их применимости.

Воздействие типа NW отличается от других видов ударных воздействий наличием эллиптического погранслоя, определяющего скачок напряжений в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. В работе [4] и представлена впервые схема расчленения нестационарного НДС в оболочках при рассматриваемом типе воздействия: используются изгибная двумерная составляющая теории Кирхгофа–Лява, коротковолновая высокочастотная составляющая, гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига, а также рассматриваемый в данной работе эллиптический погранслой. В рамках второго аспекта для вывода асимптотически оптимальных уравнений рассматриваемого погранслоя методом асимптотического интегрирования точных трехмерных уравнений теории упругости была разработана концепция, согласно которой оно производится в новом пространстве прифронтовых координат с применением символического метода Лурье. В процессе введения прифронтовых координат и определения изменяемости рассматриваемой составляющей определилась область применимости данного погранслоя: в масштабе характерного значения радиусов кривизны размер прифронтовой области имеет порядок квадрата относительной толщины оболочки.

Свое название рассматриваемый погранслой получил в результате вывода его асимптотически оптимальных уравнений. Уникальность полученной системы характеризуется тем, что поведение этого типа НДС внутри тела оболочки задается для потенциальных функций уравнениями эллиптического типа относительно продольной и нормальной пространственных координат, а определяющее граничное условие на лицевых поверхностях описывается гиперболическим уравнением относительно продольной координаты и времени.

В работах автора [3,5] подробно описано получение базовых решений для цилиндрической оболочки в двух случаях нагрузки – поверхностной и торцевой, приводящих к разным видам разрешающих уравнений. Решения получены с помощью метода двойных интегральных преобразований – Лапласа по времени и Фурье по продольной координате.

В работе автора [6] представлено исследование по построению решения для эллиптического погранслоя в оболочках вращения в случае ударных поверхностных воздействий нормального типа. В настоящей работе эти результаты использованы для обобщения построенного метода на общий случай воздействий NW с последующим исследованием по построению асимптотического решения для случая ударного торцевого воздействия нормального типа. Общая методика для всех типов граничных условий заключается в начальном решении гиперболического уравнения относительно граничного значения потенциальной функции (или ее производной). Это уравнение содержит мало изменяющиеся геометрические параметры только в членах первого порядка малости, а члены нулевого порядка малости имеют постоянные коэффициенты, совпадающие с соответствующими коэффициентами для базового случая цилиндрических оболочек. Указанные свойства позволяют, применяя метод экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа по времени, выразить искомое представление для изображения потенциальной функции через соответствующее решение базовой задачи. Последовательно применяя асимптотический метод разложения решения по малому параметру относительной тонкостенности, можно аналогично выразить все компоненты НДС для общего случая геометрии через соответствующие компоненты для цилиндрической оболочки.

В статье приводится также апробация разработанного метода на примере сферической оболочки, позволившая сделать выводы о его эффективности.

**2. Постановка задачи.** На рис.1 изображена оболочка вращения с системой координат  $(\alpha, \theta, z)$ , где  $\alpha$  – длина дуги вдоль образующей,  $\theta$  – угол в окружном направлении,  $z$  – внешняя нормаль к срединной поверхности. Как и в прежних работах, будем рассматривать осесимметричное НДС.

Пусть граничное условие, определяющее ударное воздействие на торец полубесконечной оболочки  $\alpha=0$ , имеет вид:

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad v_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – напряжения,  $t$  – время,  $I$  – амплитуда нагрузки,  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда. Рассматриваем также однородные начальные условия:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3) \quad \text{при } t = 0,$$

где  $v_i$  – перемещения. Считаем также, что лицевые поверхности свободны от напряжений:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h,$$

где  $h$  – полутолщина оболочки.

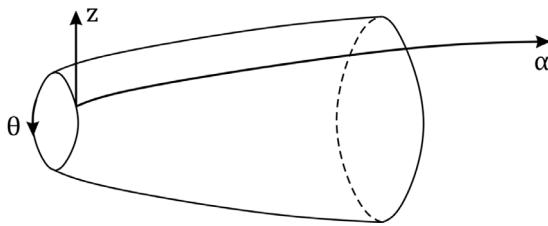


Рис. 1. Полубесконечная оболочка вращения.

