

УДК 629.7

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО
В СМЫСЛЕ КОМБИНИРОВАННОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА
УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА
(КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОНов

© 2025 г. М. В. Левский^a *

^a Научно-исследовательский институт космических систем
им. А.А. Максимова – филиал Государственного космического
научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, г. Королев

* E-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 26.12.2023 г.

После доработки 02.07.2024 г.

Принята к публикации 05.07.2024 г.

Решена задача оптимальной переориентации твердого тела (космического аппарата) из исходного положения в заданное конечное угловое положение на основе кватернионов. Использован комбинированный критерий качества, объединяющий в заданной пропорции вклад управляющих сил и времени, затраченные на совершение маневра, а также интеграл энергии вращения. Синтез оптимального управления основан на дифференциальном уравнении, связывающем кватернион ориентации и кинетический момент космического аппарата. Аналитическое решение задачи оптимального управления получено, используя необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина. Подробно изучены свойства оптимального вращения. Для построения оптимальной программы вращения записаны формализованные уравнения и расчетные формулы. Приведены аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального управления. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления разворотом. Также приводится конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). Проведенные численные эксперименты подтверждают сделанные аналитические выводы. В случае динамически симметричного твердого тела задача пространственной переориентации с минимальным расходом энергетических затрат и времени полностью решена (в замкнутой форме). Даны пример и результаты математического моделирования, подтверждающие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией.

Ключевые слова: управление переориентацией, комбинированный критерий оптимальности, принцип максимума, управляющая функция, алгоритм управления, кватернион, краевая задача

DOI: 10.31857/S1026351925010035, EDN: TAOSFF

Введение. Подробно исследуется задача оптимальной переориентации твердого тела (в частности, космического аппарата (КА)) из исходного углового положения в требуемое угловое положение. Основное отличие предложенного решения – новый показатель качества, на основе которого формируется оптимальное управление.

Огромное число работ изучают проблемы управления угловым положением твердого тела в различных формулировках и использующих широкий диапазон методов решения [1–27]. Некоторые авторы проводят синтез оптимального управления, основываясь на аналитическом конструировании оптимальных регуляторов [1], другие строят программное движение на базе обратных задач динамики и получают гладкие управления для обеспечения свойств программной траектории полиному заданного порядка с коэффициентами, рассчитанными исходя из значений фазовых переменных в граничных точках траектории [2]. Особый интерес представляют вопросы оптимального управления [3–25]. Способы оптимизации самые разные. В задачах переориентации твердого тела многие авторы применяют принцип максимума Л.С. Понтрягина [8–25], в том числе с классическими критериями оптимальности (быстродействие [4–12], минимум энергозатрат [11, 13, 14], минимум расхода топлива [13] и др.). Кинематические задачи разворота исследованы детально [15–17]. Задачи оптимального управления в динамической постановке вызывают неподдельный интерес, однако здесь при решении краевой задачи разворота сталкиваются с определенными трудностями. В отдельных частных случаях двухточечная краевая задача решается методом разделения переменных [13]. Практически важными остаются аналитические решения задачи оптимального управления разворотом. Однако получить их для тел с произвольными моментами инерции крайне затруднительно. Известны несколько решений (аналитических в том числе) для вращений сферически-симметричных [12, 18] и динамически симметричных тел [9–11, 19–22]. В опубликованной ранее работе [19], оптимальный вектор кинетического момента осесимметричного твердого тела вращается в связанной системе координат вокруг оси симметрии твердого тела с постоянной угловой скоростью, но остается неизменным по модулю (вектор абсолютной угловой скорости твердого тела вращается в связанной системе координат вокруг оси симметрии с той же постоянной угловой скоростью, оставаясь неизменным по модулю); при этом используемый авторами минимизируемый функционал не включал силовые моменты.

Ниже решается задача оптимального разворота твердого тела (КА) с использованием нового показателя качества, объединяющего в заданной пропорции время и энергетические затраты – интеграл энергии вращения и вклад управляющих сил на совершение маневра (по энергозатратам). Фазовыми переменными служат кинетический момент твердого тела (КА) и кватернион ориентации. Приведенное ниже решение отличается от всех известных; во время оптимального разворота и управляющие функции, и фазовые переменные – гладкие функции времени. Рассмотренная задача отличается от других задач с комбинированным критерием оптимальности видом функционала

качества, который включает не только управляющие и фазовые переменные, но и длительность маневра [21–23]. Наличие интеграла энергии вращения в минимизируемом функционале приводит к ограничению кинетической энергии во время разворота, а из-за наличия силовых моментов управляющие переменные оказываются ограниченными даже в отсутствии ограничений на управление. Фактор времени ограничивает длительность разворота.

1. Постановка задачи оптимального управления вращением КА. Вращательное движение твердого тела (КА) описывает следующее уравнение [12]:

$$\dot{\mathbf{L}} + (I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (1.1)$$

и кинематическое уравнение [12]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ (I^{-1}\mathbf{L}), \quad (1.2)$$

где \mathbf{L} – кинетический момент КА; \mathbf{M} – управляющий момент; I – тензор инерции КА; Λ – нормированный кватернион [12], задающий движение связанного базиса относительно инерциального базиса ($\|\Lambda\|=1$), “ \circ ” – знак умножения кватернионов [12, с.11–20]. Управление КА вокруг центра масс производится за счет изменения момента \mathbf{M} . На практике интересны задачи, когда в начальный и конечный моменты времени кинетический момент \mathbf{L} равен нулю. Выпишем граничные условия для управляемой системы (1.1)–(1.2):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \quad \mathbf{L}(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \mathbf{L}(T) = 0, \quad (1.4)$$

где T – время завершения маневра. Кватернионы Λ_{in} и Λ_f удовлетворяют условию $\|\Lambda_{in}\|=\|\Lambda_f\|=1$.

Предполагается, что вращательное движение КА регулируется с помощью системы ориентации, создающей вращающие моменты относительно трех главных центральных осей инерции. Оптимальным считаем управление, при котором достигается минимум следующей величины

$$G = \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt + k_1 \int_0^T (L_1^2/J_1 + L_2^2/J_2 + L_3^2/J_3) dt + k_2 T, \quad (1.5)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – постоянные положительные коэффициенты ($k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$); M_i – проекции управляющего момента \mathbf{M} на главные центральные оси эллипсоида инерции КА (эти оси образуют связанный базис); L_i – проекции кинетического момента КА \mathbf{L} на оси связанного базиса; J_i – главные центральные моменты инерции КА ($i=1, 3$).

Задачу оптимального управления сформулируем в следующей постановке: требуется перевести КА из состояния (1.3) в состояние (1.4) согласно уравнениям (1.1), (1.2) так, чтобы сумма (1.5) была минимальной (время T не фиксировано). Решение $\mathbf{M}(t)$ находится в классе кусочно-непрерывных функций времени. Учитывая, что кватернионы Λ и $-\Lambda$ соответствуют одному и тому же угловому положению твердого тела (КА), далее рассматриваются только те задачи, в которых $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{in}$.

Принятый критерий качества позволяет определить режим вращения КА, в котором космический корабль перейдет из своего начального положения Λ_{in} в заданное конечное угловое положение Λ_f с минимальными затратами управляющих ресурсов и энергии, и найти соответствующую программу управления. Сформулированная задача управления отличается от рассматриваемых ранее задач формой функционала (1.5), при котором даже в отсутствии ограничений на управление управляющие переменные не могут быть неограниченно большими. Есть и другая особенность. Так как на управляющий момент \mathbf{M} не наложено никаких ограничений, требуемый маневр переориентации может быть выполнен при любых условиях разворота Λ_{in} и Λ_f и любых значениях J_1, J_2, J_3, k_1 и k_2 . Так как оптимизация основана на комбинации квадратичного критерия качества и времени маневра T (в заданной пропорции, со своим коэффициентом пропорциональности), то существует оптимальное значение T_{opt} , относительно которого сумма (1.5) возрастает как с увеличением, так и с уменьшением времени T . То, насколько крутым (или пологим) будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота, зависит от коэффициента k_1 . Значение коэффициента k_2 определяет максимальный модуль управляющего момента, а отношение k_2/k_1 определяет максимальную кинетическую энергию вращения КА в течение поворотного маневра.

Необходимо отметить, что оптимизация вращений с минимальными затратами (1.5) может оказаться полезной для КА с системой управления ориентацией, основанной на электрореактивных двигателях (ЭРД), потому что когда управляют ЭРД (в частности, ионные двигатели), первый интеграл в показателе (1.5) пропорционален потребляемой электроэнергии (тяга ЭРД прямо-пропорциональна потребляемому электрическому току [28], и вращающий момент пропорционален плечу установки ЭРД). Учитывая потребность во всемерном сокращении электропотребления ЭРД для управления движением КА, выбор минимизируемого функционала становится очевидным; второе слагаемое в (1.5) ограничивает кинетическую энергию вращения, делая ее как можно меньше, что также очень желательно (в практике космического полета).

