ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2025, № 1, с. 75–101

УДК 531.36

РЕГУЛЯРНЫЕ КВАТЕРНИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ В *KS*-ПЕРЕМЕННЫХ И В ИХ МОДИФИКАЦИЯХ. ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ

© 2025 г. Ю. Н. Челноков[a], *

[a]*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**E-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 04.06.2024 г.
После доработки 05.08.2024 г.
Принята к публикации 06.08.2024 г.

Рассмотрены регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения космического тела (в частности, космического аппарата, астероида) в гравитационном поле Земли, в которых учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники поля. Эти уравнения, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для возмущенного орбитального движения в центральном гравитационном поле Земли. В этих уравнениях основными переменными являются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные) или четырехмерные переменные, предложенные автором статьи, в которых уравнения орбитального движения имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в *KS*-переменных. Дополнительными переменными в уравнениях являются энергия орбитального движения и время. Новая независимая переменная связана со временем дифференциальным соотношением, содержащим расстояние от космического тела до центра масс Земли (использовано дифференциальное преобразование времени Зундмана). Предложены регулярные уравнения возмущенного орбитального движения в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных. Уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов, в частности, для прогноза и коррекции орбитального движения космических аппаратов. В случае орбитального движения в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются центральная и зональные гармоники поля, приведены первые интегралы уравнений орбитального движения, имеющих восьмой порядок; рассмотрены замены переменных и преобразования этих уравнений, которые позволили получить для изучения орбитального движения замкнутые системы дифференциальных уравнений шестого порядка, а также системы дифференциальных уравнений четвертого и третьего порядков, в том числе систему дифференциальных уравнений третьего порядка относительно расстояния от космического тела до центра масс Земли и синуса геоцентрической широты, а также систему двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка относительно этих двух переменных.

Ключевые слова: регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения, гравитационное поле Земли, сингулярность (особенность), переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные), модифицированные четырехмерные переменные, энергия орбитального движения, преобразование времени Зундмана, кватернионные оскулирующие (медленно изменяющиеся) переменные, первые интегралы уравнений, расстояние до центра масс Земли, широта, долгота

DOI: 10.31857/S1026351925010046, **EDN:** TANAGW

1. Введение. Ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах, лежащие в основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета), неудобны для изучения движения второго (изучаемого) тела вблизи центрального тела, так как они вырождаются (становятся непригодными) при соударении второго тела с первым (центральным) телом, когда расстояние между телами становится равным нулю. Они также неудобны для изучения орбитального движения по высокоэллиптическим орбитам. Особенность (сингулярность) в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и вычислительные трудности. Устранение указанной особенности классических уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемой силами гравитации, называется регуляризацией (термин введен Леви-Чивита, 1920). Уравнения небесной механики и астродинамики, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

В настоящее время широкое распространение получили кватернионные методы регуляризации и регулярные кватернионные модели небесной механики и астродинамики, имеющие ряд преимуществ аналитического и вычислительного характеров перед другими методами и моделями. Они основаны на использовании для описания орбитального движения кватернионов Гамильтона – гиперкомплексных переменных, компонентами которых являются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля, называемые также *KS*-переменными.

Эйлер (Euler, 1765) [1] и Леви-Чивита (Levi-Civita, 1920) [2–4] дали решения одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Кустаанхеймо и Штифель (Kustaanheimo, Stiefel, 1964–1965) [5, 6] предложили наиболее эффективную регуляризацию уравнений возмущенной пространственной (трехмерной) задачи двух тел. Кустаанхеймо дал обобщение теории Леви-Чивита, используя достоинства методов теории спиноров. Для регуляризации им вместо одной комплексной переменной Леви–Чивита была взята пара комплексных чисел. Штифель для регуляризации использовал введенную им специальную четырехмерную квадратную матрицу (*KS*-матрицу). Регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел наиболее полно изложена в широко цитируемой книге Штифеля и Шейфеле (Scheifele) (1971) [7].

Автором статьи были предложены кватернионные методы регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел [8, 9]. Один метод [8] основан на использовании классических кватернионных матриц, другой метод [9] – на использовании кватернионов Гамильтона. В отличие от подхода, использующего *KS*-матрицы Штифеля, эти методы позволили дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему преобразованию Кустаанхеймо–Штифеля, а также позволили дать прямой и наглядный вывод более общих регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, из которых вытекают, как частные, регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Различные аспекты кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел, в которой используются *KS*-переменные, рассматривались в работах многих зарубежных ученых, а также в работах автора статьи.

Отметим работы Вальдфогеля (Waldvogel) [10, 11], в которых рассмотрена кватернионная регуляризация уравнений пространственной задачи двух тел. В работе [11] ("Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный (истинный) путь") Вальдфогелем отмечается, что кватернионы "являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике". В ней также говорится о приоритете автора настоящей статьи в области кватернионной регуляризации.

Во многих работах зарубежных и отечественных авторов (в том числе в работах Fukushima [12, 13]) приводятся результаты сравнения точности численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в *KS*-переменных и в других переменных. Они свидетельствуют об эффективности использования *KS*-переменных в задачах небесной механики и астродинамики.

Нами [14, 15] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [16, 17] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в *KS*-переменных. Было показано, что регулярные кватернионные уравнения позволяют получить значительно более высокую точность прогноза орбитального движения в сравнении с уравнениями в декартовых координатах (на 2–7 порядков в зависимости от эксцентриситета орбиты космического аппарата). Эти результаты согласуются с результатами, приведенными в книгах Бордовицыной и Авдюшева [18, 19].

Обзоры работ, посвященных кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, с различной степенью детализации даны в статьях [20–22].

В настоящей статье развиваются результаты, полученные автором статьи в работе [23] в области построения регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в четырехмерных *KS*-переменных и в модифицированных четырехмерных переменных, предложенных автором статьи, в которых уравнения орбитального движения имеют более простую и симметричную структуру. Предложены регулярные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных, порождаемые регулярными кватернионными дифференциальными уравнениями, имеющими осцилляторный вид. Рассмотрены первые интегралы дифференциальных уравнений орбитального движения в модифицированных переменных в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются центральная и зональные гармоники поля, а также рассмотрено получение для изучения орбитального движения замкнутых систем дифференциальных уравнений пониженной размерности (меньшей в сравнении с исходными уравнениями размерности).

2. Векторные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли. В векторной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс твердого тела (орбитального движения, например, космического тела или искусственного спутника) в гравитационном поле Земли имеют следующий вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial \Pi_\mathrm{E}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}}\right) + \mathbf{p}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор центра масс тела, $r = |\mathbf{r}|$, $\Pi_\mathrm{E} = \Pi + \Pi^*$, $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$; $\Pi_\mathrm{E} = \Pi_\mathrm{earth} + \Pi^*$ – потенциал гравитационного поля Земли, $\Pi = \Pi(r) = -(fm_E)/r$ – его центральная составляющая, $\Pi^* = \Pi^*_z(\mathbf{r}) + \Pi^*_{ts}(t, \mathbf{r})$ – составляющая, обусловленная не центральностью гравитационного поля Земли ($\Pi^*_z(\mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли, $\Pi^*_{ts}(t, \mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли [24–26]), $m_\mathrm{E} = m_\mathrm{earth}$ – масса Земли, f – постоянная тяготения, $\mathbf{p}$ – вектор возмущающего ускорения центра масс тела от действующих на тело негравитационных сил.

Систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ), в которой рассматривается орбитальное движение тела, введем следующим образом: ее начало O поместим в центр Земли, ось $O\xi_3$ направим к северному полюсу Земли, а ось $O\xi_1$ – в точку весеннего равноденствия. Декартовые координаты центра масс тела в этой системе координат обозначим через ξ_k $(k = 1, 2, 3)$.

Составляющие потенциала Π^* являются функцией координат ξ_k и имеют следующий вид:

$$\Pi^*_z(\mathbf{r}) = \Pi^*_z(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi^*_z(r, \gamma) = \frac{fm_\mathrm{E}}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma), \quad \gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = \frac{\xi_3}{r}, \tag{2.2}$$

$$\Pi^*_{ts}(\mathbf{r}) = \Pi^*_{ts}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi^*_{ts}(r, \gamma, \lambda) =$$

$$= -\frac{fm_\mathrm{E}}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\gamma)\big(C_{nk}\cos(k\lambda) + S_{nk}\sin(k\lambda)\big), \tag{2.3}$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, R – средний экваториальный радиус Земли, J_n – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_n – полином Лежандра n-го порядка, ϑ – угол между осью $O\xi_3$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$, φ – геоцентрическая широта, C_{nk}, S_{nk} – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, λ – географическая долгота.

В работах [27, 28] автором статьи были предложены кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движении спутника (ИСЗ) в гравитационном поле Земли с учетом центральной и зональных гармоник поля. В уравнениях вместо переменных Кустаанхеймо–Штифеля были использованы модифицированные четырехмерные переменные, предложенные в этих работах. Предложенные уравнения движения спутника в модифицированных переменных имеют более симметричную и простую структуру в сравнении с уравнениями в KS-переменных. В работе [23] эти результаты автором статьи были развиты. Получены кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник как в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, так и в модифицированных четырехмерных переменных. Эти уравнения, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности) для возмущенного движения спутника в центральном гравитационном поле Земли.

Рассмотрим регуляризованные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных.

3. Регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В случае использования для описания орбитального движения четырехмерных KS-переменных u_{jks} $(j = 0, 1, 2, 3)$ уравнения орбитального движения (2.1) записываются нами во вращающейся системе координат η, ось η_1 которой направляется по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс тела. Ориентация системы координат η в инерциальной системе координат ξ характеризуется четырехмерными параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j^* $(j = 0, 1, 2, 3)$. Декартовые координаты ξ_k $(k = 1,2,3)$ центра масс тела в системе координат ξ связаны с расстоянием r от центра масс тела до центра гравитационного поля и с параметрами Эйлера λ_j^*, а также с KS-переменными u_{jks} соотношениями (3.1):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r\left(\lambda_0^{*2} + \lambda_1^{*2} - \lambda_2^{*2} - \lambda_3^{*2}\right) = u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 - u_{2ks}^2 - u_{3ks}^2, \\ \xi_2 &= 2r\left(\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_0^*\lambda_3^*\right) = 2\left(u_{1ks}u_{2ks} - u_{0ks}u_{3ks}\right), \\ \xi_3 &= 2r\left(\lambda_1^*\lambda_3^* - \lambda_0^*\lambda_2^*\right) = 2\left(u_{1ks}u_{3ks} + u_{0ks}u_{2ks}\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u_{0ks} = \sqrt{r}\lambda_0^*$, $u_{iks} = -\sqrt{r}\lambda_i^*$, $i = 1, 2, 3$; $r = u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 + u_{2ks}^2 + u_{3ks}^2$.

Поэтому функции γ и λ, присутствующие в потенциалах Π_z^* и Π_{ts}^* (соотношения (2.2) и (2.3)) могут быть представлены через расстояние r и параметры Эйлера λ_j^*, а также через KS-переменные u_{jks} следующим образом:

$$\gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2\left(\lambda_1^*\lambda_3^* - \lambda_0^*\lambda_2^*\right) = \frac{2}{r}\left(u_{1ks}u_{3ks} + u_{0ks}u_{2ks}\right), \tag{3.2}$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_{\text{E}} t,$$

$$\lambda_a = \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\xi_1} = \operatorname{arctg}\frac{2\left(\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_0^*\lambda_3^*\right)}{\lambda_0^{*2} + \lambda_1^{*2} - \lambda_2^{*2} - \lambda_3^{*2}} = \operatorname{arctg}\frac{2\left(u_{1ks}u_{2ks} - u_{0ks}u_{3ks}\right)}{u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 - u_{2ks}^2 - u_{3ks}^2}, \tag{3.3}$$

где λ_a и Ω_{E} – абсолютная долгота и угловая скорость суточного вращения Земли.

Кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в KS-переменных имеют следующий вид [23]:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\mathbf{u}_{ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u}_{ks} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}^* - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}_{ks}},\\ \frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ks}}{d\tau}\circ\mathbf{q}^*\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}_{ks}\circ\bar{\mathbf{u}}_{ks},\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $\mathbf{u}_{ks} = u_{0ks} + u_{1ks}\mathbf{i} + u_{2ks}\mathbf{j} + u_{3ks}\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{u}}_{ks} = u_{0ks} - u_{1ks}\mathbf{i} - u_{2ks}\mathbf{j} - u_{3ks}\mathbf{k}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, scal() – скалярная часть кватерниона, заключенного в круглые скобки.

Дифференциальное уравнение для расстояния r от центра масс тела до центра масс Земли имеет вид (3.5):

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - 2h^*r - fm_{\text{E}} = r\left(-2\Pi^* + \mathrm{scal}(\bar{\mathbf{u}}_{ks}\circ\mathbf{Q})\right). \tag{3.5}$$

Фигурирующая в уравнениях (3.4) и (3.5) полная энергия h^* единицы массы тела определяется соотношениями (3.6):

$$h^* = \eta + \Pi^*\left(t, \mathbf{r}_\xi\right), \quad h = 2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_{jks}}{dt}\right)^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_{jks}}{d\tau}\right)^2 + \Pi(r), \tag{3.6}$$

в которых h – кеплеровская энергия.

Кватернион $\mathbf{Q}$ обусловлен действующим не потенциальным возмущением $\mathbf{p}$ и не центральностью гравитационного поля Земли и имеет вид:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}^* - \frac{1}{2}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{u}_{ks}}, \quad \mathbf{q}^* = q_0^* + q_1^*\mathbf{i} + q_2^*\mathbf{j} + q_3^*\mathbf{k} = -\mathbf{i}\circ\mathbf{u}_{ks}\circ\mathbf{p}_\xi,$$

$$\mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi) = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}.$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс тела и его вектора орбитальной скорости $\mathbf{v}$ на оси инерциальной системы координат ξ находятся через KS-переменные и их производные с помощью кватернионных соотношений (3.7):

$$\begin{gathered} r = \mathbf{u}_{ks} \circ \overline{\mathbf{u}}_{ks} = u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 + u_{2ks}^2 + u_{3ks}^2, \\ \mathbf{r}_\xi = \overline{\mathbf{u}}_{ks} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}_{ks}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\overline{\mathbf{u}}_{ks} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_{ks}}{dt} = \frac{2}{r}\overline{\mathbf{u}}_{ks} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}_{ks}}{d\tau}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Обозначим

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_{\mathrm{E}} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma), \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \Pi_{ts}^+(r,\gamma,\lambda) = r\Pi_{ts}^*(r,\gamma,\lambda) = \\ = -fm_{\mathrm{E}} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\gamma)\big(C_{nk}\cos(k\lambda) + S_{nk}\sin(k\lambda)\big). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Из кватернионных уравнений (3.4) с учетом обозначений (3.8) и (3.9) следуют скалярные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в KS-переменных (3.10) и (3.11):

