

УДК 539.3

## ТРЕХОСНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБЧАТЫХ И СПЛОШНЫХ ОБРАЗЦОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ. ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

© 2025 г. П. А. Моссаковский<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup> Научно-исследовательский институт механики Московского государственного  
университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: pavel\_mossakovsky@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2024 г.

После доработки 20.09.2024 г.

Принята к публикации 21.09.2024 г.

Работа посвящена теоретическому исследованию задачи идентификации неоднородного напряженно-деформированного состояния (НДС) в толстостенных трубчатых и сплошных образцах, нагружаемых осевой силой, крутящим моментом, внешним (а для трубок — и внутренним) давлением. В отличие от стандартных испытаний с тонкостенными трубками в этом случае удастся достичь существенно более высоких величин деформаций до потери несущей способности образцов. Известным подходом к решению этой задачи является метод условной трубки, требующем для идентификации НДС проведения двух согласованных экспериментов по близким программам нагружения. В работе дано теоретическое обоснование метода условной трубки (и вырожденной условной трубки) с учетом конечных деформаций в образце.

*Ключевые слова:* теория эксперимента, трехосное нагружение, метод условной трубки, конечные деформации, коротационные тензорные меры, определяющие соотношения

DOI: 10.31857/S1026351925010058, EDN: TAIPCQ

**1. Введение.** Задача об идентификации неоднородного напряженно-деформированного состояния (НДС) в образцах по результатам экспериментов относится к классу обратных задач, решение которых представляет значительные трудности [1–4]. Применительно к испытаниям сплошных или толстостенных трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой, крутящим моментом, внешним (а для трубок — и внутренним) давлением, в дальнейшем именуемым  $(P, M, q_i)$  нагружением, известным подходом к решению этой задачи является метод условной трубки, систематическое обоснование которому при ограничениях малых деформаций дано в работе [5]. В сравнении со стандартными испытаниями с тонкостенными трубчатыми образцами метод условной трубки позволяет изучить свойства материалов в существенно большем диапазоне деформаций. К безусловным достоинствам

метода также следует отнести значительно более широкий класс исследуемых изотермических процессов деформаций в отличие от существующих экспериментальных методик [6], допускающих лишь особые виды нагружений. Определенным минусом методики, объясняющим ее недостаточную практическую востребованность, является ограничение ее применимости областью малых деформаций, а также необходимость проведения для идентификации НДС, в общем случае, двух связанных экспериментов по близким программам нагружения, что предъявляет повышенные требования к повторяемости механических свойств материалов и к качеству изготавливаемых образцов. В работе метод условной и вырожденной условной трубки расширен на область конечных деформаций, а отмеченные выше недостатки в настоящее время во многом нивелируются совершенствованием испытательных установок и улучшением технологий производства и обработки испытываемых материалов.

**2. Основные положения.** Рассмотрим толстостенный круговой цилиндрический образец, нагружаемый по некоторой программе (кинематической, силовой или комбинированной) осевой силой  $P$ , крутящим моментом  $M$ , внутренним и внешним давлениями  $q_1$  и  $q_2$ . В рабочей части образец представляет собой полый прямой круговой цилиндр в начальный момент времени длины  $l$  с внутренним и внешним радиусами основания  $r_1$  и  $r_2$  ( $l \gg r_2$ ). С учетом известных кинематических гипотез вектор скорости  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$  в актуальной конфигурации  $\Omega_t$ , записанный в естественной цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , имеет вид

$$v_1 = v(R(r, t)), \quad v_2 = \dot{\Phi}(t)zR(r, t), \quad v_3 = \dot{L}(t), \quad (2.1)$$

где  $R(r, t)$  и  $L(t)$  — актуальные значения радиальной координаты и длины рабочей части образца соответственно,  $\Phi(t) = \Phi(t)/l$  — угол закручивания образца на единицу длины рабочей части, а точкой обозначена производная по времени.

Материал образца предполагается несжимаемым:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial v_1 / \partial R + v_1 / R + \dot{L} / L = 0.$$

Из условия несжимаемости получаем соотношение для  $R(r, t)$  с точностью до подлежащей определению функции  $C(t)$ :

$$R(r, t) = \left( \frac{L(t)}{l} \right)^{-1/2} r \left( 1 + \frac{C(t)}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

При этом ненулевые компоненты тензора скоростей деформаций  $\mathbf{v}$  в актуальной конфигурации представляются в виде:

$$\begin{aligned} v_{11} &= -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} - \exp(-\varepsilon) \frac{\dot{C}}{2R^2} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} - \exp(-\varepsilon) \left( \frac{R_2}{R} \right)^2 \left( \dot{\chi} + \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \right), \\ v_{22} &= -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} + \exp(-\varepsilon) \frac{\dot{C}}{2R^2} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} + \exp(-\varepsilon) \left( \frac{R_2}{R} \right)^2 \left( \dot{\chi} + \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \right), \\ v_{23} &= \frac{1}{2} R \exp(-\varepsilon) \dot{\Phi}, \quad v_{33} = \dot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\dot{\varepsilon} = \dot{L}/L$ ,  $\dot{\gamma} = v_{23}(R_2)$ ,  $\dot{\chi} = v_{22}(R_2) = \dot{R}_2/R_2$ ,  $R_2 = R(r_2, t)$ .