2. Применение принципа максимума. Найдем решение поставленной задачи (1.1)–(1.5) на основе принципа максимума Л.С. Понtryгина [29]. Управляющими функциями являются моменты M_i ($i = 1, 3$). Прежде всего, введем сопряженные переменные ϕ_i , которые соответствуют проекциям кинетического момента КА L_i ($i = 1, 3$). В критерий качества (1.5) не входят элементы кватерниона ориентации Λ , поэтому вместо сопряженных функций ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ , используем следующие переменные r_i ($i = 1, 3, j = 0, 3$):

$$r_1 = (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2,$$

$$r_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2,$$

$$r_3 = (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2.$$

Аналогичный прием применяли многие исследователи [10–24], но с другими функционалами качества (чистые быстродействие, минимум энергозатрат и пр.); впервые указанную замену переменных сделали В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [11, 12]. Оптимальные функции r_i и вектор \mathbf{r} , образованный из r_i , удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= L_3 r_2 / J_3 - L_2 r_3 / J_2, \quad \dot{r}_2 = L_1 r_3 / J_1 - L_3 r_1 / J_3, \\ \dot{r}_3 &= L_2 r_1 / J_2 - L_1 r_2 / J_1, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (I^{-1} \mathbf{L})\end{aligned}\quad (2.1)$$

(символ \times означает векторное произведение векторов).

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина для оптимизационной задачи (1.1)–(1.5):

$$\begin{aligned}H = &-k_2(L_1^2/J_1 + L_2^2/J_2 + L_3^2/J_3) - M_1^2/J_1 - M_2^2/J_2 - M_3^2/J_3 + \\ &+ \varphi_1(M_1 + (1/J_3 - 1/J_2)L_2 L_3) + \varphi_2(M_2 + (1/J_1 - 1/J_3)L_1 L_3) + \\ &+ \varphi_3(M_3 + (1/J_2 - 1/J_1)L_1 L_2) + L_1 r_1 / J_1 + L_2 r_2 / J_2 + L_3 r_3 / J_3.\end{aligned}$$

Уравнения для φ_i получаются из формул [29]

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial L_i} \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Сопряженная система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= 2k_1 L_1 / J_1 + L_3 \varphi_2 (1/J_3 - 1/J_1) + L_2 \varphi_3 (1/J_1 - 1/J_2) - r_1 / J_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= 2k_1 L_2 / J_2 + L_1 \varphi_3 (1/J_1 - 1/J_2) + L_3 \varphi_1 (1/J_2 - 1/J_3) - r_2 / J_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= 2k_1 L_3 / J_3 + L_2 \varphi_1 (1/J_2 - 1/J_3) + L_1 \varphi_2 (1/J_3 - 1/J_1) - r_3 / J_3.\end{aligned}\quad (2.2)$$

При составлении функции Гамильтона–Понтрягина ограничение $\|\Lambda\| = 1$ не учитывалось в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем ранее было сказано. Вектор \mathbf{r} неподвижен относительно инерциального базиса и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (на постоянство величины $|\mathbf{r}|$ указывает последнее уравнение (2.1)). Конкретное решение $\mathbf{r}(t)$ системы (2.1) определяют начальное Λ_{in} и конечное Λ_f положения КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется, используя кватернион $\Lambda(t)$ [12]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda,$$

$$\mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{in} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in},$$

причем $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (иначе $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальше не имеет смысла решать оптимизационную задачу). Здесь Λ – сопряженный кватерниону Λ кватернион [12, с. 10–22].

Задача поиска оптимального управления сводится к решению системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с одновременной максимизацией функции H в каждый текущий момент времени t и удовлетворением условий (1.3), (1.4).

2.1. Структура оптимального управления. Найдем условия максимума функции H , для чего перепишем ее в таком виде

$$H = M_1\phi_1 + M_2\phi_2 + M_3\phi_3 - M_1^2/J_1 - M_2^2/J_2 - M_3^2/J_3 + H_{\text{inv}},$$

где H_{inv} не зависит явно от искомых функций M_i . Гамильтониан H – квадратичная функция моментов M_i , и необходимые условия экстремума $\partial H/\partial M_i = 0$ определяют ее максимум, которому соответствуют следующие значения:

$$M_i = J_i\phi_i / 2. \quad (2.3)$$

Замкнутая система, состоящая из уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.3), позволит отыскать оптимальное управление. Введем обозначение $r_0 = |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \neq 0$ и перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, у которого $p_i = r_i/r_0$. Для вектора \mathbf{p} и его составляющих p_i выполняются уравнения:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times (I^{-1}\mathbf{L}), \quad \dot{p}_1 = L_3 p_2 / J_3 - L_2 p_3 / J_2,$$

$$\dot{p}_2 = L_1 p_3 / J_1 - L_3 p_1 / J_3, \quad \dot{p}_3 = L_2 p_1 / J_2 - L_1 p_2 / J_1 \quad (2.4)$$

Задача поиска оптимального программного движения КА заключается в решении системы уравнений углового движения (1.1), (1.2), сопряженной системы уравнений (2.2) и уравнений (2.4) вместе с равенствами $r_i = r_0 p_i$ при наличии закона (2.3) для управляющих моментов M_i . Искомое оптимальное решение удовлетворяет следующим зависимостям:

$$\phi_i = a(t)p_i / J_i, \quad (2.5)$$

$$L_i = b(t)p_i, \quad (2.6)$$

где $a(t)$, $b(t)$ – скалярные функции времени ($b(t) \geq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$).

Подставив последовательно (2.5) в (2.2) при наличии (2.6) и $r_i = r_0 p_i$ убеждаемся в том, что найденное решение (2.5), (2.6) действительно справедливо для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.2)(2.4) (соотношения (2.6) прямо следуют из системы (1.1), (2.3), (2.4) при связях (2.5)). После обозначения $\boldsymbol{\phi}$ – вектор, элементами которого являются переменные ϕ_i , $I = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции твердого тела, перепишем систему (2.2) в векторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = 2k_1 I^{-1}\mathbf{L} + I^{-1}(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{\phi} \times (I^{-1}\mathbf{L}) - I^{-1}\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Из (2.2), (2.4), (2.5) видим, что искомые функции $a(t)$, $b(t)$ связаны соотношением

$$\dot{a}(t) = 2k_1 b - r_0. \quad (2.8)$$

Опираясь на уравнения (2.4), (2.5), (2.6), левая часть уравнения (2.7) будет следующей:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = I^{-1}(a\dot{\mathbf{p}} + \dot{a}\mathbf{p}) = aI^{-1}(\mathbf{p} \times (I^{-1}\mathbf{L})) + \dot{a}I^{-1}\mathbf{p} = abI^{-1}(\mathbf{p} \times (I^{-1}\mathbf{p})) + \dot{a}I^{-1}\mathbf{p}.$$

Найдем теперь правую часть уравнения (2.7), имея ввиду (2.5), (2.6).

$$2k_1 I^{-1} b \mathbf{p} + ab I^{-1} (\mathbf{p} \times (I^{-1} \mathbf{p})) + ab(I^{-1} \mathbf{p}) \times (I^{-1} \mathbf{p}) - r_0 I^{-1} \mathbf{p}.$$

Правая и левая части (2.7) тождественно равны, только если для $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяется (2.8).

Из уравнений (2.3)–(2.6) ясно видно, что при оптимальном вращении управляющий момент \mathbf{M} действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевых граничных условиях $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ решение системы (1.1), (2.2)–(2.4) описывает движение, при котором кинетический момент КА \mathbf{L} имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное. Кинетический момент $\mathbf{L}(t)$ (как решение системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) удовлетворяет соотношениям (2.6); подстановка (2.6) в уравнение движения (1.1) подтверждает, что необходимое условие оптимальности в форме уравнений (2.4) выполняется при наличии (2.3), (2.5).

Необходимо отметить, что общий подход к поиску решения оптимизационной задачи в классе траекторий, на которых кинетический момент КА имеет постоянное направление, и соотношения типа (2.5), (2.6) впервые были описаны в работе [11]. Позднее этот подход был успешно применен и развит Н.А. Стрелковой при решении аналогичных задач [14].

2.2. Свойства оптимального вращения. Найдем связь между оптимальными функциями $a(t)$ и $b(t)$. Нетрудно показать, что для оптимальной функции $b(t)$ из совместного анализа уравнений (1.1), (2.3)–(2.6) следует равенство $b = a/2$ или

$$b(t) = \frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Учитывая последнее равенство и условие (2.8), получим уравнение $\ddot{a} = k_1 a$ для $a(t)$, которое имеет аналитическое решение:

$$a(t) = C_1 \exp(-t\sqrt{k_1}) + C_2 \exp(t\sqrt{k_1}), \quad (2.9)$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные (они зависят от времени разворота и будут определены ниже).