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_{jks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_{jks} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_{jks} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}\right)u_{jks}^+\right) - \\ - \frac{1}{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\left(\xi_1\frac{\partial\xi_2}{\partial u_j} - \xi_2\frac{\partial\xi_1}{\partial u_j}\right) + \frac{1}{2}rq_j^*, \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_{jks}}{d\tau}q_j^*\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}_{ks} \circ \overline{\mathbf{u}}_{ks}. \tag{3.11}$$

Здесь $u_{0ks}^+ = u_{2ks}, \quad u_{1ks}^+ = u_{3ks}, \quad u_{2ks}^+ = u_{0ks}, \quad u_{3ks}^+ = u_{1ks}; \quad \Pi^+ = \Pi_z^+ + \Pi_{ts}^+,$

$$\xi_1 = u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 - u_{2ks}^2 - u_{3ks}^2, \quad \xi_2 = 2\big(u_{1ks}u_{2ks} - u_{0ks}u_{3ks}\big),$$

Π_z^+, Π_{ts}^+ и Π_{ts}^* имеют вид (3.8), (3.9) и (2.3) соответственно.

4. Регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных. Автором статьи также предложены [23] другие уравнения возмущенного орбитального движения, которые, обладая всеми достоинствами выше приведенных уравнений в KS-переменных, имеют более простую и симметричную структуру. Для этого вместо KS-переменных были использованы другие (модифицированные) четырехмерные переменные, введенные автором статьи в работах [27, 28].

В случае Кустаанхеймо–Штифеля ось η_1 введенной ранее вращающейся системы координат h была направлена нами по радиус-вектору **r** центра масс тела. Координаты ξ_k тела в системе координат ξ связаны в этом случае с KS-переменными u_{jks} соотношениями (3.1).

Направим по радиус-вектору **r** не ось η_1 системы координат η, а ось η_3. В этом случае все выше приведенные кватернионные уравнения раздела 3 сохраняют свой вид, лишь вместо орта **i** необходимо взять орт **k**. Новые четырехмерные переменные u_j, определяемые через параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j ориентации этой новой вращающейся системы координат η, будут связаны с декартовыми координатами ξ_k соотношениями (4.1), отличными от соотношений (3.1):

$$\begin{gathered}\xi_1 = 2r(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) = 2(u_1u_3 - u_0u_2),\\ \xi_2 = 2r(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) = 2(u_2u_3 + u_0u_1),\\ \xi_3 = r\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2,\\ u_0 = \sqrt{r}\lambda_0, \quad u_i = -\sqrt{r}\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора **r** центра масс тела и его вектора скорости **v** на оси инерциальной системы координат ξ находятся через модифицированные четырехмерные переменные u_j и их производные с помощью кватернионных соотношений (4.2), отличных от соотношений (3.7):

$$\begin{gathered}r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k},\\ \mathbf{r}_\xi = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Кватернионные уравнения орбитального движения в модифицированных четырехмерных переменных u_j имеют вид уравнений (4.3):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}}, \quad \frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}}, \tag{4.3}$$

которые совпадают по своей форме с кватернионными уравнениями орбитального движения (3.4) в KS-переменных.

В этих уравнениях кватернион не потенциальных возмущений определяется соотношением $\mathbf{q} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi$, отличным от соотношения для кватерниона $\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u}_{ks} \circ \mathbf{p}_\xi$, фигурирующего в кватернионных уравнениях (3.4) возмущенного орбитального движения в KS-переменных.

Переменные γ и λ, фигурирующие в потенциале гравитационного поля Земли, выражаются через модифицированные переменные u_j с помощью соотношений (4.4) и (4.5), отличных от соотношений (3.2) и (3.3):

$$\gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = \frac{\xi_3}{r} = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{r}\left(u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2\right), \tag{4.4}$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_{\mathrm{E}} t, \quad \lambda_a = \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\xi_1} = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1}{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2} = \operatorname{arctg}\frac{u_2u_3 + u_0u_1}{u_1u_3 - u_0u_2}. \quad (4.5)$$

Учитывая равенство $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = r$, представим соотношение (4.4) в двух различных формах:

$$\gamma = 1 - 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) = 2\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2\right) - 1 = 1 - \frac{2}{r}\left(u_1^2 + u_2^2\right) = \frac{2}{r}\left(u_0^2 + u_3^2\right) - 1. \quad (4.6)$$

Из сопоставления (4.6) с (3.2) видно, что выражения для переменной γ (синуса геоцентрической широты φ), от которой зависит потенциал $\Pi^* = \Pi_z^*(r,\gamma) + \Pi_{ts}^*(r,\gamma,\lambda)$, описывающий зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли, через новые переменные могут быть представлены в двух различных формах и имеют более простую и симметричную структуру, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования *KS*-переменных, скалярные уравнения возмущенного орбитального движения, имеющие вид (4.7) [23]:

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma - 1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_k - \frac{1}{4}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u_k} + \frac{1}{2}rq_k, \quad k = 0, 3,$$

$$\frac{d^2u_s}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma + 1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_s - \frac{1}{4}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u_s} + \frac{1}{2}rq_s, \quad s = 1, 2, \quad (4.7)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_{\mathrm{E}}\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial\lambda} + 2\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}q_j\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r,$$

где

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_j} = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(\xi_1\frac{\partial\xi_2}{\partial u_j} - \xi_2\frac{\partial\xi_1}{\partial u_j}\right), \quad \xi_1 = 2\left(u_1u_3 - u_0u_2\right), \quad \xi_2 = 2\left(u_2u_3 + u_0u_1\right),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_0} = \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(u_1\xi_1 + u_2\xi_2\right), \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} = \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(u_0\xi_1 - u_3\xi_2\right),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(u_3\xi_1 + u_0\xi_2\right), \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u_3} = \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\left(u_2\xi_1 - u_1\xi_2\right),$$

$$q_0 = u_0p_3 + u_1p_2 - u_2p_1, \quad q_1 = u_0p_2 - u_1p_3 + u_3p_1,$$

$$q_2 = -u_0p_1 - u_2p_3 + u_3p_2, \quad q_3 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3,$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+\left(r,\gamma\right) + \Pi_{ts}^+\left(r,\gamma,\lambda\right) = r\Pi_z^*\left(r,\gamma\right) + r\Pi_{ts}^*\left(r,\gamma,\lambda\right).$$

В этих уравнениях полная энергия h^* единицы массы тела определяется соотношениями (3.6), в которых вместо переменных u_{jks} необходимо взять переменные u_j:

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad h = 2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 + \Pi(r).$$

Уравнения движения тела в модифицированных четырехмерных переменных, как уже отмечалось, имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в KS-переменных, что упрощает их аналитическое и численное исследование.

Отметим, что модифицированные переменные u_j связаны с KS-переменными u_{jks} соотношениями

$$u_0 = (1/2)(u_{0ks} + u_{1ks} + u_{2ks} + u_{3ks}), \quad u_1 = -(1/2)(u_{0ks} - u_{1ks} - u_{2ks} + u_{3ks}),$$
$$u_2 = -(1/2)(u_{0ks} + u_{1ks} - u_{2ks} - u_{3ks}), \quad u_3 = (1/2)(u_{0ks} - u_{1ks} + u_{2ks} - u_{3ks})$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ \mathbf{u}_{\;ks} =$$
$$= (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ (u_{0ks} + u_{ks1}\mathbf{i} + u_{2ks}\mathbf{j} + u_{3ks}\mathbf{k}).$$

5. Регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных). Для вывода этих уравнений используем метод вариации постоянных интегрирования.