Величины  $\varepsilon(t)$ ,  $\gamma(t)$  и  $\chi(t)$  считаются независимыми кинематическими параметрами нагружения и представляют собой компоненты объективной неголономной тензорной меры деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  из известного представительного класса энергетически сопряженных пар инвариантных тензорных пар мер деформаций и напряжений коротационного типа  $(\boldsymbol{\varepsilon}^R, \boldsymbol{\sigma}^R)$ , определяемых соотношениями:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^R(t) &= \int_0^t \mathbf{R}(\tau)^T \cdot \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{R}(\tau) d\tau, \\ \boldsymbol{\sigma}^R(t) &= \mathbf{R}(t)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^c(t) \cdot \mathbf{R}(t),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{R}$  — ортогональный тензор 2-го ранга, характеризующий частную модель коротационного представления движения из начальной конфигурации  $\Omega_0$  частицы среды в актуальную  $\Omega_t$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^c$  — тензор напряжений Коши,  $()^T$  — знак транспонирования. Этот класс тензорных мер широко применяется в определяющих соотношениях, записанных в инкрементальной форме, и его свойства детально изучены [7–9]. В частности, ими наследуется базовое свойство родительских величин о возможности механически обоснованного разделения тензоров на шаровую и девиаторные части с сохранением физического смысла основных инвариантов. В представляемой методике используется коротационная модель, где тензор  $\mathbf{R}$  определяется поворотом поперечных сечений образца (или, согласно [10], поворотом сопровождающего естественный лагранжев базис ортонормированного репера Ильюшина) в соответствии с принятой кинематической схемой, характеризуемый матрицей с компонентами:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Phi(t)z) & -\sin(\Phi(t)z) & 0 \\ \sin(\Phi(t)z) & \cos(\Phi(t)z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следствием выбранной коротационной модели являются связи:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t) &= \int_0^t v_{ij}(\tau) d\tau, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^c,\end{aligned}$$

где в левой части цилиндрические компоненты тензоров относительно начальной конфигурации, а в правой — относительно актуальной.

Интегрируя соотношения (2.3) с учетом (2.2), получаем соотношения для ненулевых компонент тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 (\exp(2\chi + \varepsilon) - 1) \right], \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 (\exp(2\chi + \varepsilon) - 1) \right],\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} r \int_0^t \exp\left(-\frac{3}{2}\varepsilon\right) \left[ 1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 (\exp(2\chi + \varepsilon) - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \Phi d\tau, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon.$$

Таким образом, процесс деформации  $\Pi(r, \tau)|_0^t$  в любой точке образца, в том числе и регистрируемый граничный процесс  $\Pi(r_2, \tau)|_0^t = \langle \varepsilon(\tau), \gamma(\tau), \chi(\tau) \rangle|_0^t$ , однозначно определяет весь пучок реализуемых в образце процессов деформаций. Очевидным следствием (2.4) является, что  $tr(\varepsilon) = 0$ , или, что тензор деформаций  $\varepsilon$  является девиатором.

Ненулевые компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}(r, t)$  удовлетворяют уравнению равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial R} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{R} = 0, \quad (2.5)$$

граничным условиям

$$\sigma_{11}|_{R=R_1} = -q_1, \quad \sigma_{11}|_{R=R_2} = -q_2 \quad (2.6)$$

и двум интегральным уравнениям, включающим величины регистрируемых в эксперименте силовых параметров  $P$ ,  $M$  и  $q_i$ :

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{33} R dR = P + \pi q_1 R_1^2 - \pi q_2 R_2^2, \quad (2.7)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{23} R^2 dR = M, \quad (2.8)$$

где слагаемые в (2.7), содержащие  $q_i$ , представляют дополнительное осевое усилие, вызванное внутренним давлением  $q_1$  на заглушки образца и внешним гидростатическим давлением  $q_2$ .

Определяющие соотношения принимаются в виде произвольной функциональной зависимости между девиаторами тензоров напряжений и деформаций:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{F}\{\varepsilon(\tau)\}|_0^t, \quad \tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3} tr \sigma \mathbf{I}. \quad (2.9)$$

Силовые и кинематические параметры нагружения  $P(t)$ ,  $M(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\chi(t)$  не являются независимыми. Рассмотрим энергетическое тождество

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{ij} v_{ij} R dR = \bar{P} \dot{\varepsilon} + \bar{M} \dot{\gamma} + \bar{q} \dot{\chi}, \quad (2.10)$$

$$q = -q_2 + q_1, \quad \bar{q} = \pi R_2^2 q, \quad \bar{P} = P + \bar{q}, \quad \bar{M} = \frac{M}{R_2},$$

связывающего удельные (на единицу длины) мощности внутренних и внешних сил, действующих на образец, и устанавливаемое по аналогии с [5] и с использованием соотношений, следующих из (2.4)–(2.8):

$$\begin{aligned}
q &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{R} dR, \quad \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{11} v_{11} + \sigma_{22} v_{22}) R dR = \\
&= - \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) R dR - \left( \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} + \dot{\chi} \right) R_2^2 q, \\
\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) R dR &= -q_2 R_2^2 + q_1 R_1^2.
\end{aligned}$$