Поскольку $\mathbf{L}(0) = 0$ и $\mathbf{L}(T) = 0$, то $b(0) = b(T) = 0$ и $\dot{a}(0) = \dot{a}(T) = -r_0$, откуда $r_0 = \sqrt{k_1}(C_1 - C_2)$. Соответственно функция $b(t)$ для оптимального вращения принимает вид:

$$b(t) = (\dot{a}(t) + r_0)/(2k_1) = [C_2 \exp(t\sqrt{k_1}) - C_1 \exp(-t\sqrt{k_1}) + C_1 - C_2]/(2\sqrt{k_1}). \quad (2.10)$$

Время окончания процесса разворота T не фиксировано, и гамильтониан H не зависит в явном виде от времени. Поэтому в каждый момент времени $t \in [0, T]$ оптимальное управление должно удовлетворять равенству $H = \text{const} = 0$ [30]. На концах оптимальной траектории (в начальный и конечный моменты времени) $\mathbf{L}(0) = 0$ и $\mathbf{L}(T) = 0$, и функция H такова (с учетом (2.3))

$$\begin{aligned} H(0) = H(T) &= -k_2 - (J_1 \phi_1^2 + J_2 \phi_2^2 + J_3 \phi_3^2)/4 + (J_1 \phi_1^2 + J_2 \phi_2^2 + J_3 \phi_3^2)/2 = \\ &= (J_1 \phi_1^2 + J_2 \phi_2^2 + J_3 \phi_3^2)/4 - k_2 \end{aligned}$$

$$\text{или } H(0) = H(T) = M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3 - k_2 = 0,$$

откуда $a^2(0) = a^2(T) = 4k_2 / (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)$.

Легко показать, что условие $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$ выполняется для движений, соответствующих уравнениям (2.4), (2.6). Для этого продифференцируем по времени левую часть приведенного равенства и убедимся, что полученная производная равна нулю после подстановки \dot{p}_i в соответствии с уравнениями (2.4), а затем L_i по выражениям (2.6). Отсюда следует одно из ключевых свойств оптимального движения КА: соотношение между квадратом модуля кинетического момента КА и кинетической энергией вращения E есть величина постоянная на протяжении всего разворота (внутри всего отрезка времени $[0, T]$). Действительно

$$E = b^2 (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2, \text{ и } E/|L|^2 = (p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3)/2 = \text{const}$$

(зависимость $b^2 = |L|^2$ следует непосредственно из формул (2.6)); $p_{i0} = p_i(0)$.

Для оптимальной функции $a(t)$ необходимо удовлетворить следующие требования:

$$a(0) = 2\sqrt{k_2}/C; \quad a(T) = -2\sqrt{k_2}/C,$$

$$a(T/2) = 0 \quad (C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}), \text{ и } a(0) = a(T) = -r_0.$$

Последнее равенство следует из зависимости (2.8), если учесть $b(0) = b(T) = 0$ в силу наличия условий $L(0) = 0$ и $L(T) = 0$ для оптимального разворота. Свойство $a(T) = -a(0)$ вытекает из необходимого условия оптимальности $H(0) = H(T) = 0$ (с учетом зависимостей (2.3), (2.5)). Исходя из решения (2.9), находим

$$\dot{a}(t) = \sqrt{k_1} (C_2 \exp(t\sqrt{k_1}) - C_1 \exp(-t\sqrt{k_1})).$$

На концах интервала управления $\dot{a}(t) = k_1^{1/2}(C_2 - C_1)$, $\dot{a}(T) = k_1^{1/2}(C_2 \exp(Tk_1^{1/2}) - C_1 \exp(-Tk_1^{1/2}))$. Приравняв $\dot{a}(0)$ и $\dot{a}(T)$, получим уравнение $C_2(\exp(Tk_1^{1/2}) - 1) = C_1(\exp(-Tk_1^{1/2}) - 1)$, из которого связь между C_1 и C_2 запишем в явном виде $C_1 = -C_2 \exp(Tk_1^{1/2})$. Из (2.10) будет $b(0) = 0$, $b(T) = 0$. Далее убеждаемся, что $a(T) = -a(0)$ и $a(T/2) = 0$, так как на основании (2.9) имеем $a(0) = C_1 + C_2$, $a(T) = C_1 \exp(-Tk_1^{1/2}) + C_2 \exp(Tk_1^{1/2}) = -C_2 - C_1$, $a(T/2) = C_2 \exp(Tk_1^{1/2}/2) - \exp(Tk_1^{1/2}/2)\exp(-Tk_1^{1/2}/2) = 0$. Но $r_0 = k_1^{1/2}(C_1 - C_2) = C_1 k_1^{1/2}(C_1 \exp(-Tk_1^{1/2}) + 1) > 0$, отсюда $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ (при этом $|C_1| > |C_2|$).

В итоге анализ структуры функции $a(t)$ показал, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ производная $\dot{a} < 0$, причем на левом и на правом концах траектории она минимальна: $\dot{a}(0) = \dot{a}(T) = -r_0$. Заметим, что поскольку $\dot{a}(0) < 0$, $\dot{a}(T) < 0$, то $C_1 > 0$, а $C_2 < 0$, и поэтому $a(0) > 0$, а $a(T) < 0$. Кроме того, на участке $t < T/2$ будет $a > 0$ и $\ddot{a} > 0$, а $\dot{a} < 0$; на интервале $t > T/2$ будет $a < 0$ и $\ddot{a} < 0$, но $\dot{a} < 0$. В момент $t = T/2$ производная \dot{a} максимальна (так как $a(T/2) = 0$ и b имеет максимальное значение). В то же время $\dot{a}(T/2) = 2C_1 k_1^{1/2} \exp(-Tk_1^{1/2}/2) < 0$. Значит, на всем отрезке времени $t \in [0, T]$ имеем

$\dot{a} < 0$. Не существует ни одного момента времени t , чтобы $\dot{a}(t) = 0$. Конкретные значения констант C_1, C_2 зависят от коэффициентов k_1, k_2 и интеграла

$$Q = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt, \quad (2.11)$$

значение которого не зависит от характера изменения функции $b(t)$ для вращений, удовлетворяющих уравнениям (2.4), (2.6), и определяется исключительно кватернионами Λ_{in}, Λ_f и моментами инерции КА J_1, J_2, J_3 [17] (величина Q рассчитывается одновременно с вектором p_0). Максимальный кинетический момент и максимальная энергия вращения достигаются при $t = T/2$; $L_{\max} = |\mathbf{L}(T/2)|, E_{\max} = E_k(T/2)$.

В гипотетическом (предельном) случае, если $k_1 = 0$, $a(t)$ – линейная функция времени:

$$a(t) = 2\sqrt{k_2}(1 - 2t/T)/C$$

(модуль кинетического момента КА – квадратичная функция времени, соответственно), и длительность разворота составляет $T = (6S/k_2^{1/2})^{1/2}$, где S – функционал пути [17]:

$$S = \int_0^T \sqrt{L_1^2/J_1 + L_2^2/J_2 + L_3^2/J_3} dt, \quad S = QC.$$

Следовательно, $E_{\max} = 3Sk_2^{1/2}/16$, и $L_{\max} = [3Qk_2^{1/2}/(8C)]^{1/2}$.

При неизменном значении k_2 с увеличением коэффициента k_1 максимальная энергия вращения E_{\max} уменьшается. Это связано с тем, что согласно связи (2.8), выявленной для оптимальных функций $a(t)$ и $b(t)$, с увеличением значения k_1 (при фиксированном k_2) уменьшается максимальный модуль кинетического момента L_{\max} и $b_{\max} = b(T/2)$. При этом время разворота T увеличивается. Продлевается и участок, на котором $a(t)$ и \dot{a} близки к нулю. Чем больше k_1 , тем сильнее функция $b(t)$ отдаляется от параболического изменения. Рис. 1 наглядно показывает характер поведения оптимальных функций $b(t)$ и $a(t)$ в зависимости от значения коэффициента k_1 минимизируемого функционала (1.5) (здесь $k_1^{(2)} > k_1^{(1)} > 0, k_1^{(3)} \gg k_1^{(2)}$); пунктирная линия соответствует случаю $k_1 \rightarrow 0$.

Здесь необходимо дать некоторые пояснения. В силу уравнения $\ddot{a} = k_1 a$, для большего k_1 , при одинаковом a производная \ddot{a} больше (крутизна функции $a(t)$ возрастает). Значения $a(0)$ и $a(T)$ фиксированы (они не меняются с изменением k_1), $a(0) = 2k_2^{1/2}/C$, $a(T) = -2k_2^{1/2}/C$ и $a(T/2) = 0$. Чем больше k_1 , тем быстрее функция $a(t)$ приближается к нулю, начавшись из точки $a(0) = 2k_2^{1/2}/C$. Соответственно, функция $b(t)$ быстрее переходит на участок с $b \approx 0$. С уменьшением b_{\max} , время завершения маневра переориентации неизбежно увеличивается, поскольку величина (2.11) остается неизменной (она не зависит от коэффициентов k_1, k_2). Таким образом, с ростом k_1 функция $b(t)$ все больше отдаляется от квадратичной функции и приближается к кусочно-линейной зависимости, которая может аппроксимироваться функцией, состоящей из участков с $\dot{b} \approx k_2^{1/2}/C$, далее $b \approx \text{const}$ и затем $\dot{b} \approx -k_2^{1/2}/C$. При неограниченном

увеличении k_1 и k_2 максимальная энергия вращения E_{\max} стремится к уровню $E_0 = k_2 / (2k_1)$.