Полагая правую часть

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}} \tag{5.1}$$

первого кватернионного уравнения из системы (4.3) регуляризованных уравнений возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в модифицированных переменных равной нулю, получаем:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = 0, \quad h = \text{const}. \tag{5.2}$$

Этим кватернионным уравнением описывается невозмущенное орбитальное движение в центральном гравитационном поле Земли (невозмущенное кеплеровское движение космического тела). В нем h – кеплеровская энергия, определяемая соотношением

$$h = 2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2 - \frac{fm_\text{E}}{r} = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 - \frac{fm_E}{r} = \text{const}.$$

Величины $\mathbf{q}$, Π^*, Π^*_{ts} в этом случае равны нулю.

Общее решение уравнения (5.2) для энергии $h < 0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\cos(k\tau) + \boldsymbol{\beta}\sin(k\tau),\ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = k\left[-\boldsymbol{\alpha}\sin(k\tau) + \boldsymbol{\beta}\cos(k\tau)\right],$$
$$k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2} = \text{const}, \tag{5.2}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ – произвольные кватернионные постоянные интегрирования.

Формулы обратного перехода от переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ к переменным $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ имеют вид (5.3):

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos(k\tau)\,\mathbf{u} - \frac{1}{k}\sin(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau},\ \boldsymbol{\beta} = \sin(k\tau)\mathbf{u} + \frac{1}{k}\cos(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau},\quad k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Полагая $\mathbf{f} \neq 0$ ($\mathbf{q} \neq 0$, $\Pi^* \neq 0$, $\Pi^*_{ts} \neq 0$), а энергию h переменной величиной, будем рассматривать соотношения (5.2) как формулы замены кватернионных переменных $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ на новые кватернионные переменные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (кватернионные оскулирующие (медленно изменяющиеся) переменные). При этом кеплеровскую энергию h заменим на полную энергию h^* орбитального движения, определяемую соотношениями

$$h^* = h + \Pi^*\left(t, \mathbf{r}_\xi\right),\quad h = 2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 + \Pi(r).$$

Поэтому формулы замены кватернионных переменных $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ на новые кватернионные переменные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ будут иметь вид (5.4):

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\cos\left(k^*\tau\right) + \boldsymbol{\beta}\sin\left(k^*\tau\right),$$
$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = k^*\left[-\boldsymbol{\alpha}\sin\left(k^*\tau\right) + \boldsymbol{\beta}\cos\left(k^*\tau\right)\right],\ k^* = \left(-\frac{1}{2}h^*\right)^{1/2}, \tag{5.4}$$

а формулы обратного перехода от переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ к переменным $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ вид (5.5):

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos\left(k^*\tau\right)\mathbf{u} - \frac{1}{k^*}\sin\left(k^*\tau\right)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau},$$
$$\boldsymbol{\beta} = \sin\left(k^*\tau\right)\mathbf{u} + \frac{1}{k^*}\cos\left(k^*\tau\right)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau},\quad k^* = \left(-\frac{1}{2}h^*\right)^{1/2}. \tag{5.5}$$

Поясним второе из соотношений (5.4). Дифференцируя первое из соотношений (5.4) по переменной τ, получим:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = k^*\left(-\boldsymbol{\alpha}\sin\left(k^*\tau\right) + \boldsymbol{\beta}\cos\left(k^*\tau\right)\right) + \left[\cos\left(k^*\tau\right)\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} + \sin\left(k^*\tau\right)\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right]. \tag{5.6}$$

Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках полученного соотношения (5.6) было равно нулю:

$$\cos\left(k^*\tau\right)\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} + \sin\left(k^*\tau\right)\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} = 0 \tag{5.7}$$

Тогда соотношение (5.6) принимает тот же вид, что и второе из соотношений (5.4), которое формально получается в результате дифференцирования первого из соотношений (5.4) в случае постоянных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Используя соотношения (5.4) как формулы замены кватернионных переменных $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/\mathrm{d}\tau$ на новые кватернионные переменные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, получим из осцилляторных кватернионных уравнений (4.3) возмущенного орбитального движения в модифицированных четырехмерных переменных следующую нормальную систему дифференциальных уравнений (5.8) и (5.9) возмущенного орбитального движения в гравитационном поле Земли в кватернионных элементах $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ во времени τ для $h^* < 0$ (систему уравнений возмущенного эллиптического кеплеровского движения):

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} = -\frac{1}{k^*}\sin(k^*\tau)\,\mathbf{f}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} = \frac{1}{k^*}\cos(k^*\tau)\,\mathbf{f}, \tag{5.8}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau}\circ\mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}\circ\bar{\mathbf{u}}, \tag{5.9}$$

где

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}}, \quad k^* = \left(-\frac{1}{2}h^*\right)^{1/2} = \mathrm{vario}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{p}_{\xi}.$$

Отметим, что производные $d\boldsymbol{\alpha}/d\tau$ и $d\boldsymbol{\beta}/d\tau$, определяемые уравнениями (5.8), удовлетворяют использованному ранее условию (5.7) и что формулы обратного перехода от переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ к переменным $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ имеют вид (5.5).

Второе уравнение из подсистемы уравнений (5.9) для времени t в развернутой записи имеет вид (5.10):

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \cos^2\left(k^*\tau\right)\boldsymbol{\alpha}\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}} + \sin\left(k^*\tau\right)\cos\left(k^*\tau\right)\left(\boldsymbol{\alpha}\circ\bar{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\beta}\circ\bar{\boldsymbol{\alpha}}\right) + \sin^2\left(k^*\tau\right)\boldsymbol{\beta}\circ\bar{\boldsymbol{\beta}} =$$

$$\begin{gathered} = \cos^2\left(k^*\tau\right)\left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right) + \\ + 2\sin\left(k^*\tau\right)\cos\left(k\tau\right)\left(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\right) + \\ + \sin^2\left(k^*\tau\right)\left(\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2\right). \end{gathered} \tag{5.10}$$

Декартовые координаты ξ_k центра масс тела в инерциальной системе координат ξ находятся через компоненты α_j и β_j кватернионных оскулирующих элементов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ с помощью кватернионных соотношений (5.11) и (5.12):

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u} = [\bar{\boldsymbol{\alpha}}\cos(k^*\tau) + \\ + \bar{\boldsymbol{\beta}}\sin(k^*\tau)] \circ \mathbf{k} \circ [\boldsymbol{\alpha}\cos(k^*\tau) + \boldsymbol{\beta}\sin(k^*\tau)] = \cos^2(k^*\tau)\bar{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\alpha} + \\ + \cos(k^*\tau)\sin(k^*\tau)\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\beta}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\alpha}\right) + \sin^2(k^*\tau)\bar{\boldsymbol{\beta}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\beta}, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{2k^*}{r}[\bar{\boldsymbol{\alpha}}\cos(k^*\tau) + \\ + \bar{\boldsymbol{\beta}}\sin(k^*\tau)] \circ \mathbf{k} \circ [\boldsymbol{\alpha}\sin(k^*\tau) + \boldsymbol{\alpha}\cos(k^*\tau)] = \\ = \frac{2k^*}{r}[\cos(k^*\tau)\sin(k^*\tau)\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\beta}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\beta}\right) + \\ + \cos^2(k^*\tau)\,\bar{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\beta} + \sin^2(k^*\tau)\bar{\boldsymbol{\beta}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\alpha}], \tag{5.12}$$

где верхняя черта по-прежнему символ сопряжения.