С учетом справедливости тождественности сверток  $\sigma_{ij} v_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} v_{ij}$  и определяющего соотношения (2.9), левая часть тождества (2.10), а значит и правая его часть, является функционалом регистрируемого граничного процесса  $\Pi(\underline{r}_2, \tau) \big|_0^t = \langle \varepsilon(\tau), \gamma(\tau), \chi(\tau) \rangle \big|_0^t$ , а значит таковыми являются и обобщенные силы  $P(t)$ ,  $M(t)$ ,  $\bar{q}(t)$ , соответствующие скоростям обобщенных перемещений  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\chi$ , а также однозначно связанные с ними регистрируемые величины  $P(t)$ ,  $M(t)$ ,  $q(t)$ . Последние представляют собой тройку независимых силовых параметров нагружения, характеризующих реакцию материала на процесс деформаций  $\Pi(\underline{r}_2, \tau) \big|_0^t$ . Предполагается, что функциональная связь между кинематическими и силовыми параметрами может быть разрешима относительно любой из 8 независимых троек  $(\varepsilon, \gamma, \chi)$ ,  $(\varepsilon, M, \chi)$ ,  $(\varepsilon, \gamma, q)$ ,  $(\varepsilon, M, q)$ ,  $(P, \gamma, \chi)$ ,  $(P, M, \chi)$ ,  $(P, \gamma, q)$ ,  $(P, M, q)$ , каждая из которых однозначно определяет процесс изменения девиатора тензора напряжений в любой точке образца. В последующем изложении, независимо от того по какой схеме реализуется реальный физический эксперимент, кинематической, силовой или смешанной, всегда будет предполагаться использование эквивалентной кинематической схемы нагружения. Также, поскольку в зависимость между кинематическими и силовыми параметрами давления  $q_i$  входят в виде их разности, то далее, без ограничения общности, величину внутреннего давления  $q_1$  будем считать фиксированной.

Обратимся к методике расшифровки результатов  $(P, M, q_i)$  – нагружения толстостенного или сплошного (при  $q_1 = 0$ ) образца. Методы условной трубки и вырожденной условной трубки основываются на возможности при согласованном изменении управляющих параметров в двух экспериментах реализовать в образцах один и тот же пучок процессов деформаций за исключением областей малой толщины, прилегающих к поверхностям образцов.

По аналогии с [5] будем использовать понятие энергетической эквивалентности (или равномошности) образцов  $(\alpha) \sim (\beta)$  в двух экспериментах  $\alpha$  и  $\beta$ . Образцы  $(\alpha)$  и  $(\beta)$  с внутренними и внешними радиусами  $r_1^\alpha, r_2^\alpha$  и  $r_1^\beta, r_2^\beta$  соответственно считаются равномошными при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{aligned}
\Pi^\alpha(r_2^\alpha, \tau) \big|_0^t &= \Pi^\beta(r_2^\beta, \tau) \big|_0^t, \\
m^\alpha &= r_2^\alpha / r_1^\alpha = r_2^\beta / r_1^\beta = m^\beta,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

т.е. при условии тождественности граничных процессов деформаций и равенства относительных толщин трубок.

Установим следствия равномошности образцов  $(\alpha)$  и  $(\beta)$ :

1. Геометрическое подобие (радиусы пропорциональны):

$$r_1^\alpha / r_1^\beta = r_2^\alpha / r_2^\beta = k. \quad (2.12)$$

2. Физическое подобие (в обоих образцах реализуется один тот же пучок процессов деформаций):

$$\Pi^\beta(r^\beta, \tau) \big|_0^t = \Pi^\alpha(r^\alpha, \tau) \big|_0^t, \quad r^\alpha = r^\beta k, \quad \Phi^\alpha = \frac{1}{k} \Phi^\beta. \quad (2.13)$$

3. Справедливость равенств:

$$\begin{aligned} \bar{P}^\alpha / S^\alpha &= \bar{P}^\beta / S^\beta, \quad M^\alpha / S^\alpha = M^\beta / S^\beta, \quad q^\alpha = q^\beta, \\ \frac{\bar{P}^\alpha}{\bar{P}^\beta} &= k^2, \quad \frac{M^\alpha}{M^\beta} = k^3, \quad S = \pi(R_2^2 - R_1^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Переходя в выражениях для  $P$  и  $M$  к переменным  $r$  относительно начальной конфигурации посредством зависимости

$$R(r) = r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 (\exp(2\chi + \varepsilon) - 1)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

следующей из (2.2) и (2.4), и учитывая, что  $R_2^2 - R_1^2 = \exp(-\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2)$  и  $RdR = \exp(-\varepsilon)rdr$ , получаем:

$$\begin{aligned} \bar{P}/S &= \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{33}(R) + q_1) RdR = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{33}(r) + q_1) r dr, \\ M/S &= \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{23}(R) R^2 dR = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{23}(r) R(r) r dr \end{aligned}$$

откуда равенства (2.14) следуют ввиду физического подобия образцов (2.13).