В оптимальном решении (когда $k_1 \neq 0$) постоянные C_1 , C_2 и время T вычислим из уравнений:

$$\begin{aligned} (\exp(T\sqrt{k_1}) + 1)T &= (QC\sqrt{k_1/k_2} + 2/\sqrt{k_1})(\exp(T\sqrt{k_1}) - 1), \\ C_1 &= 2\sqrt{k_2}/(C(1 - \exp(-T\sqrt{k_1}))), \quad C_2 = 2\sqrt{k_2}/C - C_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Причем с увеличением k_2 длительность разворота T уменьшается (при неизменном значении k_1).

3. Доказательство единственности оптимального решения. Покажем, что найденное решение (2.5), (2.6) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4). Пусть \mathbf{q} – орт, параллельный моменту \mathbf{M} , причем в начальный момент времени $t=0$ направления векторов \mathbf{M} и \mathbf{q} совпадают, т.е. $\mathbf{q}(0) \cdot \mathbf{M}(0) > 0$ (знак умножения “·” означает скалярное произведение векторов). Тогда $\varphi = I^{-1}f\mathbf{q}$, где f – скалярная функция с начальным значением $f(0) > 0$ ($|\mathbf{q}|=1$). В окрестности точки $t=0$ справедливы соотношения $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$, где χ – скалярная величина. Подставим в уравнения (1.1) формулы (2.3) с учетом зависимости $\varphi = I^{-1}f(t)\mathbf{q}$ при наличии равенств $J_i\omega_i = \chi q_i$. Получим соотношение:

$$\dot{\mathbf{q}}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2 = f(t)\mathbf{q}/2. \quad (3.1)$$

Векторы $\dot{\mathbf{q}}\dot{\chi} + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ и \mathbf{q} ортогональны, либо сумма $\dot{\mathbf{q}}\dot{\chi} + (I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi^2$ есть нулевой вектор ($|\mathbf{q}|=1$, а значит в любом случае $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$). Уравнение (3.1) удовлетворяется, если только $\dot{\mathbf{q}} = -(I^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{q}$ и $\dot{\chi} = f(t)/2$. Подставим теперь векторы $\varphi = I^{-1}f(t)\mathbf{q}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ в (2.7) и вычислим левую часть уравнения (2.7).

$$I^{-1}(\dot{f}\mathbf{q} + f\dot{\mathbf{q}}) = I^{-1}(\dot{f}\mathbf{q} - f(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}).$$

После вычисления правой части уравнения (2.7) получим

$$\begin{aligned} 2k_1\chi I^{-1}\mathbf{q} + I^{-1}\chi(\mathbf{q} \times (I^{-1}f\mathbf{q})) + (I^{-1}f\mathbf{q}) \times (I^{-1}\chi\mathbf{q}) - I^{-1}\mathbf{r} &= \\ = 2k_1\chi I^{-1}\mathbf{q} - fI^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}) - r_0 I^{-1}\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Приравняв левую и правую части уравнения (2.7), получаем уравнение для вектора \mathbf{q} :

$$\dot{f}\mathbf{q} = 2k_1\chi\mathbf{q} - r_0\mathbf{p}$$

из чего следуют соотношения $\dot{f} = 2k_1\chi - r_0$ и $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ (так как $f(0) > 0$, $f(T) < 0$, и $\dot{f} < 0$). Пришли к однозначному выводу: если в какой-либо момент времени t векторы $I\varphi$ и \mathbf{L} коллинеарны, то они остаются коллинеарными внутри всего интервала времени $0 < t < T$. Требования $\mathbf{L}(0)=0$ и $\mathbf{L}(T)=0$ гарантируют существование как минимум двух таких моментов, когда \mathbf{L} и $I\varphi$ коллинеарны ($\mathbf{L} = hI\varphi$ при $t \rightarrow 0$, и $\mathbf{L} = -h(T-t)I\varphi$ при $t \rightarrow T$), где h – скалярная величина. Можем утверждать, что в процессе оптимального разворота закономерность $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ сохраняется внутри всего отрезка времени $t \in [0, T]$, и оптимальное решение обязательно соответствует законам (2.5), (2.6). Таким образом мы

доказали, что (2.5), (2.6) – единственное решение системы (1.1), (2.2), (2.3), (2.4), поскольку $\mathbf{L}(0)=0$ и $\mathbf{L}(T)=0$ (напомним, $r_i = r_0 p_i$).

Имея в виду выражения (2.3), (2.5), (2.6) и оптимальные значения постоянных C_1 и C_2 для функций $a(t)$, $b(t)$, оптимальное управление и оптимальное движение определяют следующие зависимости:

$$M_i = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] p_i / 2, \quad (3.2)$$

$$L_i = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] p_i / (2\sqrt{k_1}), \quad (3.3)$$

где p_i – составляющие вектора \mathbf{p} , который удовлетворяет уравнениям (2.4), $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda$, $C_1 = 2\sqrt{k_2} / (C(1 - \exp(-T\sqrt{k_1})))$. Время T рассчитывается из уравнения (2.12).

Решение (3.2), (3.3) системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) – единственное. Краевая задача принципа максимума состоит в определении вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ и величины $r_0 > 0$, при которых решение системы уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.3), (2.4) с начальными условиями (1.3) и связью $r_i = r_0 p_i$ удовлетворит краевым условиям (1.4).

4. Основы проектирования оптимальной программы управления вращением. Решение задачи оптимального разворота описывается уравнениями (2.5), (2.6), (3.2), (3.3); управляющие функции M_i и компоненты кинетического момента L_i изменяются согласно (3.2), (3.3). Вектор \mathbf{p}_0 и интеграл Q , характеризующий “трудоемкость” разворота, находятся после решения двухточечной краевой задачи разворота. Программу вращения КА полностью определяют Q , m_0 . Программное значение M связано с кватернионом Λ по выражению

$$\mathbf{M} = a(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda/2,$$

в котором $a(t)$ изменяется по закону (2.9).

Для оптимального управления характерно свойство симметрии (прежде всего для функций $a(t)$ и $b(t)$), которое выражается в следующих закономерностях:

$$a(0) = -a(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad a(T-t) = -a(t), \quad b(T-t) = b(t),$$

$$\int_0^{T/2} |a(t)| dt = \int_{T/2}^T |a(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt,$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda},$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{M}(t)| = \sqrt{k_2}/C, \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

$$L_{\max} = (r_0 + \sqrt{r_0^2 - 4k_1 k_2 / C^2}) / (2k_1) \text{ или}$$

$$L_{\max} = \sqrt{(C_1 - C_2)^2/4 - k_2/C^2} + (C_1 - C_2)/2 / \sqrt{k_1}.$$

Из (2.6) следует, что \mathbf{p} – орт кинетического момента \mathbf{L} . Оптимальные функции $L_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ взаимосвязаны посредством выражений (2.5), (2.6), в которых $p_i(t)$ подчиняется системе (2.4). Оптимальное управление определяется (3.2), векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} коллинеарны в любое время $t \in [0, T]$. В момент $t = T/2$ управляющий момент \mathbf{M} сменяет направление на противоположное (величина $|\mathbf{L}|$ принимает максимальное значение $|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\max}$).

4.1. Особые случаи построения оптимального управления разворотом. Управляющие функции формируются согласно (3.2), для чего надо в каждый момент времени t знать p_1 , p_2 , p_3 (их изменение описывает система (2.4), (3.3)). Аналитическое решение системы (1.2), (2.4), (3.3) существует только для динамически симметричных и сферически-симметричных тел.

В случае сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) зависимости (3.2), (3.3) имеют явный вид:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

$$M_i(t) = C_1[\exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})]p_{i0}/2,$$

$$L_i(t) = C_1[1 + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})]p_{i0}/(2\sqrt{k_1}), \quad i = \overline{1, 3},$$

где v_0 , v_1 , v_2 , v_3 – элементы кватерниона разворота $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$, $Q = 2J_1 \arccos v_0$.

Во время оптимальной переориентации сферически-симметричный КА разворачивается вокруг оси Эйлера, и оптимальная траектория $\Lambda(t)$ имеет следующий аналитический вид:

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/(2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt.$$

При динамической симметрии твердого тела ($J_2 = J_3$) задача оптимального управления (1.1)–(1.5) может быть доведена до аналитического решения (для конкретности дальнейшего изложения осью симметрии считается ось OX). При таком распределении масс оптимальное движение есть одновременный поворот тела (КА) вокруг направления, задаваемого вектором \mathbf{p} , неподвижным относительно инерциальной системы координат, и вокруг оси OX , об разующей с \mathbf{p} постоянный угол ϑ . Угловые скорости относительно \mathbf{p} и оси OX изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, в силу чего запишем [8, 11]:

$$\Lambda_f = \Lambda_{in} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha/2},$$

где \mathbf{e}_1 – орт оси симметрии КА; α , β – углы поворота твердого тела вокруг оси OX и вокруг \mathbf{p} ($|\alpha| \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$). Решение $\mathbf{p}(t)$ представляется в аналитической форме [8, 11]:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa,$$

$$\kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt, \quad (4.1)$$

где $p_{i0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная скорость $\omega_1(t) = L_1(t)/J_1$ определяется из (3.3) при том, что $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Значения α , β и p_{i0} рассчитываются по кватернионам Λ_{in} и Λ_f из системы [8, 11]:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \\ \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} &= v_1,\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3,$$

причем $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ (здесь v_0 , v_1 , v_2 , v_3 — элементы кватерниона $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$).