В работе [3] искомая задача для рассматриваемого ударного воздействия на торец полубесконечной оболочки сведена к задаче для бесконечной оболочки с поверхностной ударной нагрузкой путем выделения сначала частного решения волнового типа удовлетворяющего только граничным условиям на торце (2.1). Такое медленно изменяющееся по продольной координате и времени решение можно построить с помощью его разложения в степенной ряд по отклонению от фронта сдвиговой волны. Тогда решение исходной задачи можно представить в виде суммы [3]:

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)},$$

где  $\text{НДС}^{(0)}$  является искомым частным решением:

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= 0, \quad v_3^{(0)} = -I \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi_0) (\tau_0 - \xi_0)^n H(\tau_0 - \xi_0), \\ F_1 &= \sqrt{\frac{B(0)}{B}}, \quad F_n = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{d}{d\xi_0} \left( \frac{1}{B} \frac{dF_{n-1}}{d\xi_0} \right) d\xi_0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Здесь  $B$  – расстояние до оси вращения,  $\xi_0 = \alpha/R$ ,  $t_0 = tc_2/R$ ,  $c_2$  – скорость волны сдвига:  $c_2 = \sqrt{E/2(1+\nu)\rho}$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала оболочки.  $\text{НДС}^{(1)}$  определяет решение задачи для погранслоя в бесконечной оболочке с граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = -S(\xi_0, \tau_0) \text{ при } z = \pm h, \\ S &= \pm I \left[ \sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} (nF_n - F'_{n-1})(\tau_0 \mp \xi_0)^{n-1} \right] H(\tau_0 \mp \xi_0) \text{ при } \xi_0 \leq 0. \end{aligned}$$

Такая задача названа в [3] эквивалентной; верхний индекс “1” будем в дальнейшем опускать.

Приведем разрешающие уравнения рассматриваемого эллиптического погранслоя, описанные в [3] и полученные методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, преобразованных к форме в прифронтовых координатах, с использованием символического метода Лурье. Введены объемные ( $\phi_1$  и  $\phi_2$ ) и сдвиговые ( $\psi_1$  и  $\psi_2$ ) потенциалы Ламе в соответствии с направлением распространения возмущений по координате

з:  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  – положительное направление,  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  – отрицательное направление. Тогда для потенциалов  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  ( $i=1, 2$ ) имеют место эллиптические уравнения:

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0,$$

$$b^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = 0,$$

при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях оболочки:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha} = \frac{B_\omega}{g \varkappa_R} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \text{ при } z = \pm h,$$

$$\left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + \left( b + \frac{\varkappa_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2bc_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} +$$

$$+ \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } z = \pm h, \quad (2.2)$$

$$\Psi_i = \frac{h}{b} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z},$$

где  $a = \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}$ ,  $b = \sqrt{1 - \varkappa_R^2}$ ,  $\varkappa^2 = c_1/c_2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$ ,  $\varkappa_R = c_R/c_2$ ,  $g = 1 - \varkappa_R^2/2$ ,  $k_c = 2 + \varkappa_R B_\omega$ ,  $c_1$  и  $c_R$  – скорости волн расширения и поверхностных волн Рэлея, а коэффициент  $B_\omega$  задается выражением:

$$B_\omega = 2 \left[ \frac{\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2} + \frac{\varkappa \varkappa_R}{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2} - \frac{4 \varkappa_R}{2 - \varkappa_R^2} \right]^{-1}.$$

Касательное напряжение  $\sigma_{13}$  выражается через потенциальные функции следующим образом:

$$\sigma_{13} = \frac{Eh}{1 + \nu} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{a^2 c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{g + \varkappa_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\varkappa_R^2}{bc_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z \partial t} + \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right).$$

### 3. Асимптотический метод решения уравнений эллиптического погранслоя.

В работе [3] приведены решения для обоих случаев ударных воздействий на цилиндрическую оболочку. Основаны они на применении интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Так, для случая торцевого ударного воздействия, при рассмотрении только одной волны, инициируемой лицевой поверхностью  $z = -h$  и описываемой потенциалами  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  (индекс “1” в дальнейшем опускаем), такое решение в переменных  $\xi = \alpha/h$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $\tau = tc_2/h$  имеет в асимптотически главном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = I \frac{B_{\omega}}{\pi \varkappa_R b^2} & \left[ -\operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В работе [6] было представлено решение для эллиптического погранслоя в общем случае оболочек вращения при ударном воздействии на лицевые поверхности. Опишем универсальную методику решения уравнений эллиптического погранслоя для обоих случаев ударного воздействия NW. Так же, как и ранее, рассматриваем только волну от лицевой поверхности  $z = -h$ .