4. Тожественность удельных объемных мощностей внутренних сил:

$$\frac{W^\alpha}{V^\alpha} = \frac{W^\beta}{V^\beta}, \quad W = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{ij} v_{ij} R dR, \quad V = LS.$$

5. Равномощность любых сплошных образцов, нагружаемых по идентичной программе.

### 3. Идентификация НДС в образцах для различных типов испытаний.

3.1.  $(P, M, q_1, q_2)$  нагружение трубчатых образцов ( $m^\beta/m_1^\alpha = 1 + h$ ,  $0 < h \ll 1$ ).

Пусть трубчатый образец ( $\alpha$ ) относительной толщины  $m^\alpha = r_2^\alpha/r_1^\alpha$  нагружается по кинематической программе  $\Pi^\alpha(r_2^\alpha, \tau) \big|_0^t \equiv \{\varepsilon(\tau), \gamma^\alpha(\tau), \chi^\alpha(\tau)\} \big|_0^t$  под действием регистрируемых в эксперименте силовых характеристик  $P^\alpha, M^\alpha, q_1, q_2^\alpha$ . При этом, как было показано выше, процессы деформаций и напряжений, задаваемыми девиаторами соответствующих тензоров, однозначно определяются тройкой независимых силовых параметров  $P, M, \bar{q}$  в соответствии с (2.10). При этом давления  $q_i$  включены в соотношения в виде разности  $q = -q_2 + q_1$ . Ниже, без ограничения общности, будем считать величину внутреннего давления  $q_1$  фиксированной во всех рассматриваемых случаях.

Пусть теперь образец ( $\beta$ ) такой, что  $m^\beta/m_1^\alpha = 1 + h$ ,  $0 < h \ll 1$ , так что

$$r_1^\beta = \frac{1}{k} r_1^\alpha, \quad r_2^\beta = \frac{1}{k} r_2^\alpha (1 + h). \quad (3.1)$$

Построим управление экспериментом с образцом ( $\beta$ ), обеспечивающее тождественность процесса деформаций  $\Pi^\beta(r_2^{\beta'}) \equiv \Pi^\beta(r_2^\beta, \tau)|_0^t$  в близкой к границе точке  $r_2^{\beta'} = (1/k)r_2^\alpha$  образца ( $\beta$ ) граничному процессу деформаций  $\Pi^\alpha(r_2^\alpha) \equiv \Pi^\alpha(r_2^\alpha, \tau)|_0^t$  в образце ( $\alpha$ ), которое сводится к уравнениям, следующим из (2.4) и (3.1):

$$\begin{aligned} \chi^\alpha &= -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + (1 + h)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1) \right], \\ \gamma^\alpha &= \frac{1}{2} r'^\beta \int_0^t \exp(-\frac{3}{2}\varepsilon) \left[ 1 + (1 + h)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \Phi^\beta d\tau. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем связь между окружными деформациями

$$\chi^\beta = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{1}{1 + h} \right)^2 (\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - 1) \right]. \quad (3.2)$$

Переписывая второе уравнение в дифференциальной форме, получаем после преобразований с учетом (3.2):

$$\dot{\gamma}^\beta = \left[ \frac{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) + 2h + h^2}{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} \dot{\gamma}^\alpha. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.2) и (3.3) задают требуемую программу эксперимента с образцом ( $\beta$ ).

Управление (3.3) может быть также переписано в терминах удельной крутки  $\Phi(t)$ :

$$\dot{\Phi}^\beta = k \left[ \frac{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) + 2h + h^2}{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} \dot{\Phi}^\alpha.$$

В соответствии с (2.11) при нагружении по программе (3.2), (3.3), внутри образца ( $\beta$ ) образуется виртуальный образец ( $\beta'$ ) с  $r_1^{\beta'} = (1/k)r_1^\alpha$  и  $r_2^{\beta'} = (1/k)r_2^\alpha$ , равномошный образцу ( $\beta$ ) и нагружаемый по программе  $\Pi^\alpha(r_2^{\beta'})$ . Переходя в выражениях для обобщенных силы  $\bar{P}$  и момента  $M$  к лагранжевым координатам посредством (2.15) и представляя их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}^\beta \exp(\varepsilon)}{2\pi} &= \int_{r_1^\beta}^{r_2^\beta} (\sigma_{33}^\beta(r) + q_1) r dr = \int_{r_1^{\beta'}}^{r_2^{\beta'}} (\sigma_{33}^\beta(r) + q_1) r dr + \int_{r_2^{\beta'}}^{r_2^\beta} (\sigma_{33}^\beta(r) + q_1) r dr, \\ \frac{M^\beta \exp(\varepsilon)}{2\pi} &= \int_{r_1^\beta}^{r_2^\beta} \sigma_{23}^\beta(r) R^\beta(r) r dr = \int_{r_1^{\beta'}}^{r_2^{\beta'}} \sigma_{23}^\beta(r) R^\beta(r) r dr + \int_{r_2^{\beta'}}^{r_2^\beta} \sigma_{23}^\beta(r) R^\beta(r) r dr, \end{aligned}$$