В случае осевой симметрии КА описанное решение отличается от [11], так как все управляющие переменные $M_i(t)$ — гладкие функции времени. Компоненты кинетического момента L_i рассчитываются по уравнениям (3.3) и (4.1). Оптимальные функции $a(t)$ и $b(t)$ определены программами (2.9), (2.10) и зависят от параметров T , C , Q , которые рассчитываются однозначно по заданным Λ_{in} , Λ_f , u_0 , k_1 , k_2 и J_1 , J_2 , J_3 . Искомые оптимальные управления $M_i(t)$ имеют аналитический вид:

$$M_1 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] p_{10} / 2,$$

$$M_2 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma) / 2,$$

$$M_3 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma) / 2,$$

а программные значения L_i составляющих кинетического момента \mathbf{L} следующие:

$$L_1 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] p_{10} / (2\sqrt{k_1}),$$

$$L_2 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma) / (2\sqrt{k_1}),$$

$$L_3 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \exp(-t\sqrt{k_1}) - \exp((t-T)\sqrt{k_1})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma) / (2J\sqrt{k_1}),$$

где $\gamma = \arcsin(p_{20}/(1 - p_{10}^2)^{1/2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/(1 - p_{10}^2)^{1/2})$, если $p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \neq 1$); вариант $|p_{10}| = 1$ соответствует плоскому повороту вокруг оси ОХ, поэтому он не рассматривается.

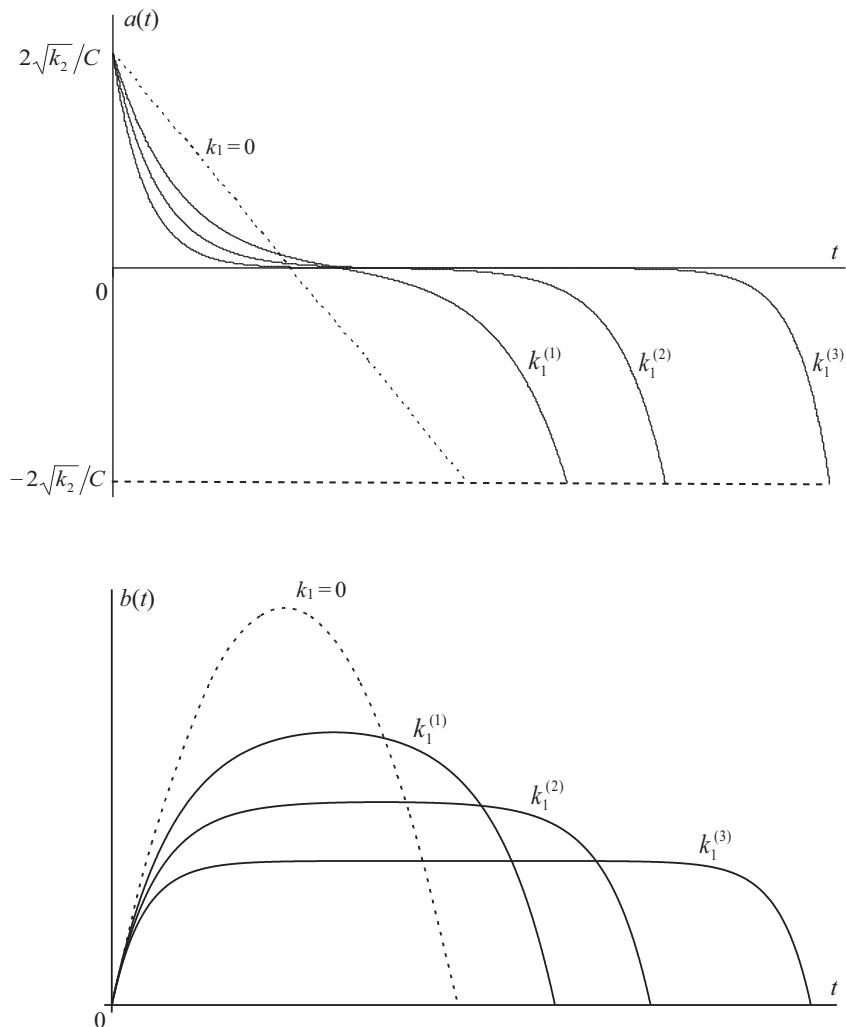
Оптимальную траекторию $\Lambda(t)$ запишем в следующем аналитическом виде:

$$\Lambda(t) = \Lambda_{in} \circ e^{p_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu e_1 / 2},$$

где

$$\begin{aligned}\sigma &= C_1 [(\exp(-T\sqrt{k_1}) + 1)t / (2\sqrt{k_1}) + (\exp(-t\sqrt{k_1}) + \exp(-T\sqrt{k_1}) - \\ &\quad - \exp((t-T)\sqrt{k_1}) - 1) / (2k_1)] / J_2;\end{aligned}$$

$$\mu = p_{10} \sigma (J_2 - J_1) / J_1.$$

Рис. 1. Вид оптимальных функций $a(t)$ и $b(t)$.

Параметры \mathbf{p}_0 , Q , T в случае динамически симметричного тела находятся намного проще (также упрощается определение величины (2.11)); $Q = J_2 \dot{\beta}$, так как $|\mathbf{L}| = J_2 \dot{\beta}$, где $\dot{\beta}$ – скорость вращения вокруг \mathbf{L} (напомним, $\beta \geq 0, \dot{\beta} \geq 0$). Величины L_{\max} , G зависят от β . Чтобы (1.5) было минимальным необходимо минимизировать угол β , что возможно, если $\beta \leq \pi$ (именно поэтому (4.2) включает условие $0 \leq \beta \leq \pi$). Отметим, что в более ранних работах [11, 14] также выписаны предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота, но для других функционалов качества, и доведено до конца решение для частного случая динамической симметрии твердого тела. Причем авторы статьи [11] показали, что система (4.2) имеет решение для любых Λ_i и $J_1, J_2 = J_3$,

В случае произвольного распределения масс ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы (1.2), (2.4), (3.3) можно найти только численными методами (в частности, методом последовательных приближений [31], или способом, описанным в предыдущем исследовании [8]). Искомый вектор \mathbf{p}_0 получается из решения краевой задачи $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_t$ для системы (2.4), (2.6). Ранее применяли метод итераций (см. систему [32] и способ [33]). Используя известное свойство независимости оптимального вектора \mathbf{p}_0 от поведения $b(t)$ [17], мы рассчитываем \mathbf{p}_0 при допущении $b(t) = \text{const}$, что существенно облегчает расчет \mathbf{p}_0 . Решение $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ системы уравнений (2.4), (2.6) при условии $b(t) = \text{const}$ отражает вращение по инерции, поскольку уравнения (2.4), (2.6) выполняются совместно с (1.1), из которых следует $\mathbf{M} = 0$.

Необходимо заметить, что при любых исходных условиях разворота (любых значениях Λ_{in} , Λ_f , J_1 , J_2 , J_3 , k_1 , k_2) кинетическая энергия вращения $E(t) \leq k_2/(2k_1)$. Т.е. в момент времени $t = T/2$ энергия вращения $E(T/2)$ не может быть больше уровня $k_2/(2k_1)$. При импульсном управлении (когда $k_2 \rightarrow \infty$) на большей части разворота КА вращается практически по инерции с энергией $E \approx k_2/(2k_1)$ (управляющий момент \mathbf{M} пренебрежимо мал $|\mathbf{M}| \approx 0$).

С увеличением коэффициента k_1 максимальная энергия вращения E_{\max} и максимальный кинетический момент L_{\max} уменьшаются. Если $k_1 \rightarrow 0$, то функция $a(t)$ изменяется практически по линейному закону, а $b(t)$ близка к квадратичной функции времени, максимальный кинетический момент L_{\max} достигает максимально возможного уровня $L_{\max} = (3Q(k_2^{1/2})/(8C))^{1/2}$, $E_{\max} = 3CQk_2^{1/2}/16$.