Ключевую роль в моделировании поверхностных волн Рэлея, распространяющихся вдоль продольной координаты, играет первое граничное условие (в рассматриваемом случае торцевого воздействия — это первое уравнение системы (2.2)) относительно потенциала  $\psi$  или его производной по нормальной координате  $\Psi$  (индекс “1” опускаем). Представим его общий вид в форме:

$$\varkappa_R^2 \frac{d^2 Q}{d\xi^2} - \frac{d^2 Q}{d\tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial Q}{\partial \xi} = T,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр тонкостенности оболочки:  $\varepsilon = h/R$ , и для случая поверхностной нагрузки:

$$Q = \psi|_{\xi=0}, \quad T = \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_{\omega}}{b} P, \quad |\xi| \leq \xi_{0r},$$

$P$  определяет ударное воздействие на лицевые поверхности, а для случая торцевой нагрузки:

$$Q = \Psi|_{\xi=0}, \quad T = \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_{\omega}}{g} \frac{\partial S}{\partial \xi}.$$

Будем рассматривать уравнение (2.2) граничного условия как самостоятельное для определения граничного значения искомой потенциальной функции или ее производной. Применим к этому уравнению интегральное преобразование Лапласа по временной переменной:

$$\varkappa_R^2 \frac{d^2 Q^L}{d\xi^2} - s^2 Q^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{dQ^L}{d\xi} = T^L, \quad Q^L = \int_0^{\infty} Q e^{-st} dt, \quad (3.2)$$

где  $s$  — параметр преобразования. Поскольку по исходному предположению  $B(\xi_0)$  является медленно изменяющейся функцией с показателем изменениямости, равным нулю, то при определении решения этого уравнения существует принципиальное различие в нахождении его однородной и неоднородной частей. Подобно случаю эллиптического погранслоя для поверхностного ударного воздействия [6], быстроизменяющееся общее решение (3.2) ищется с помощью метода экспоненциальных представлений, причем точки  $\xi_0 = \pm \xi_{0r}$  определяют удобную форму общего решения как волнового источника:

$$Q_s^L = C(s) \frac{1}{B^{k_r}} e^{\mp \left( \frac{\xi_0 - \xi_{0r}}{\varkappa_R} \right) s}, \quad k_r = \frac{k_c}{2\varkappa_R^2}, \quad (3.3)$$

где  $C(s)$  – постоянные интегрирования, которые ищутся из условий непрерывности полного решения и его производных в точках  $\pm\xi_{0r}$ , являющихся источниками возмущений. Частное решение неоднородного уравнения (3.2) является, в соответствии со свойствами нагрузки, медленно изменяющимся и его асимптотически главная часть определяется из уравнения, полностью соответствующего случаю цилиндрической оболочки:

$$\varkappa_R^2 \frac{d^2 Q_T^L}{d\xi^2} - s^2 Q_T^L = T^L.$$

Построенное асимптотическое решение уравнения (3.3) на базе решений  $Q_S$  и  $Q_T$  при удовлетворении с помощью постоянных условиям непрерывности в точках  $\xi_{0r}$  полностью соответствует аналогичному решению для цилиндрической оболочки и совпадает с ним при  $B(\xi_0) = \text{const}$ . Поскольку на описание быстроизменяющейся составляющей только в узкой прифронтовой зоне  $\varkappa_R \tau_0 - \xi_0 - \xi_{0r} = O(\varepsilon^2)$  влияет в окончательном решении его часть, определенная слагаемыми с  $Q_S^L$ , то выберем окончательную форму решения для  $Q^L$  в виде

$$Q^L = \left( \frac{B(\xi_{0r})}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} Q_C^L, \quad (3.4)$$

где  $Q_C^L$  – соответствующее решение для цилиндрической оболочки.