получаем в силу равномошности образцов ( $\alpha$ ) и ( $\beta'$ ) с учетом следствий (2.12)–(2.14):

$$\bar{P}^\beta = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \bar{P}^\alpha + 2\pi \exp(-\varepsilon) \int_{r_2^\beta}^{r_2^\beta} (\sigma_{33}^\beta(r) + q_1) r dr,$$

$$M^\beta = \left(\frac{1}{k}\right)^3 M^\alpha + 2\pi \exp(-\frac{3}{2}\varepsilon) \int_{r_2^\beta}^{r_2^\beta} \sigma_{23}^\beta(r) \left[ 1 + \left(\frac{r_2^\beta}{r}\right)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1) \right]^{1/2} r^2 dr$$

или с точностью до  $h^2$ :

$$\bar{P}^\beta - \left(\frac{1}{k}\right)^2 \bar{P}^\alpha = 2\pi \left(\frac{r_2^\alpha}{k}\right)^2 h \exp(-\varepsilon) [\sigma_{33}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha)) + q_1],$$

$$M^\beta - \left(\frac{1}{k}\right)^3 M^\alpha = 2\pi \left(\frac{r_2^\alpha}{k}\right)^3 h \exp(\chi^\alpha - \varepsilon) \sigma_{23}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha)).$$
(3.4)

Регистрируемое в эксперименте с образцом ( $\beta$ ) приращение давления  $\Delta q = q^\beta - q^\alpha$ , требуемое для реализации кинематической программы (3.2), (3.3), входит в уравнение:

$$\Delta q = - \int_{R_2^\beta}^{R_2^\beta} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{R} dR = - \int_{r_2^\beta}^{r_2^\beta} \frac{(\sigma_{11}^\beta(r) - \sigma_{22}^\beta(r))}{r} \left[ 1 + \left(\frac{r_2^\beta}{r}\right)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1) \right]^{-1} dr$$

или с точностью до  $h^2$ :

$$\Delta q = \frac{\sigma_{22}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha)) - \sigma_{11}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha))}{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon)} h.$$

В итоге получаем с точностью до  $h$  конечные соотношения для компонент тензора напряжений  $\sigma(t)$  как функции граничного процесса деформаций  $\Pi^\alpha(r_2^\alpha, \tau)|_0^t$  и регистрируемых силовых параметров:

$$\sigma_{11} = -q_2^\alpha \approx -q_2^\beta,$$

$$\sigma_{22} = \Delta q \left( \frac{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon)}{h} \right) - q_2^\alpha,$$

$$\sigma_{33} = \frac{k^2 \bar{P}^\beta - \bar{P}^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} \exp(\varepsilon) - q_1 = \frac{k^2 P^\beta - P^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} \exp(\varepsilon) + \frac{\Delta q}{2h} \exp(2\chi^\alpha) - q_2^\alpha,$$

$$\sigma_{23} = \frac{k^3 M^\beta - M^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^3 h} \exp(\varepsilon - \chi^\alpha).$$
(3.5)

В приближении малых деформаций выражения (3.5) переходят в известные соотношения для условной трубки [5]:

$$\sigma_{11} = -q_2^\alpha \approx -q_2^\beta,$$

$$\sigma_{22} = \frac{\Delta q}{h} - q_2^\alpha,$$



$$\sigma_{33} = \frac{k^2 \bar{P}^\beta - \bar{P}^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} - q_1 = \frac{k^2 P^\beta - P^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} + \frac{\Delta q}{2h} - q_2^\alpha,$$

$$\sigma_{23} = \frac{k^3 M^\beta - M^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^3 h}.$$

Приведем также альтернативное представление соотношений (3.5) в терминах условных напряжений  $\Sigma_P \equiv \frac{P}{2\pi(r_2)^2}$ ,  $\Sigma_M \equiv \frac{M}{2\pi(r_2)^3}$

$$\sigma_{33} = \left( \frac{\Delta \Sigma_P}{h} + 2\Sigma_P^\alpha \right) \exp(\varepsilon) + \frac{\Delta q}{2h} \exp(2\chi^\alpha) - q_2^\alpha,$$

$$\sigma_{23} = \left( \frac{\Delta \Sigma_M}{h} + 3\Sigma_M^\alpha \right) \exp(\varepsilon - \chi^\alpha),$$

где  $\Delta \Sigma_P \equiv \Sigma_P^\beta - \Sigma_P^\alpha$ ,  $\Delta \Sigma_M \equiv \Sigma_M^\beta - \Sigma_M^\alpha$ .

3.2.  $(P, M, q_1, q_2)$  *нагружение трубчатых образцов* ( $m^\beta/m_1^\alpha = 1 + h$ ,  $0 < h \ll 1$ ).

В качестве прямого следствия (3.5) получим соответствующие соотношения для случаев нагружения толстостенных трубчатых образцов осевой силой  $P$  и моментом  $M$  при равенстве внутреннего  $q_1$  и внешнего  $q_2$  давлений таких, что  $(m^\beta/m_1^\alpha = 1 + h$ ,  $0 < h \ll 1$ ).