Отметим, что регулярные дифференциальные уравнения (5.8) и (5.9) в кватернионных оскулирующих элементах $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ справедливы для возмущенного эллиптического кеплеровского движения центра масс КА.

6. Регуляризованные уравнения орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его центральной и зональных гармоник в модифицированных четырехмерных переменных и их первые интегралы. Уравнения орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его центральной и зональных гармоник в модифицированных переменных u_j получаются из уравнений (4.7) в случае, когда возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ центра масс тела отсутствует, т.е. когда величины $q_j = 0$, а также когда потенциал гравитационного поля Земли $\Pi^+ = \Pi_z^+(r,\gamma)$ ($\Pi_{ts}^+ = 0$).

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_k, \quad k = 0, 3, \tag{6.1}$$

$$\frac{d^2u_s}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*u_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_s, \quad s = 1, 2, \tag{6.2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r, \quad h^* = \text{const}. \tag{6.3}$$

Здесь

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_\text{E}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma),$$

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \ \gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = \frac{\xi_3}{r} = \tag{6.4}$$

$$= \frac{1}{r}\left(u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2\right) = \frac{2}{r}\left(u_0^2 + u_3^2\right) - 1 = 1 - \frac{2}{r}\left(u_1^2 + u_2^2\right),$$

В уравнениях (6.1) и (6.2) h^* – постоянная полная энергия единицы массы тела определяемая соотношениями (6.5):

$$h^* = h + \Pi_z^*(r,\gamma) = \text{const},$$

$$h = 2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2 - \frac{fm_{\text{E}}}{r} = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 - \frac{fm_E}{r}, \tag{6.5}$$

$$\Pi_z^*(r,\gamma) = \frac{fm_{\text{E}}}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma).$$

В них h – кеплеровская энергия.

Первое из соотношений (6.5) – интеграл энергии орбитального движения.

Уравнения (6.1)-(6.3) орбитального движения, дополненные соотношениями (6.4), образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений девятого порядка относительно модифицированных переменных u_j и времени t. Эти уравнения обладают всеми достоинствами уравнений орбитального движения в *KS*-переменных, которые в рассматриваемом случае образуют систему дифференциальных уравнений того же порядка. Однако правые части уравнений (6.1) и (6.2) имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями орбитального движения в *KS*-переменных, получающимися в рассматриваемом случае из уравнений (3.10) и (3.11) при $\Pi_{ts}^* = 0$, $\Pi^+ = \Pi_z^+$, $q_j = 0$ и имеющими следующий вид:

$$\frac{d^2u_{0ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_{0ks} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_{0ks} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}\right)u_{2ks}\right),$$

$$\frac{d^2u_{1ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_{1ks} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_{1ks} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}\right)u_{3ks}\right),$$

$$\frac{d^2u_{2ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_{2ks} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_{2ks} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}\right)u_{0ks}\right),$$

$$\frac{d^2u_{3ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_{3ks} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)u_{3ks} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}\right)u_{1ks}\right),$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}_{ks} \circ \bar{\mathbf{u}}_{ks}, \quad h^* = \text{const},$$

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_{\text{E}}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma).$$

$$r = u_{0ks}^2 + u_{1ks}^2 + u_{2ks}^2 + u_{3ks}^2,$$

$$\gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = \frac{2}{r}(u_{1ks}u_{3ks} + u_{0ks}u_{2ks}).$$

Отметим, что уравнения (6.1) и (6.2) могут рассматриваться независимо от уравнения (6.3) для времени t и образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно модифицированных переменных u_j.

Дифференциальные уравнения орбитального движения (6.1) и (6.2) имеют первый интеграл (6.6):

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{4}h^*\sum_{j=0}^{3}u_j^2 + \frac{1}{4}\Pi_z^+(r,\gamma) = c_H = \frac{1}{4}fm_E = \text{const}, \; h^* = \text{const}. \quad (6.6)$$

Здесь H имеет смысл функции Гамильтона, с помощью которой уравнения орбитального движения записываются в гамильтоновой форме [23], в которой обобщенными координатами являются модифицированные переменные u_j, а обобщенными импульсами – величины $du_j/d\tau$.

Дифференциальные уравнения орбитального движения (6.1) и (6.2) также имеют первые интегралы (6.7):

$$u_3\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_3}{d\tau} = c_1 = \text{const}, \quad u_2\frac{du_1}{d\tau} - u_1\frac{du_2}{d\tau} = c_2 = \text{const}. \quad (6.7)$$

Известному билинейному соотношению в KS-переменных [7]

$$u_1\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_1}{d\tau} + u_3\frac{du_2}{d\tau} - u_2\frac{du_3}{d\tau} = 0$$

соответствует в наших модифицированных переменных другое билинейное соотношение, имеющее вид [23]:

$$u_3\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_3}{d\tau} + u_2\frac{du_1}{d\tau} - u_1\frac{du_2}{d\tau} = 0. \quad (6.8)$$

Из сопоставления первых интегралов (6.7) с билинейным соотношением (6.8) следует, что постоянные интегрирования c_1 и c_2 должны быть связаны условием

$$c_1 = c_2.$$

Таким образом, уравнения орбитального движения (6.1) и (6.2) в модифицированных переменных имеют три первых интеграла (6.6) и (6.7).

7. Преобразование уравнений орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его центральной и зональных гармоник в модифицированных четырехмерных переменных, построение замкнутых систем уравнений меньшей размерности и их первых интегралов. Из системы дифференциальных уравнений орбитального движения (6.1) и (6.2) в модифицированных переменных u_j восьмого порядка можно получить системы дифференциальных уравнений орбитального движения в других переменных меньшей размерности.

Введем новые переменные:

$$\kappa = u_0^2 + u_3^2 = \frac{1}{2}r(\gamma+1), \; \nu = u_1^2 + u_2^2 = \frac{1}{2}r(1-\gamma),$$
$$\kappa + \nu = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad (7.1)$$

$$\alpha = \left(\frac{du_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_3}{d\tau}\right)^2, \ \beta = \left(\frac{du_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2. \tag{7.2}$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) следует следующая замкнутая система дифференциальных уравнений (7.3)–(7.8) в переменных κ, α, ν, β, определяемых соотношениями (7.1) и (7.2):

$$\frac{d^2\kappa}{d\tau^2} - 2\alpha - h^*\kappa = \left(\frac{\gamma - 1}{r}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\kappa, \tag{7.3}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma - 1}{r}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\kappa}{d\tau}, \tag{7.4}$$

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - 2\beta - h^*\nu = \left(\frac{\gamma + 1}{r}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\nu, \tag{7.5}$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma + 1}{r}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\nu}{d\tau}, \tag{7.6}$$

где

$$r = \kappa + \nu, \ \gamma = \frac{\kappa - \nu}{\kappa + \nu}, \ \gamma - 1 = -2\frac{\nu}{r}, \ \gamma + 1 = 2\frac{\kappa}{r}, \ h^* = \text{const}, \tag{7.7}$$

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_{\text{E}}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma). \tag{7.8}$$

Левые части этой системы дифференциальных уравнений являются линейными с постоянными коэффициентами. В отличие от системы дифференциальных уравнений (6.1) и (6.2) орбитального движения в модифицированных переменных u_j, имеющей восьмой порядок, эта система дифференциальных уравнений в переменных κ, α, ν, β имеет шестой порядок.