Все остальные разрешающие уравнения искомого погранслоя с точки зрения описания быстроизменяющегося решения носят вспомогательный характер и в них достаточно оставить только асимптотически главные составляющие; следовательно, они совпадают с уравнениями для цилиндрической оболочки. Тогда соотношения между изображениями перемещений и напряжений для общего случая и случая цилиндрической оболочки запишутся подобно (3.4). Следовательно, соотношения для оригиналов напряжений и перемещений будут иметь вид:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{B(\xi_{0r})}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{ij,c}, \quad v_i = \left( \frac{B(\xi_{0r})}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c},$$

что и является обобщением результатов работы [6]. В этой работе рассмотрен случай ударного поверхностного воздействия:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -P(\xi_0, \tau_0), \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad |\xi_0| \leq L_0, \\ \sigma_{33} &= 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad |\xi_0| > L_0, \\ P &= \begin{cases} pH(L_0 - \xi_0)H(\tau_0) & \text{при } \xi_0 \geq 0, \\ pH(L + \xi_0)H(\tau_0) & \text{при } \xi_0 \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $p$  – амплитуда внешнего давления. Отметим, что для случая нагрузки (3.5) источниками возмущений являются точки  $x_{0r} = \pm L_0$ .

Перейдем к решению рассматриваемой в статье задачи об эллиптическом погранслое при ударном торцевом воздействии. Получим сначала выражение для производной от потенциала  $\Psi$  (рассматриваем вклад потенциала  $\psi_1$ ) на границе  $\zeta = -1$  применяя к первому уравнению системы (2.2) двойное интегральное преобразование Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Рассмотрим сначала случай  $B(\xi_0) = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \Psi_0^{LF} &= \Psi^{LF} \Big|_{\zeta=-1} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \frac{\chi^2}{s(s^2 + \chi^2)(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)}, \\ \Psi_0^F &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0 e^{-i\chi\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обратим в изображении (3.6) преобразование Фурье с помощью табличных интегралов [7]:

$$\Psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h}{E} I \frac{B_\omega}{gb^2} \left( \frac{1}{s^2} e^{\mp \frac{S}{\varkappa_R} \xi} - \frac{\varkappa_R}{s^2} e^{\mp S\xi} \right), \quad \xi \gtrless 0. \quad (3.7)$$

В решении (3.7) слагаемые с  $e^{\mp \frac{S}{\varkappa_R} \xi}$  определяют поверхностные волны Рэлея, а слагаемые с  $e^{\mp S\xi}$  – волны сдвига, и его можно получить непосредственно из (2.2) (при  $B(\xi_0) = \text{const}$ ) как линейную комбинацию частного решения неоднородного уравнения и общего решения уравнения однородного. Следуя этой методике, строим решение (2.2) в изображениях Лапласа по времени с помощью метода экспоненциальных представлений для общего решения однородного уравнения в форме (3.3) и метода малого параметра для частного решения, медленно изменяющегося по продольной координате. В качестве источника возмущения выступает точка  $\xi_{0r} = 0$ . Тогда, учитывая только асимптотически главный член для этого частного решения, получаем для рассматриваемого сейчас случая торцевого ударного воздействия следующую функцию:

$$\Psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h}{E} I \frac{B_\omega}{gb^2} \left[ \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \frac{1}{s^2} e^{\mp \frac{\xi_0}{\varkappa_R \varepsilon} s} - \varkappa_R \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\mp \frac{\xi_0}{\varepsilon} s} \right], \quad \xi_0 \gtrless 0.$$

Решение в окрестности фронта волны Рэлея определяется первым слагаемым:

$$\Psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h}{E} I \frac{B_\omega}{gb^2} \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \frac{1}{s^2} e^{\mp \frac{\xi_0}{\varkappa_R \varepsilon} s}, \quad \xi \gtrless 0.$$

Следовательно, выражаем рассматриваемое решение для  $\Psi_0^L$  через соответствующее решение  $\Psi_0^c$ , для цилиндрической оболочки:

$$\Psi_0^L = \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \Psi_{\text{o.c.}}^L.$$

Таким образом, соответственно описанной методике, выражаем напряжения и перемещения для общего случая оболочки вращения через их аналоги для цилиндрической оболочки:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{ij,c}, \quad v_i = \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c}.$$

Таким образом, используя решение (3.1), записываем окончательный вид выражения для касательного напряжения  $\sigma_{13}$ :

$$\sigma_{13} = I \frac{B_\omega}{\pi \varkappa_R b^2} \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \times \\ \times \left[ -\operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 t^2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 t^2} \right) \right]. \quad (3.8)$$