При таких нагрузках в образцах реализуются однородные поля радиальных и окружных деформаций, причем  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \chi = -\varepsilon/2$ . В этом случае  $P \equiv \bar{P}$  и формулы (3.3), (3.5), приобретают следующий вид:

$$\gamma^\beta = (1 + h)\gamma^\alpha, \quad (\Phi^\beta = k(1 + h)\Phi^\alpha),$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q_2,$$

$$\sigma_{33} = \frac{k^2 P^\beta - P^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} \exp(\varepsilon) - q_2 = \left( \frac{\Delta \Sigma_P}{h} + 2\Sigma_P^\alpha \right) \exp(\varepsilon) - q_2, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{23} = \frac{k^3 M^\beta - M^\alpha}{2\pi(r_2^\alpha)^3 h} \exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right) = \left( \frac{\Delta \Sigma_M}{h} + 3\Sigma_M^\alpha \right) \exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right).$$

3.3.  $(P, M, q_2)$  *нагружение сплошных образцов*. Рассмотрим нагружение сплошных образцов ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ) под действием осевой силы  $P$ , момента  $M$  и внешнего давления  $q_2$ . Соотношения (3.6) остаются справедливыми и для этого случая, полагая  $k = [r_2^\alpha(1 + h)]/r_2^\beta$ :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q_2,$$

$$\sigma_{33} = \frac{P^\beta - P^\alpha + 2P^\alpha h}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} \exp(\varepsilon) - q_2 = \left( \frac{\Delta \Sigma_P}{h} + 2\Sigma_P^\alpha \right) \exp(\varepsilon) - q_2, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{23} = \frac{M^\beta - M^\alpha + 3M^\alpha h}{2\pi(r_2^\alpha)^3 h} \exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right) = \left( \frac{\Delta \Sigma_M}{h} + 3\Sigma_M^\alpha \right) \exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right).$$

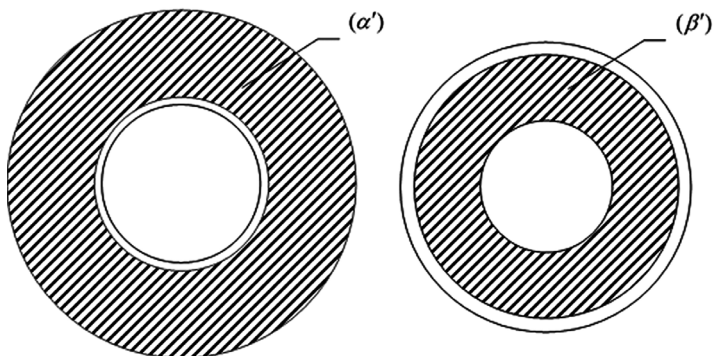


Рис. 1. Схематическое изображение образцов (α) и (β). Штриховкой отмечены внутренние виртуальные равномошные образцы (α') и (β').

3.4.  $(P, M, q_1, q_2)$  нагружение трубчатых образцов ( $m^\beta/m_1^\alpha = 1$ ,  $0 < h \ll 1$ ).

Отдельно следует рассмотреть нагружение геометрически подобных трубчатых образцов, когда  $m^\beta/m_1^\alpha = 1$ . Соответствующий этой ситуации вариант методики, следуя [1], называется вырожденной условной трубкой.

В рассматриваемом случае при задании управления (3.2), (3.3) внутри образца (β) образуется виртуальный образец (β') с  $r_1^{\beta'} = r_1^\beta$  и  $r_1^{\beta'} = r_1^\beta/(1+h)$ , геометрически подобный виртуальному образцу (α') внутри образца (α) с коэффициентом подобия  $k' = k(1+h)$ , такой что  $r_1^{\alpha'} = r_1^\alpha/(1+h)$  и  $r_2^{\alpha'} = r_2^\alpha$  (рис. 1).

Приращение разности давлений  $\Delta q$ , требуемое для обеспечения заданной кинематической программы, определяется из равенств:

$$\Delta q + q = - \int_{r_2^\beta}^{r_2^\alpha} \frac{(\sigma_{11}^\beta(r) - \sigma_{22}^\beta(r))}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r_2^\beta}{r} \right)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1) \right]^{-1} dr,$$

$$q = - \int_{r_1^\alpha}^{r_1^{\alpha'}} \frac{(\sigma_{11}^\alpha(r) - \sigma_{22}^\alpha(r))}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r_2^\alpha}{r} \right)^2 (\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - 1) \right]^{-1} dr,$$

где  $q'$  — разность граничных давлений в образцах (α') и (β'). Откуда с точностью до  $h$

$$\frac{\Delta q}{h} = \frac{\sigma_{22}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha)) - \sigma_{11}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha))}{\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon)} -$$

$$- \left[ \sigma_{22}(\Pi^\alpha(r_1^\alpha)) - \sigma_{11}(\Pi^\alpha(r_1^\alpha)) \right] \left[ 1 + \left( \frac{r_2^\alpha}{r_1^\alpha} \right)^2 (\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - 1) \right]^{-1}.$$