С учетом соотношений (7.7) уравнения (7.3)–(7.6) принимают вид:

$$\frac{d^2\kappa}{d\tau^2} - 2\alpha - h^*\kappa = -\left(\frac{2\nu}{(\kappa + \nu)^2}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\kappa, \tag{7.9}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\kappa}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{(\kappa + \nu)^2}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\kappa}{d\tau}, \tag{7.10}$$

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - 2\beta - h^*\nu = \left(\frac{2\kappa}{(\kappa + \nu)^2}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\nu, \tag{7.11}$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa}{(\kappa + \nu)^2}\frac{\partial \Pi_z^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\nu}{d\tau}, \tag{7.12}$$

где $r = \kappa + \nu$, $\gamma = (\kappa - \nu)/(\kappa + \nu)$, а потенциал Π_z^+ имеет вид (7.8).

Дифференциальные уравнения (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) орбитального движения в переменных κ, α, ν, β имеют первые интегралы (7.13) и (7.14):

$$\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2 - 4\alpha\kappa = c_\kappa, \; c_\kappa = \text{const}, \tag{7.13}$$

$$\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2 - 4\beta\nu = c_\nu, \; c_\nu = \text{const}. \tag{7.14}$$

Перейдем в первых интегралах (7.13) и (7.14) от переменных κ, α, ν, β к исходным переменным u_j и $du_j/d\tau$ в соответствии с формулами (7.1) и (7.2). Получим соотношения:

$$\left(u_0\frac{du_3}{d\tau} - u_3\frac{du_0}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{4}c_\kappa, \; c_\kappa = \text{const}, \tag{7.15}$$

$$\left(u_1\frac{du_2}{d\tau} - u_2\frac{du_1}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{4}c_\nu, \; c_\nu = \text{const}. \tag{7.16}$$

Из сравнения этих соотношений с первыми интегралами (6.7) в переменных u_j следует, что постоянные интегрирования c_κ, c_ν и c_1, c_2, фигурирующие в первых интегралах уравнений орбитального движения в переменных κ, α, ν, β и в переменных u_j, связаны соотношениями (7.17):

$$c_\kappa = -4c_1^2, \; c_\nu = -4c_2^2; \; c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-c_\kappa}, \; c_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-c_\nu}. \tag{7.17}$$

Поскольку, как было установлено ранее, постоянные интегрирования c_1 и c_2 связаны условием $c_1 = -c_2$, то постоянные интегрирования c_κ и c_ν должны быть равными: $c_\kappa = c_\nu$.

Складывая левые и правые части уравнений (7.10) и (7.12) и интегрируя найденное уравнение, получим следующий первый интеграл дифференциальных уравнений орбитального движения (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) в переменных κ, α, ν, β:

$$\alpha + \beta - \frac{1}{2}h^*(\kappa + \nu) + \frac{1}{2}\Pi_z^+(r, \gamma) =$$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{2}(\kappa + \nu)\left(\Pi_z^*(r, \gamma) - h^*\right) = c_{\alpha\beta} = \text{const}, \tag{7.18}$$

где $r = \kappa + \nu, \; \gamma = (\kappa - \nu)/(\kappa + \nu)$.

Ранее полученный первый интеграл уравнений в переменных u_j имеет вид (6.6), где, как уже отмечалось, H – функция Гамильтона канонической (гамильтоновой) формы уравнений орбитального движения в модифицированных переменных u_j.

Из интеграла (6.6) получаем, учитывая, что

$$\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 = \alpha + \beta, \; \sum_{j=0}^{3} u_j^2 = r = \kappa + \nu,$$

первый интеграл (7.19) в переменных κ, α, ν, β, в котором постоянная интегрирования $c_{\alpha\beta}$ определена через постоянную тяготения f и массу Земли m_E, а также через функцию Гамильтона H:

$$\alpha+\beta+\frac{1}{2}(\kappa+\nu)\left(\Pi_z^*(r,\gamma)-h^*\right)=c_{\alpha\beta}=2c_H=\frac{1}{2}fm_E=2H=\text{const}. \qquad (7.19)$$

Из сравнения соотношений (7.18) и (7.19) следует, что полученному первому интегралу (7.18) дифференциальных уравнений орбитального движения (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) в переменных κ, α, ν, β соответствует первый интеграл (6.6) уравнений (6.1) и (6.2) в модифицированных переменных u_j, и что постоянные интегрирования $c_{\alpha\beta}$ и c_H этих первых интегралов связаны соотношением:

$$c_{\alpha\beta}=2c_H=(1/2)\,fm_E.$$

Также отметим, что полученным первым интегралам (7.13) и (7.14) дифференциальных уравнений орбитального движения (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) в переменных κ, α, ν, β соответствуют квадраты первых интегралов (6.7) уравнений (6.1) и (6.2) в модифицированных переменных u_j.

С помощью первых интегралов (7.13) и (7.14) уравнения (7.10) и (7.12) для переменных α и β могут быть исключены из рассмотрения и вместо системы дифференциальных уравнений (7.9)–(7.12) шестого порядка будем иметь для изучения орбитального движения следующую систему дифференциальных уравнений четвертого порядка в переменных κ и ν:

$$\frac{d^2\kappa}{d\tau^2}-\frac{1}{2\kappa}\left(\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2-c_\kappa\right)-h^*\kappa=-\left(\frac{2\nu}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}+\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\kappa, \qquad (7.20)$$

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2}-\frac{1}{2\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2-c_\kappa\right)-h^*\nu=\left(\frac{2\kappa}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}-\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\nu, \qquad (7.21)$$

где $r=\kappa+\nu$, $\gamma=(\kappa-\nu)/(\kappa+\nu)$, а потенциал Π_z^+ имеет вид (7.8).

Кроме системы дифференциальных уравнений (7.20) и (7.21) четвертого порядка для изучения орбитального движения можно использовать следующую более простую систему дифференциальных уравнений (7.22)–(7.25) того же порядка в переменных κ, α, ν, β, получающуюся в результате объединения первых интегралов (7.13) и (7.14) и уравнений (7.10) и (7.12):

$$\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2-4\alpha\kappa=c_\kappa,\ \ c_\kappa=\text{const}, \qquad (7.22)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau}-\frac{1}{2}h^*\frac{d\kappa}{d\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}+\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\kappa}{d\tau},\ \ h^*=\text{const}, \qquad (7.23)$$

$$\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2 - 4\beta\nu = c_\nu,\ c_\nu = \text{const}, \tag{7.24}$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\nu}{d\tau},\ h^* = \text{const}. \tag{7.25}$$

Здесь в правые части уравнений (7.23) и (7.25) после нахождения частных производных необходимо использовать равенства $r=\kappa+\nu$, $\gamma=(\kappa-\nu)/(\kappa+\nu)$.