**4. Анализ решения для касательного напряжения в случае сферической оболочки.** Рассмотрим свойства решения для касательного напряжения  $\sigma_{13}$  в зависимости от времени и нормальной координаты. Как и в работе [6], используем пример сферической оболочки, геометрия которой представлена на рис. 2. Здесь, как и в [6], точка  $T$  – пересечение торцевой поверхности со срединной линией,  $\alpha_0$  – текущая координата, точка  $A$  соответствует координате  $\alpha_0$ , точка  $Q_2$  – граничная точка оси вращения, углы  $\theta_T$  и  $\theta_a$  соответствуют радиусам до точек  $T$  и  $A$ . Выражение для расстояния  $B$  определяется следующим образом:

$$B = \sin \left( \theta_T + \frac{\alpha}{R} \right).$$

Исследование решения (3.8) должно ответить на следующие вопросы, подтверждающие основные положения разработанной асимптотики: как с течением времени сохраняется свойство решения сосредотачивать основной скачок в малой окрестности квазифронта  $O(\varepsilon^2)$  и как влияют друг на друга граничные условия на противоположных лицевых поверхностях.

Расчеты проведены, как и в [6], при следующих значениях геометрических и механических параметров:  $\theta_T = 0.93$ ,  $v = 0.3$ ,  $\varkappa_R = 0.93$ . На рис. 3 изображены графики касательного напряжения в малой окрестности фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \varkappa_R \tau_0$  для моментов безразмерного времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$ .

Расчеты подтверждают основные положения разработанной асимптотики: первый, и основной, скачок напряжения  $\sigma_{13}$  полностью сосредоточен в узкой прифронтовой зоне, а граничные условия на противоположных лицевых поверхностях не влияют друг на друга, поскольку решение в этой узкой зоне сосредоточено в малых окрестностях лицевых поверхностей.

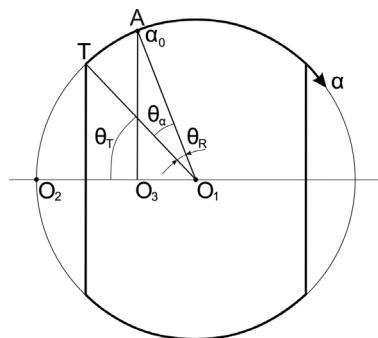
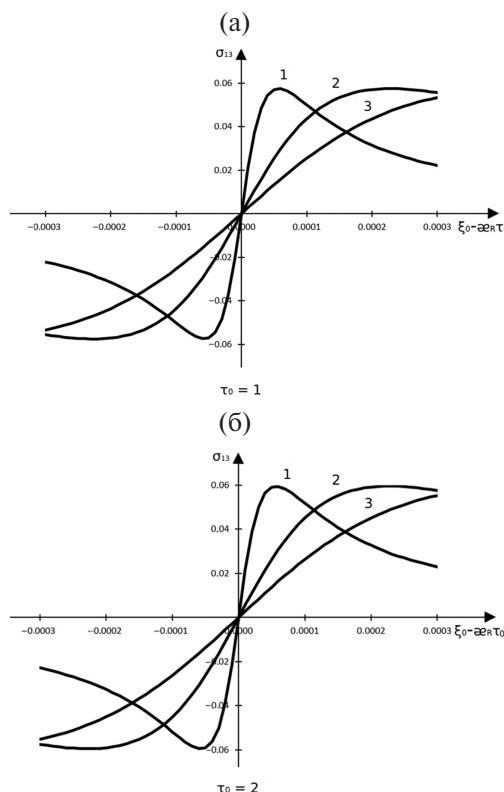


Рис. 2. Геометрия сечения сферической оболочки.

Рис. 3. График касательного напряжения  $\sigma_{13}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея в моменты времен  $\tau_0 = 1$  (а) и  $\tau_0 = 2$  (б) для значений нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$  (кривые, соответственно, 1, 2, 3).