Далее с учетом следствия (2.14) получаем:

$$\bar{P}^\beta = \frac{1}{k^2} (1+h)^{-2} \bar{P}^{\alpha'} + 2\pi \exp(-\varepsilon) \int_{r_2^{\beta'}}^{r_2^\beta} (\sigma_{33}^\beta(r) + q_1) r dr,$$

$$\bar{P}^\alpha = \bar{P}^{\alpha'} + 2\pi \exp(-\varepsilon) \int_{r_1^\alpha}^{r_1^{\alpha'}} (\sigma_{33}^\alpha(r) + q_1) r dr,$$

$$M^\beta = \left(\frac{1}{k}\right)^3 (1+h)^{-3} M^{\alpha'} + 2\pi \exp\left(-\frac{3}{2}\varepsilon\right) \int_{r_2^\beta}^{r_2^\beta} \sigma_{23}^\beta(r) \left[1 + \left(\frac{r_2^\beta}{r}\right)^2 (\exp(2\chi^\beta + \varepsilon) - 1)\right]^{\frac{1}{2}} r^2 dr,$$

$$M^\alpha = M^{\alpha'} + 2\pi \exp\left(-\frac{3}{2}\varepsilon\right) \int_{r_1^\alpha}^{r_1^{\alpha'}} \sigma_{23}^\alpha(r) \left[1 + \left(\frac{r_2^\alpha}{r}\right)^2 (\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - 1)\right]^{\frac{1}{2}} r^2 dr$$

или с точностью до  $h^2$ :

$$\begin{aligned} & \left(\bar{P}^\beta - \frac{1}{k^2} \bar{P}^\alpha + \frac{2}{k^2} \bar{P}^\alpha h\right) = \\ & = 2\pi (r_2^\alpha)^2 h \exp(-\varepsilon) \left[ \frac{1}{k^2} \sigma_{33}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha) - \sigma_{33}(\Pi^\alpha(r_1^\alpha)) \left(\frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2 + q_1 \left(\frac{1}{k^2} - \left(\frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2\right) \right], \\ & M^\beta - \frac{1}{k^3} M^\alpha + \frac{3}{k^3} M^\alpha h = \\ & = 2\pi (r_2^\alpha)^3 h \exp(\chi^\alpha - \varepsilon) \left[ \frac{1}{k^3} \sigma_{23}(\Pi^\alpha(r_2^\alpha) - \sigma_{23}(\Pi^\alpha(r_1^\alpha)) \left(\frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Переходя от параметров  $\bar{P}$  к регистрируемым величинам  $P$ , получим после преобразований с точностью до  $h$  соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений на внешнем и внутреннем радиусах образца ( $\alpha$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(r_2^\alpha) &= k^2 \left(\frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2 \sigma_{33}(r_1^\alpha) + \frac{k^2 P^\beta - P^\alpha + 2P^\alpha h}{2\pi (r_2^\alpha)^2 h} \exp(\varepsilon) + \\ &+ \frac{\Delta q}{2h} \exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - q_2 + q_1 \left(k \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2, \\ \sigma_{23}(r_2^\alpha) &= k^3 \left(\frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha}\right)^2 \sigma_{23}(r_1^\alpha) + \frac{k^3 M^\beta - M^\alpha + 3M^\alpha h}{2\pi (r_2^\alpha)^3 h} \exp(\varepsilon - \chi^\alpha), \\ \sigma_{22}(r_2^\alpha) &= -q_2 + (\sigma_{22}(r_1^\alpha) + q_1) \exp(2\chi^\alpha + \\ &+ \varepsilon) \left[1 + \left(\frac{r_2^\alpha}{r_1^\alpha}\right)^2 (\exp(2\chi^\alpha + \varepsilon) - 1)\right]^{-1} + \frac{\Delta q}{h} \exp(2\chi^\alpha + \varepsilon), \\ \sigma_{11}(r_2^\alpha) &= -q_2, \quad \sigma_{11}(r_1^\alpha) = -q_1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

В приближении малых деформаций эти формулы существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}(r_2^\alpha) &= k^2 \left( \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha} \right)^2 \sigma_{33}(r_1^\alpha) + \frac{k^2 P^\beta - P^\alpha + 2P^\alpha h}{2\pi(r_2^\alpha)^2 h} + \frac{\Delta q}{2h} - q_2 + q_1 \left( k \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha} \right)^2, \\ \sigma_{23}(r_2^\alpha) &= k^3 \left( \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha} \right)^2 \sigma_{23}(r_1^\alpha) + \frac{k^3 M^\beta - M^\alpha + 3M^\alpha h}{2\pi(r_2^\alpha)^3 h}, \\ \sigma_{22}(r_2^\alpha) &= \sigma_{22}(r_1^\alpha) + \frac{\Delta q}{h} + q, \\ \sigma_{11}(r_2^\alpha) &= -q_2, \quad \sigma_{11}(r_1^\alpha) = -q_1.\end{aligned}$$

В предельном случае сплошных образцов ( $r_1=0$ ,  $q=0$ ) соотношения (3.8) переходят в полученные ранее зависимости (3.7).

В этом варианте, в отличие от рассмотренных выше представлений условной трубки, конечные соотношения методики задают связь между граничными значениями компонент тензора напряжений, а не определяют их непосредственно. Описанная экспериментальная схема может быть полезной в ряде случаев, когда тензор напряжений на одной из границ образца может быть определен в силу дополнительных допущений. Примером может служить задача об идентификации критерия потери несущей способности трубчатого образца в условиях трехосного простого нагружения (по прямолинейным траекториям деформаций) в предположениях о склерономности материала и наличия единой кривой деформирования (функциональной связи между интенсивностями девиаторов тензоров напряжений и деформаций). При этом идентификационная процедура представляет собой итерационный процесс построения кривой деформирования путем последовательного пересчета напряжений с границы с меньшим уровнем деформаций на другую, на начальном шаге которого используется известное упругое решение.