5. Пример решения задачи оптимального управления и математического моделирования. Для примера рассмотрим разворот КА на 180° в положение, соответствующее кватерниону Λ_f с элементами $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0.7071068$; $\lambda_2 = 0.5$; $\lambda_3 = 0.5$. В исходном положении направления одноименных осей связанного и инерциального базисов совпадают, и $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$. Определим оптимальную программу управления для перевода КА из состояния (1.3) в состояние (1.4) при условии, что кинетическая энергия вращения не превышает 10 Дж. Численное решение задачи управляемого разворота в постановке (1.1)–(1.5) приведем для случая, когда $k_1 = 0.002 \text{ с}^2$ и $k_2 = 0.04 \text{ Вт/с}$, а инерционные характеристики КА приняты следующими: $J_1 = 63559 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 192218.5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_3 = 176809 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

При решении двухточечной краевой задачи разворота в (2.6) полагаем $b(t) = \text{const}$ и $|\mathbf{L}| = \text{const}$, так как характер поведения функции $b(t)$ не влияет на расчетное значение \mathbf{p}_0 [17]. Начинаем с решения той же задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему между J_2 и J_3 значению (исследователи нередко используют принцип осреднения [34]). Допустима величина $J = (J_2 + J_3)/2$, хотя лучше взять такое значение [8, 24, 25]:

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} \left(\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1 \right).$$

Теперь решаем систему (4.2) в предположении, что КА – динамически симметричное тело. Вычисленные из (4.2) значения \mathbf{p}_0 и β берем как

начальное приближение к истинным значениям, соответствующим оптимальному решению. Они уточняются до тех пор, пока не станут удовлетворять системе (1.2), (2.4), (2.6) с учетом $b(t) = \text{const}$ (что соответствует $\mathbf{M} = 0$) при условиях $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$, накладываемых на вращение КА. Имея \mathbf{p}_0 и угол β , компоненты начального кинетического момента \mathbf{L}_{st} вычисляем по выражениям:

$$L_{1st} = \frac{J\beta}{T} p_{10}, \quad L_{2st} = \frac{J\beta}{T} p_{20}, \quad L_{3st} = \frac{J\beta}{T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при расчете \mathbf{p}_0 считалось $T = 300$ с). Прогноз неуправляемого движения осуществляем путем интегрирования системы уравнений (1.2), (2.4), (2.6) и $b(t) = J\beta/T$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_{st}$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Мерой близости \mathbf{p}_0 к истинному решению служит величина $\epsilon = \text{sqr}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f)$, где Λ_{pr} – максимально близкое к Λ_f положение, полученное в ходе моделирования углового движения КА, соответствующего вращению по инерции ($M_i = 0$). Значение \mathbf{p}_0 уточняется до тех пор, пока $\epsilon < \epsilon_{th}$ (ϵ_{th} – пороговая величина чуть меньше единицы, которая задает точность рассчитанного решения). Как только условие $\epsilon \geq \epsilon_{th}$ будет достигнуто (прогнозируемая ошибка удовлетворяет требуемой точности), вектор \mathbf{p}_0 и угол β считаются найденными (для удовлетворения краевым условиям $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$), а краевая задача решенной. Вектор \mathbf{p}_0 уточнялся, используя рекуррентное правило:

$$\Lambda_t^{(n+1)} = \Lambda_t^{(n)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr},$$

где $\Lambda_t^{(n)}$ – кватернион разворота для расчета \mathbf{p}_0 и \mathbf{L}_{st} в на n -м приближении. Правые части системы (4.2) (элементы кватерниона разворота $\Lambda_t^{(n)}$) обновляются на каждом n -м шаге итераций, из (4.2) мы находим \mathbf{p}_0 , β , а также кинетический момент \mathbf{L}_{st} (согласно (5.1)) для интегрирования уравнений (1.2), (2.4), (2.6), и вычисляем прогноз Λ_{pr} . Если $\epsilon < \epsilon_{th}$, то рассчитывается новый кватернион разворота $\Lambda_t^{(n+1)}$ для следующего ($n + 1$)-го приближения – процесс уточнения \mathbf{p}_0 возобновляется. В правых частях системы (4.2) для начального приближения берутся элементы кватерниона $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$. Итерационный процесс останавливается, если $\epsilon \geq \epsilon_{th}$.

Приведенная схема итераций аналогична методу решения уравнения вида $x = g(x)$ для скалярной функции $g(x)$ скалярного аргумента x . В нашей схеме аргумент – кватернион Λ_t , а функция – кватернионное произведение $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ ($\tilde{\Lambda}_f$ – постоянный кватернион, а Λ_{pr} зависит от аргумента Λ_t через систему (4.2), (5.1) и модель вращения, описываемую уравнениями (1.2), (2.4), (2.6) и $b(t) = \text{const} = J\beta/T$). С изменением Λ_t каждый раз получается новый вектор \mathbf{p}_0 (как решение системы (4.2) с обновленными правыми частями), и свои начальные условия L_{ist} и прогнозируемое положение Λ_{pr} , что приводит к изменению функции $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$. Как только $\text{sqr}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \epsilon_{th}$, вектор \mathbf{p}_0 найден, и необходимость расчета последующих приближений отпадает. Поскольку $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(n)})| < |\text{vect} \Lambda_t^{(n)}|$ для всех n , то можно утверждать, что процесс приближений к искомому значению \mathbf{p}_0 сходится. Похожий способ расчета \mathbf{p}_0 применялся в решении двухточечной краевой задачи разворота для максимального быстродействия [8].

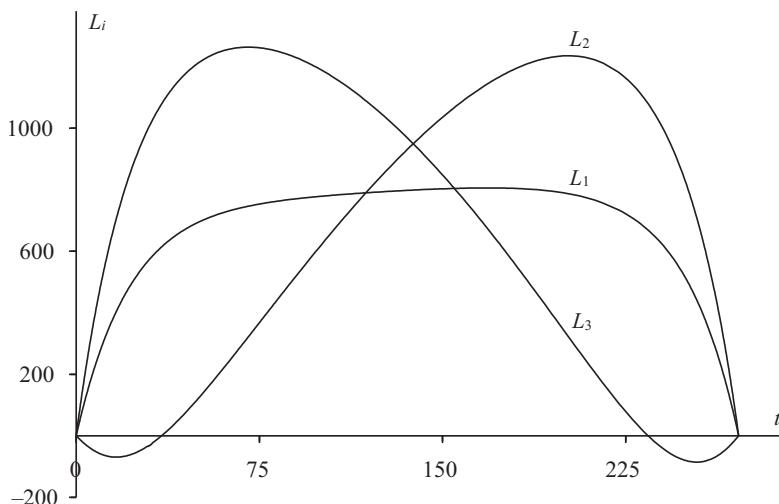
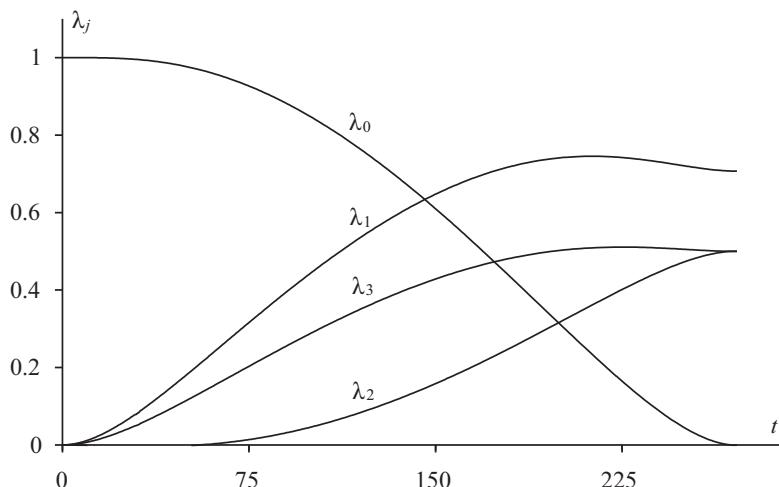


Рис. 2. Изменение проекций кинетического момента КА во время разворота.

Рис. 3. Изменение компонент кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ во время разворота.

Наглядная демонстрация движения КА во время оптимального разворота приведена на рис. 2–5 (по результатам математического моделирования). Из решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_f$ мы получили $\mathbf{p}_0 = \{0.49535062; -0.11725655; 0.86074309\}$ и $Q = 355.4 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Максимальный управляющий момент $|\mathbf{M}(0)| = 70.2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Значение константы $r_0 = 6.2768 \text{ Вт}$. Кинетический момент достигает максимальной величины $L_{\max} = 1561.9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ в момент времени $t = 135.6 \text{ с}$. Энергия вращения во время разворота не превышает $E_{\max} = 9.907 \text{ Дж}$. На рис.2 даны графики изменения проекций кинетического момента на оси связанный

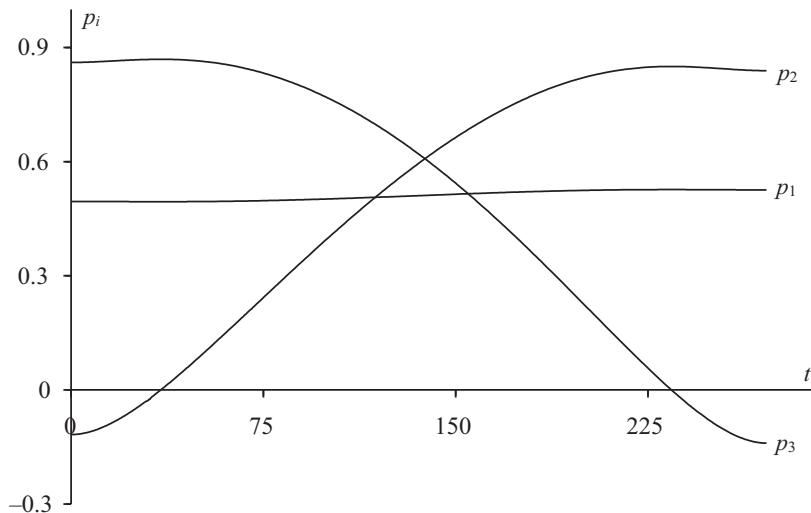


Рис. 4. Вид функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во время оптимального разворота.