Переменные α и β связаны соотношением (7.18) (входят в первый интеграл уравнений орбитального движения в виде их суммы). Поэтому уравнение для переменной α или β может быть исключено из состава системы уравнений (7.22)–(7.25). В итоге будем иметь замкнутую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных κ, ν, α:

$$\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2 - 4\alpha\kappa = c_\kappa,\ c_\kappa = \text{const},$$

$$\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2 + 4\left(\alpha + \frac{1}{2}(\kappa+\nu)\left(\Pi_z^*(r,\gamma) - h^*\right) - c_{\alpha\beta}\right)\nu = c_\nu,\ c_\nu, c_{\alpha\beta} = \text{const},$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\kappa}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} + \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\kappa}{d\tau},\ h^* = \text{const}$$

или относительно переменных κ, ν, β:

$$\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2 + 4\left(\beta + \frac{1}{2}(\kappa+\nu)\left(\Pi_z^*(r,\gamma) - h^*\right) + c_{\alpha\beta}\right)\kappa = c_\kappa,\ c_\kappa, c_{\alpha\beta} = \text{const},$$

$$\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2 - 4\beta\nu = c_\nu,\ c_\nu = \text{const},$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{1}{2}h^*\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa}{(\kappa+\nu)^2}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)\frac{d\nu}{d\tau},\ h^* = \text{const}.$$

7.1. Уравнения для расстояния и синуса геоцентрической широты. В уравнения орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных гармоник входит потенциал $\Pi_z^*(r,\gamma)$, являющийся функцией расстояния r космического тела до центра масс Земли и переменной $\gamma=\sin\varphi$ (точнее, функцией геоцентрической широты φ). Поэтому представляет интерес получение замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно лишь переменных r и γ.

Для этого умножим уравнение (7.13) на ν, а уравнение (7.14) – на κ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Преобразуем новое полученное уравнение с учетом равенства $c_\nu=c_\kappa$ и соотношений

$$\kappa = \frac{1}{2}r(\gamma+1),\quad \nu = \frac{1}{2}r(1-\gamma),\quad \kappa+\nu = r.$$

В итоге получаем дифференциальное уравнение, содержащее переменные r и γ:

$$r^2\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2+\left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-4r(\alpha+\beta)\right](1-\gamma^2)+2r\left(1+\frac{dr}{d\tau}\right)(1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\tau}=4c_{\text{к}}, \qquad (7.26)$$

где

$$\alpha+\beta=2c_H+\frac{1}{2}r\left(h^*-\Pi_z^*(r,\gamma)\right),\ \ \Pi_z^*(r,\gamma)=\frac{fm_{\text{E}}}{r}\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma),$$

$c_H=(1/4)fm_{\text{E}}$, $c_{\text{к}}$ – постоянные величины, h^* – постоянная полная энергия единицы массы тела, определяемая соотношениями

$$h^*=h+\Pi_z^*(r,\gamma)=\text{const},\ \ h=2r\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2-\frac{fm_{\text{E}}}{r}=\frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2-\frac{fm_E}{r},$$

в которых h – кеплеровская энергия.

Уравнение (7.26) – первый интеграл дифференциальных уравнений орбитального движения, содержащий лишь переменные r и $\gamma=\sin\varphi$ (расстояние r и синус геоцентрической широты φ) и их первые производные по независимой переменной τ.

Таким образом, первый интеграл (7.26) и дифференциальное уравнение (7.27) для расстояния r от центра масс тела до центра масс Земли:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}-2h^*r=fm_{\text{E}}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Pi_z^+\right)=fm_{\text{E}}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\Pi_z^*\right), \qquad (7.27)$$

вытекающее в рассматриваемом случае из дифференциального уравнения (3.5), образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений третьего порядка относительно расстояния r и переменной $\gamma=\sin\varphi$, которая может быть использована для изучения орбитального движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных гармоник.

Получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной $\gamma=\sin\varphi$. Продифференцируем дважды по независимой переменной τ соотношения

$$2\left(u_0^2+u_3^2\right)=r(\gamma+1),\quad 2\left(u_1^2+u_2^2\right)=r(1-\gamma)$$

и учтем дифференциальные уравнения орбитального движения (6.1) и (6.2) для переменных u_j, а также дифференциальное уравнение (7.27) для расстояния r. Получим следующие дифференциальные уравнения второго порядка относительно переменной $\gamma=\sin\varphi$:

$$r\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\gamma}{d\tau}-\left(h^*r+fm_{\text{E}}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Pi_z^+\right)\right)(1-\gamma)+$$
$$+r(1-\gamma)\left(\frac{\gamma+1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}-\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)+4\left(\left(\frac{du_1}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2\right)=0,$$

$$r\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\gamma}{d\tau}+\left(h^*r+fm_{\mathrm{E}}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Pi_z^+\right)\right)(1+\gamma)-$$
$$-r(1+\gamma)\left(\frac{\gamma-1}{r}\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}-\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial r}\right)-4\left(\left(\frac{du_0}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{du_3}{d\tau}\right)^2\right)=0.$$

Складывая полученные уравнения, найдем:

$$r\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\gamma}{d\tau}+\left(h^*r+fm_{\mathrm{E}}-\Pi_z^+\right)\gamma-2(\alpha-\beta)=(\gamma^2-1)\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}, \quad (7.28)$$

где

$$2(\alpha-\beta)=2\left[\left(\frac{du_0}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{du_3}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{du_1}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{d\kappa}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{\nu}\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)^2-c_\kappa\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\nu}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\gamma+2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\gamma}{d\tau}-\frac{\gamma}{(1-\gamma^2)}\left(r\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2-4c_\kappa\frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Отметим, что для получения разности $a-\beta$ уравнение (7.22) было умножено на $-\nu$, а уравнение (7.23) – на κ и затем левые и правые части полученных уравнений были сложены с учетом равенства $c_k=c_\nu$.

Из уравнения (7.28) получаем окончательное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной $\gamma=\sin\varphi$:

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+\frac{1}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\gamma}{d\tau}+\frac{1}{r}\left(h^*r+fm_{\mathrm{E}}-\Pi_z^+\right)\gamma-$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\gamma+\frac{\gamma}{(\gamma^2-1)}\left(\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2-4c_\kappa\frac{1}{r^2}\right)\right\}=\frac{1}{r}\left(\gamma^2-1\right)\frac{\partial\Pi_z^+}{\partial\gamma}, \quad (7.29)$$

где

$$\Pi_z^+(r,\gamma)=r\Pi_z^*(r,\gamma)=fm_{\mathrm{E}}\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma).$$

Уравнения (7.27) и (7.29) образуют замкнутую систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных r и $\gamma=\sin\varphi$.

В заключение приведем полученные нами системы двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка относительно расстояния r космического тела до центра масс Земли и синуса геоцентрической широты φ (переменной $\gamma=\sin\varphi$), учитывающие зональные гармоники гравитационного поля Земли и имеющие вид (7.30), (7.31) или (7.32), (7.33):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - h^* r^2 - fm_{\mathrm{E}} r + \int\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \Pi_z^*(r,\gamma)\right)\right) dr = c_r, \quad c_r = \mathrm{const}, \tag{7.30}$$

$$r^2\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 + \left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 4r(\alpha+\beta)\right]\left(1-\gamma^2\right) + 2r\left(1+\frac{dr}{d\tau}\right)(1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\tau} = 4c_{\text{к}},$$

$$\alpha+\beta = 2c_H + \frac{1}{2} r\left(h^* - \Pi_z^*(r,\gamma)\right), \quad \Pi_z^*(r,\gamma) = \frac{fm_{\mathrm{E}}}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma), \tag{7.31}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - h^* r^2 - fm_{\mathrm{E}} r + \int\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \Pi_z^*(r,\gamma)\right)\right) dr = c_r, \quad c_r = \mathrm{const}, \tag{7.32}$$

$$\frac{1}{2} r^2\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 + \left[\left(fm_{\mathrm{E}} - 4c_H\right) r + \int\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(r^2 \Pi_z^*\right)\right) d\gamma + c_r\right]\left(1-\gamma^2\right) + r\left(1+\frac{dr}{d\tau}\right)(1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\tau} = 2c_{\text{к}}. \tag{7.33}$$

Заключение. Рассмотрены регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения космического тела (в частности, космического аппарата, астероида) в гравитационном поле Земли, имеющие относительно основных переменных осцилляторный вид. В этих уравнениях учтены зональные, тессеральные и секториальные гармоники поля. Эти кватернионные уравнения, в отличие от классических уравнений, регулярны для возмущенного орбитального движения в центральном гравитационном поле Земли (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль), порождаемых действующей центральной гравитационной силой). В уравнениях основными переменными являются широко используемые в настоящее время четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные) или четырехмерные переменные, предложенные автором статьи, в которых уравнения орбитального движения имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в *KS*-переменных. Дополнительными переменными в уравнениях орбитального движения являются энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана со временем дифференциальным соотношением, содержащим расстояние от космического тела до центра масс Земли (использовано дифференциальное преобразование времени Зундмана).