**4. Заключение.** В работе дано теоретическое обоснование методу условной трубки (и вырожденной условной трубки) для идентификации неоднородного напряженно-деформированного состояния в толстостенных трубчатых и сплошных образцах, нагружаемых осевой силой, крутящим моментом, внешним (а для трубок – и внутренним) давлением, с учетом конечных деформаций. Для описания конечных деформаций используется специальная пара энергетически сопряженных инвариантных тензоров напряжений и деформаций из представительного класса тензорных мер коротационного типа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
2. *Зубачинов В.Г.* Экспериментальная пластичность: в 2 кн. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: Твер. гос. техн. ун-т, 2003. 170 с.
3. Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях / Под ред. В.Э. Вильдемана. М.: Физматлит, 2012. 203 с.
4. *Васин Р.А.* Экспериментальное исследование неупругого поведения материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2016. № 5. С. 30–34.  
<http://doi.org/10.15372/PMTF20160504>

5. Васин Р.А., Ильюшин А.А., Моссаковский П.А. Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых образцах // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 177–184.
6. Муравлев А.В. Экспериментальные методики исследования механических свойств термовязкопластических материалов при сложном нагружении и конечных деформациях // Упругость и неупругость: материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А.А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 216–220.
7. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюзн. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1987. С. 32–37.
8. Моссаковский П.А. Расширенные постулаты теории упругопластических процессов и их следствия // Сборник Упругость и неупругость. Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел. Москва. 22–23 янв. 2001 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2001. С. 219–223.
9. Brovko G.L. Objective tensors and their mappings in classical continuum mechanics // *Mechanics of Solids*. 2021. V. 56. № 1. P. 65–83.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654421010040>
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

## **TRIAXIAL LOADING OF THICK-WALLED TUBULAR AND SOLID SAMPLES UNDER FINITE DEFORMATIONS. THEORY OF THE EXPERIMENT**

**P. A. Mossakovskii <sup>a, \*</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*E-mail: pavel\_mossakovsky@mail.ru*

**Abstract** — The work is devoted to the theoretical study of the problem of identifying an inhomogeneous stress-strain state (SSS) in thick-walled tubular and solid samples loaded with axial force, torque, external (and for tubes — and internal) pressure. Unlike standard tests with thin-walled tubes, in this case it is possible to achieve significantly higher values of deformations before the loss of bearing capacity of the samples. A well-known approach to solving this problem is the conditional tube method, which requires two coordinated experiments on similar loading programs to identify the SSS. The paper provides a theoretical justification for the conditional tube (and degenerate conditional tube) method, taking into account the finite deformations in the sample.

**Keywords:** theory of experiment, triaxial loading, conditional tube method, finite strain, corotational tensor measures, constitutive equations

## REFERENCES

1. *Nadai A.* Plasticity and destruction of solids. V.1. M.: IL, 1954. 648 p.
2. *Zubchaninov V.G.* Experimental plasticity: In 2 books. Book 1. Processes of complex deformation / V.G. Zubchaninov, N.L. Okhlopkov, V.V. Garanikov. Tver: Tver State Technical University UN-t, 2003.
3. Experimental studies of the properties of materials under complex thermomechanical influences / Ed. by V.E. Wildeman. M.: Fizmatlit, 2012.
4. *Vasin R.A.* Experimental investigation of inelastic behavior of materials // Applied mechanics and technical physics. 2016. № 5. P. 29–33.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20160504>
5. *Vasin R.A., Ilyushin A.A., Mossakovsky P.A.* Investigation of determining ratios and fracture criteria on solid and thick-walled tubular samples // Izv. RAS. Solid state mechanics. 1994. № 2. P. 177–184.
6. *Muravlev A.V.* Experimental methods for studying the mechanical properties of thermoviscoplastic materials under complex loading and finite deformations // Elasticity and inelasticity: Materials of International Scientific Research. simp. on the problems of mechanics of deformable bodies, dedicated to the 100th anniversary of the birth of A.A. Ilyushin, Moscow, January 20–21, 2011. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2011. P. 216–220.
7. *Markin A.A., Tolokonnikov L.A.* Measures and determining ratios of finite elastoplastic deformation // Applied problems of strength and plasticity. Methods of solution: All-Union mezhvuz. sb. Gorky: Publishing House of Gorky State University, 1987. P. 32–37.
8. *Mossakovsky P. A.* Expanded postulates of the theory of elastoplastic processes and their consequences // Elasticity and inelasticity: Materials of International Scientific Research. simp. on the problems of mechanics of deformable bodies, Moscow, January 22–23, 2001, Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2001. P. 219–223.
9. *Brovko G.L.* Objective tensors and their mappings in classical continuum mechanics // Mechanics of Solids. 2021. V. 56. № 1. P. 65–83.
10. *Ilyushin A.A.* Mechanics of a continuous medium. 3rd ed. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1990. 310 p.