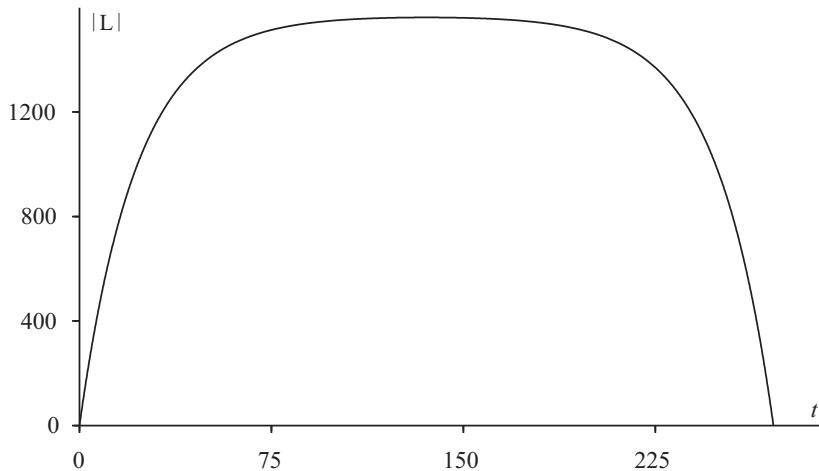


Рис. 5. Изменение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

системы координат $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ во времени (проекции L_i даны в Н·м·с). Рис.3 иллюстрирует изменение элементов кватерниона $\Lambda(t)$ в процессе совершаемого маневра ($\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ отражают текущую ориентацию КА). Характер поведения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ показан на рис. 4 (значения p_i , как и λ_j , – безразмерные величины), причем проекция p_1 изменяется незначительно. Изменение модуля кинетического момента КА иллюстрирует рис. 5. Свидетельством того, что OX – продольная ось КА, является то обстоятельство, что L_1 знакопостоянна, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от L_2 и L_3). Для оптимального

Таблица 1. Варианты сочетания коэффициентов k_1 и k_2 для оптимального управления

Значения коэффициентов	Характеристики
$k_1 = 0.001 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 0.02 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 9.6 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1537.329 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 49.62 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 289.664 \text{ с}$
$k_1 = 0.01 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 0.2 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 10 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1569.172 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 156.92 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 246.479 \text{ с}$
$k_1 = 0.25 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 4 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 8 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1403.523 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 701.76 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 257.211 \text{ с}$
$k_1 = 0.025 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 0.4 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 8 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1403.523 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 221.92 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 265.86 \text{ с}$
$k_1 = 0.002 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 0.04 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 9.907 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1561.907 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 70.176 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 271.2 \text{ с}$
$k_1 = 0.004 \text{ c}^{-2}$, $k_2 = 0.08 \text{ Вт/с}$	$E_{\max} = 9.99 \text{ Дж}$ $b_{\max} = 1568.291 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ $ \mathbf{M}(0) = 99.244 \text{ Н}\cdot\text{м}$ $T = 258.102 \text{ с}$

управления переменные p_i и λ_j – гладкие функции времени; L_i – гладкие функции времени (за исключением $t=0$ и $t=T$).

Ранее было установлено, что для оптимального управления $|\mathbf{M}(0)| = k_2^{1/2}/C$, $|\mathbf{M}(t)| \leq |\mathbf{M}(0)|$ и $E(t) \leq k_2/(2k_1)$; с ростом k_1 и k_2 максимальная энергия вращения приближается к уровню $E_0 = k_2/(2k_1)$. В табл. 1 даны результаты численных экспериментов для разных сочетаний коэффициентов k_1 и k_2 оптимального разворота КА с моментами инерции $J_1 = 63\,559 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 192\,218.5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_3 = 176\,809 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ (при этом (2.11) полагалась равной $Q = 355.4 \text{ кН}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$).

Таким образом, данные математического моделирования подтверждают, что при любых k_1 и k_2 кинетическая энергия вращения $E(t) \leq k_2/(2k_1)$. Наличие силовых моментов в минимизируемом функционале (1.5) приводит: во-первых, к ограниченности управляющего момента и, во-вторых, к тому, что кинетический момент – гладкая функция времени. Однако, чем больше k_2 , тем больше управляющий момент в начале и в конце разворота и тем более продолжительным будет участок вращения, когда \mathbf{M} близок к нулю и $|\mathbf{L}| \sim \text{const}$. В практике космических полетов в ограничениях на движение КА

часто необходимо учитывать условия: $|M| \leq M_{\max}$ и $E(t) \leq E_{per}$. Указанные требования будут выполнены, если $k_2 \leq C^2 M_{\max}^2$ и $k_1 = k_2 / (2E_{per})$ (или $k_1 > C^2 M_{\max}^2 / (2E_{per})$), поскольку $k_2 = C^2 |M(0)|^2$.

Заключение. Исследована задача оптимального управления вращением КА из исходного углового положения в предписанное конечное угловое положение. Принятый нами показатель оптимальности включает как управляющие функции, так и фазовые переменные, а также длительность маневра и характеризует энергетические затраты совместно с временем, расходуемым на переориентацию КА. Вопросы экономичности управления движением КА остаются актуальными и по сей день, поэтому решаемая в статье задача разворота является практически важной.

Чтобы решить поставленную задачу мы использовали кватернионные модели и принцип максимума Л.С. Понтрягина. Для сформулированной оптимизационной задачи выписаны функция Гамильтона-Понтрягина, со-пряженная система уравнений и аналитические выражения для оптимальных управляющих функций. На основе необходимых условий оптимальности определена структура оптимального управления. Обнаружены ключевые свойства разворота и тип траектории, соответствующей критерию (1.5). Даны соотношения для определения пространственного движения КА и доказана единственность оптимального решения. Сделан вывод, что постоянной величиной является отношение квадрата модуля кинетического момента к кинетической энергии вращения КА. Записаны формулы (в аналитической форме) для расчета максимального модуля кинетического момента. Описана реализация программного разворота.

Ключевое отличие предложенного решения – минимизация затрат с новым функционалом качества. Наличие в минимизируемом функционале интеграла энергии ограничивает максимальную кинетическую энергию вращения. Наличие третьего слагаемого в (1.5) ограничивает длительность разворота (если бы $k_2 = 0$, то оптимальный по критерию (1.5) разворот длился бы бесконечно долго, что недопустимо в практических применениях). Причем, максимальное значение подинтегрального выражения в первом интеграле показателя (1.5) равно k_2 . Опираясь на свойства оптимального по критерию (1.5) управления, появляется возможность выбрать расчетные (желаемые) значения коэффициентов k_1 и k_2 минимизируемого функционала. Коэффициент k_1 , устанавливающий пропорцию между затратами управляющих усилий и интегралом энергии вращения, определяет, насколько крутым или пологим будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота. Если $k_1 \rightarrow 0$, то модуль кинетического момента – квадратичная функция времени, максимум которой приходится на момент времени $t = T/2$. Коэффициент k_2 определяет максимальный модуль управляющего момента. Кинетическая энергия вращения КА во время поворотного маневра определяется отношением k_2/k_1 . Чем больше k_1 и k_2 , тем ближе максимальная энергия вращения $E_{\max} = E(T/2)$ к уровню $E_0 = k_2/(2k_1)$. При неограниченном увеличении k_1 , k_2 оптимальный процесс стремится к импульсному управлению, когда участки разгона и торможения, когда управляющий момент неограниченно большой, бесконечно малы, и почти на всем интервале разворота КА вращается

практически по инерции (управляющий момент между импульсными, можно сказать мгновенными разгоном и торможением пренебрежимо мал $M \approx 0$).

Полученные результаты отличаются от решения работы [11], где найдено оптимальное релейное управление вместо непрерывного управления, полученного в нашем случае. Описывается алгоритм численного решения краевой задачи для тел с произвольным распределением масс. Приведен пример математического моделирования, демонстрирующий поведение параметров оптимального движения. В частном случае динамически симметричного КА решение задачи оптимального управления доведено до конца: в аналитическом виде получена система уравнений, позволяющая напрямую найти решение двухточечной краевой задачи и рассчитать ключевые константы закона управления (для этого можем использовать устройство [35]).