Предложены нормальные регулярные дифференциальные уравнения возмущенного орбитального движения в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных, порождаемые осцилляторными регулярными дифференциальными кватернионными уравнениями возмущенного орбитального движения.

Регулярные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов, в частности, для прогноза и коррекции орбитального движения космических аппаратов.

В случае орбитального движения в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются центральная и зональные гармоники поля, приведены первые интегралы осцилляторных регулярных кватернионных дифференциальных уравнений орбитального движения, имеющие восьмой порядок; рассмотрены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения орбитального движения замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности (шестого порядка). Приведены первые интегралы этих уравнений, а также системы уравнений четвертого и третьего порядков, в том числе – система дифференциальных уравнений третьего порядка относительно расстояния от центра масс космического тела до центра масс Земли и синуса геоцентрической широты и система двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка относительно этих двух переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. https://doi.org/10.1007/BF02418577
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere mathematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p. [*Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.]
8. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
9. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
10. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2006. V. 95. P. 201–212. http://doi.org/10.1007/978-1-4020-5325-2_11
11. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162. http://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y
12. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization // The Astronomical J. 2005. V. 129. № 5. 2496. http://doi.org/10.1086/429546
13. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // The Astronomical J. 2007. V. 133. № 6. 2815. http://doi.org/10.1086/518165

14. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сборник материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
15. *Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Щекутьев А.Ф.* Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных производных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156. http://doi.org/10.31857/S0032823523020054
16. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
17. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63. http://doi.org/10.31857/S057232990000712-3
18. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
19. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
20. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9
21. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 519–556. https://doi.org/10.31857/S0032823523040033
22. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация особенностей моделей астродинамики, порождаемых гравитационными силами (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 6. С. 915–953. https://doi.org/10.31857/S0032823523060036
23. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. https://doi.org/10.1134/S002342061902002X
24. *Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
25. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 351 с.
26. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 419 с.
27. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: 1985. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85. № 218628-В.
28. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.

REGULAR QUATERNION EQUATIONS ORBITAL MOTION IN THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD IN KS-VARIABLES AND THEIR MODIFICATIONS. REDUCTION OF DIMENSIONALITY, FIRST INTEGRALS OF EQUATIONS

Yu.N. Chelnokov[a, *]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Abstract – Regular quaternion differential equations of the perturbed orbital motion of a cosmic body (in particular, a spacecraft, an asteroid) in the Earth's gravitational field are considered, which take into account zonal, tesseral and sectorial harmonics of the field. These equations, unlike classical equations, are regular (do not contain special points such as singularity (division by zero)) for perturbed orbital motion in the central gravitational field of the Earth. In these equations, the main variables are four-dimensional Kustaanheim–Stiefel variables (KS-variables) or four-dimensional variables proposed by the author of the article, in which the equations of orbital motion have a simpler and symmetric structure compared to equations in KS-variables. Additional variables in the equations are orbital energy and time. The new independent variable is related to time by a differential relation containing the distance from the cosmic body to the Earth's center of mass (the Sundman differential time transformation is used). Regular equations of perturbed orbital motion in quaternion osculating (slowly changing) variables are proposed. The equations are convenient for using methods of nonlinear mechanics and high-precision numerical calculations, in particular, for forecasting and correcting the orbital motion of spacecraft. In the case of orbital motion in the Earth's gravitational field, the description of which takes into account the central and zonal harmonics of the field, the first integrals of the equations of orbital motion of the eighth order are given, changes of variables and transformations of these equations are considered, which made it possible to obtain closed systems of differential equations of the sixth order for the study of orbital motion, as well as systems of differential equations of the fourth and third orders, including a system of differential equations of the third order with respect to the distance from the cosmic body to the center of mass of the Earth and the sine of geocentric latitude, as well as a system of two integro-differential equations of the first order with respect to these two variables.

Keywords: regular quaternion differential equations of perturbed orbital motion, Earth's gravitational field, singularity, Kustaanheim–Stiefel variables (*KS*-variables), modified four-dimensional variables, energy of orbital motion, Sundmann time transformation, quaternion osculating (slowly changing) variables, first integrals of equations, distance to the Earth's center of mass, latitude, longitude

REFERENCES

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. http://doi.org/10.1007/BF02418577
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere mathematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
https://doi.org/10.1086/518165
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
8. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids. 1981. V. 16. № 6. P. 1–10.
9. *Chelnokov Yu. N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids. 1984. V. 19. № 1. P. 1–7.
10. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2006. V. 95. P. 201–212.
11. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
12. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization // The Astronomical Journal. 2005. V. 129. № 5. 2496.
https://doi.org/10.1086/429546
13. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // The Astronomical Journal. 2007. V. 133. № 6. 2815.
14. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space. 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.
15. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Schekutev A.F.* Prediction and Correction of the Orbital Motion of Spacecraft using Regular Quaternion Equations and their Solutions in the Kustaanheimo–Stiefel Variables and Isochronic Derivatives // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 7. P. 2478–2503.
https://doi.org/10.3103/S0025654423070063
16. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Regularization of the Eguations of the Perturbed Spatial Restricted Three-Body Problem: I // Mech. Solids. 2017. V. 52. № 6. 6. P. 613–639.
https://doi.org/10.3103/S0025654417060036
17. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 6. P. 633–650.
https://doi.org/10.3103/S0025654418060055
18. *Bordovitsyna T.V.* Modern numerical methods in problems of celestial mechanics. M.: Nauka, 1984. 136 p.

19. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods. Tomsk: Publishing house Tom. Univ., 2007. 178 p.
20. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9
21. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Methods and Regular Models of Analytical Mechanics (Review) // Mechanics of Solid. 2023. V. 58. № 7. P. 2450–2477. https://doi.org/10.3103/S0025654423070051
22. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Regularization of Singularities of Astrodynamics Models Generated by Gravitational Forces Review) // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 8. P. 2855–2883. https://doi.org/10.3103/S0025654423080071
23. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Equations of Disturbed Motion of an Artificial Earth Satellite // Cosmic Research. 2019. V. 57. № 2. P. 101–114. https://doi.org/10.1134/S0010952519020023
24. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* A reference guide to celestial mechanics and astrodynamics. M.: Nauka, 1976.
25. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics: Methods of the theory of motion of artificial celestial bodies. M.: Nauka, 1983.
26. *Demin V.G.* Movement of an artificial satellite in a non-central gravitational field. M.–Izhevsk: Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk Institute of Computer Research. 2010.
27. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods in problems of perturbed central motion of a material point. Part 1: General theory. Applications to the regularization problem and to the problem of satellite motion. M., 1985. 36 p. Dep. at VINITI 12/13/85. No. 218628-B.
28. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31. № 3. P. 409–418.