**Заключение.** В данной статье представлен единый метод асимптотического решения задачи для эллиптического пограничного слоя в оболочках вращения при всех типах граничных условий вида NW как на лицевых поверхностях, так и

на торце. Этот метод обобщает опыт решения задач для цилиндрической оболочки при всех видах граничных условий и частный опыт решения задачи для оболочки вращения при ударном воздействии только на лицевые поверхности. Основан он на предварительном решении базовой задачи для граничного значения потенциальной функции. Приведенные численные расчеты для случая ударного воздействия на торец сферической оболочки полностью подтверждают эффективность рассмотренного асимптотического метода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *Int. J. Solid Struct.* 1969. V. 5. № 6. P. 607–627.
2. *Нигул У.К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 308–332.
3. *Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 2. С. 35–49.  
<https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>
4. *Kossovich L.Yu., Kirillova I.V.* Transient waves in shells of revolution under normal shock loading // *Topical problems in theoretical and applied mechanics.* New Delhi: Elite Publishing House, LTD. 2013. P. 186–201.
5. *Kirillova I.V., Kossovich L.Yu.* Analysis of solutions for elliptic boundary layer in cylindrical shells at edge shock loading // *Advanced Structured Materials. Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures.* 2022. V. 151. Chapter 11. P. 131–140.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_11)
6. *Кириллова И.В.* Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // *Изв. РАН. МТТ.* 2024. № 5. С. 48–59.  
<https://doi.org/10.31857/S1026351924050045>
7. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* // *Mechanics of Solids.* 2024. V. 59. № 5. P. 2686–2693.

### ASYMPTOTIC METHOD IN PROBLEMS OF ELLIPTIC BOUNDARY LAYER IN SHELLS OF REVOLUTION UNDER IMPACTS OF NORMAL TYPE

I. V. Kirillova<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>*Saratov State University, Saratov, Russia*

\**E-mail: iv@sgu.ru*

**Abstract** – The asymptotic method for studying the behavior of non-stationary waves in thin shells generally involves using the separation method of solutions in the phase plane into components with different indices of variability in coordinates

and time. In the case of normal type of impact, one of these components is an elliptical boundary layer occurring in a small neighborhood of the surface Rayleigh wave front. Its equations are derived by the method of asymptotic integration from the three-dimensional equations of elasticity theory. And they are partial differential equations of elliptic type with boundary conditions specified by hyperbolic equations. The article presents a general asymptotic method for solving the equations of the boundary layer under consideration in the case of the arbitrary form shell of revolution as an example. It is based on a preliminary study of basic problems for shells of revolution of zero Gaussian curvature using integral Laplace and Fourier transforms. The equations of this boundary layer for different types of normal loading have a common characteristic property: the asymptotically principal components coincide with the corresponding equations for shells of revolution of zero Gaussian curvature. This property, together with the property of different variability of the components of the stress-strain state and geometric parameters, allows, when using the method of exponential representations in the Laplace transform space, to functionally relate the solutions in the case of the arbitrary form shell of revolution with the solutions for shells of revolution of zero Gaussian curvature. The developed general approach is applied in this article to solving the problem of an elliptical boundary layer in shells of revolution under normal type loading. A numerical calculation of the shear stress for the obtained asymptotic solution in the case of a spherical shell is given.

*Keywords:* asymptotic method, elliptical boundary layer, shell of revolution, shear stress, Rayleigh surface waves front, method of exponential representations, Laplace transform, Fourier transform

## PREFERENCES

1. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. V. 5. № 6. 1969. P. 607–627.
2. *Nigul U.* Comparison of results of an analysis of transient waves in shells and plates by elasticity theory and approximate theories// J. of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. V. 33. № 2. P. 290–309.
3. *Kirillova I.V., Kossovich L.Yu.* Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions // Mechanics of Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 232–243.  
<https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>
4. *Kossovich L.Yu., Kirillova I.V.* Transient waves in shells of revolution under normal shock loading // Topical problems in theoretical and applied mechanics, Elite Publishing House Pvt. Ltd. New Delhi. 2013. P. 186–201.
5. *Kirillova I.V., Kossovich L.Yu.* Analysis of solutions for elliptic boundary layer in cylindrical shells at edge shock loading // Advanced Structured Materials. Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. 2022. V. 151. Chapter 11. P. 131–140.
6. *Kirillova I.V.* Elliptic boundary layer in shells of revolution under surface shock loading of normal type // Mechanics of Solids. 2024. V. 59. № 5. P. 2686–2693.
7. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* // Mechanics of Solids. 2024. V. 59. № 5. P. 2686–2693.