Заметим, что в последние годы, из-за увеличения продолжительности активного существования КА (более 10 лет) и использования высокоточных (прецизионных) систем ориентации, интерес к ЭРД значительно возрос [36]. Бесспорные преимущества ЭРД – возможность маленького единичного импульса тяги, большая точность дозирования импульсов, практически отсутствует импульс последействия, что обеспечивает особо точную ориентацию. Из-за невообразимо высокой величины удельного импульса (до 6000–6500 с), широкое использование ЭРД для управления КА (включая ориентирование КА в пространстве) – одна из ведущих и естественных тенденций в космической деятельности в мире. На многих КА в настоящее время используют ионные двигатели для управления ориентацией (в частности, при решении задач ориентации КА в космической программе США использовали ионные двигатели XIPS-25, разработанные корпорацией Boeing Space Systems). В случае управления с помощью ЭРД потребляемая электроэнергия достаточно близко оценивается величиной, пропорциональной первому слагаемому в (1.5); второй интеграл в показателе (1.5) ограничивает кинетическую энергию вращения, что также немаловажно в космическом полете. Учитывая необходимость снижения электропотребления ЭРД для управления КА с желательным уменьшением энергии вращения, становится понятным выбор минимизируемого функционала в форме (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinitsin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1745. P. 012053.
<http://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. *Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
4. *Решимин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
<http://doi.org/10.31857/S000233880002843-6>

5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
<https://doi.org/10.2514/3.21187>
6. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Control. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
7. *Решимин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
<https://doi.org/10.7868/S0869565218180081>
8. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понtryгина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
11. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
13. *Айпанов Ш.А., Жакыпов А.Т.* Метод разделения переменных и его применение для задачи оптимального разворота космического аппарата // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 1. С. 73–84.
<https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
14. *Стрелкова Н.А.* Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь. ПГУ. 1990. С. 115–133.
15. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.
<https://doi.org/10.7868/S0002338814050114>
16. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
17. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24. <https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
18. *Levskii M.V.* About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
19. *Зелепукина О.В., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
20. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 129–145.
<https://doi.org/10.7868/S0002338816060093>

21. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 39–49.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>
22. Сапунков Я.Г. Молоденков А.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106.
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
<https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>
24. Левский М.В. Управление разворотом твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием оптимальности на основе кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 58–78.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600566>
25. Левский М.В. Оптимальное управление кинетическим моментом твердого тела (космического аппарата) при выполнении пространственного разворота // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 1. С. 76–94.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060137>
26. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
27. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // Journal of Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
<http://doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
28. Горшков О.А., Муравьев В.А., Шагайда А.А. Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.
29. Понtryagin Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelidze Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
30. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
31. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.
[http://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90160-4](http://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90160-4)
32. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994. № 2. Опубликован 20.01.1994. С. 49–50.
33. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 //Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998. № 19. Опубликован 10.07.1998. С. 234–236.
34. Журавлев В.Ф., Клинов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
35. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликован 20.03.2000. С. 148.
36. Кульков В.М., Обухов В.А., Егоров Ю.Г., Белик А.А., Крайнов А.М. Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // Вестн. Самарск. гос. аэрокосмического ун-та. 2012. № 3(34). С. 187–195.

**ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL
CONTROL OF REORIENTATION OF SOLID BODY (SPACECRAFT),
IN SENSE OF A COMBINED CRITERIA OF QUALITY, BASED
ON THE QUATERNIONS**

M.V. Levskeii ^{a,*}

^a*Maksimov Space System Research and Development Institute as branch of Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow oblast, 141091 Russia*

** E-mail: levskeii1966@mail.ru*

Absrtact – The problem on optimal reorientation of a solid (spacecraft) from an initial position into a prescribed final angular position on the basis of quaternions is solved. A combined criteria of quality is used, combining in a given proportion the contribution of control forces and the duration of maneuver, as well as the integral of the rotational energy. The synthesis of optimal control is based on a differential equation relating the attitude quaternion and angular momentum of a spacecraft. Analytical solution of optimal control problem is obtained using the necessary conditions of optimality in the form of the Pontryagin's maximum principle. The properties of optimal rotation are studied in detail. Formalized equations and computational formulas are written to construct the optimal rotation program. Analytical equations and relations for finding the optimal control are presented. Key relations that determine the optimal values of the parameters of rotation control algorithm are given. A constructive scheme for solving the boundary-value problem of the maximum principle for arbitrary turning conditions (initial and final positions and moments of inertia of a solid) is given also. The made numerical experiments confirm the analytical conclusions. In the case of a dynamically symmetric solid body, the problem of spatial reorientation with minimum energy and time consumption is completely solved (in closed form). An example and results of mathematical modeling that confirm the practical feasibility of the developed method for orientation control are given.

Keywords: control of reorientation, the combined criterion of optimality, maximum principle, control function, control algorithm, quaternion, the boundary-value problem

REFERENCES:

1. *Sinitsin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys.: Conf. Ser., 2021. V. 1745. P. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
2. *Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B.* Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2003. V. 42. № 5. P. 811–818.

3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
4. *Reshmin S.A.* Threshold absolute value of a relay control when time-optimally bringing a satellite to a gravitationally stable position // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2018. V. 57. № 5. P. 713–722.
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // *J. Guidance, Control and Dynamics.* 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
6. *Zhou H., Wang D., Wu B., E.K. Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // *International Journal of Control.* 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
7. *Reshmin S.A.* The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time // *Dokl. Phys.* 2018. V. 63. № 6. P. 257–261.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
8. *Levskii M.V.* Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2008. V. 47. № 6. P. 974–986.
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics.* 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
10. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical solution of the minimum time slew maneuver problem for an axially symmetric spacecraft in the class of conical motions // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2018. V. 57. № 2. P. 302–318.
<https://doi.org/10.1134/S1064230718020120>
11. *Branets V.N., Chertok M.B., Kaznacheev Yu.V.* Optimal turn of a rigid body with a single axis of symmetry // *Kosm. Issl.* 1984. V. 22. № 3. P. 352–360.
12. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Use of Quaternions in Problems of Rigid Body Attitude. Nauka, Moscow, 1973. 320 p. [in Russian]
13. *Aipanov S.A., Zhakypov A.T.* The method of separation of variables and its application to the problem of a spacecraft's optimal turn // *Cosmic Res.* 2020. V. 58, № 1. P. 53–63.
<https://doi.org/10.1134/S0010952520010013>
14. *Strelkova N.A.* On optimal reorientation of a solid // *Problems of Mechanics of Controlled Motion. Nonlinear Dynamical Systems.* PGU, Perm, 1990. P. 115–133 [in Russian].
15. *Levskii M.V.* Kinematically optimal spacecraft attitude control // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015. V. 54. № 1. P. 116–132.
<https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
16. *Biryukov V.G., Chelnokov Y.N.* Construction of optimal laws of variation of the angular momentum vector of a rigid body // *Mech. Solids.* 2014. V. 49, № 5. P. 479–494.
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
17. *Levskii M.V.* Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // *Mech. Solids.* 2009. V. 44. № 2. P. 169–183.
<https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
18. *Levskii M.V.* About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems,* 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
19. *Zelepukina O.V., Chelnokov Y.N.* Construction of optimal laws of variation in the angular momentum vector of a dynamically symmetric rigid body // *Mech. Solids.* 2011. V. 46. № 4. P. 519–533.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>

20. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Analytical solution of the optimal slew problem for an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2016. V. 55. № 6. P. 969–985.
<https://doi.org/10.1134/S1064230716060095>
21. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Analytical quasi-optimal solution of the slew problem for an axially symmetric rigid body with a combined performance index // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. № 3. P. 347–357.
<https://doi.org/10.1134/S1064230720030107>
22. Sapunkov Ya.G. Molodenkov A.V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional // Autom. Remote Contr. 2021. V. 82. № 7. P. 1183–1200.
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's optimal turn with arbitrary boundary conditions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2015. V. 54. № 3. P. 458–468.
<https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>
24. Levkii M.V. Control of the rotation of a solid (spacecraft) with a combined optimality criterion based on quaternions // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1483–1499.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600566>
25. Levkii M.V. Optimal Control of the Angular Momentum for a Solid (Spacecraft) Performing a Spatial Turn // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 1. P. 63–77.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060137>
26. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
27. Levkii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // Journal of Computer Science Applications and Information Technology. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
28. Gorshkov O.A., Murav'ev V.A., Shagaida A.A. Holl's and Ionic Plasma Engines for Spacecrafts. Mashinostroenie, Moscow, 2008. 280 p. [in Russian]
29. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Gordon and Breach, New York, 1986. 392 p.
30. Young L.C. Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. EA: Saunders, Philadelphia, 1969. 488 p.
31. Lyubushin A.A. Modifications of the method of successive approximations for solving optimal control problems // USSR Computat. Math. Math. Phys. 1982. V. 22. № 1. P. 29–34.
32. Levkii M.V. System for control of spacecraft's spatial turn. RF Patent No. 2006431// Byull. Izobret. 1994. № 2. P. 49–50. Published at 20.01.1994. [in Russian]
33. Levkii M.V. Method of controlling a spacecraft turn and system for its. RF Patent No. 2114771// Byull. Izobret. 1998. № 19. P. 234–236. Published at 10.07.1998. [in Russian]
34. Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M. Applied Methods in the Vibration Theory. Nauka, Moscow, 1988. 328 p. [in Russian]
35. Levkii M.V. Device for regular rigid body precession parameters formation. RF Patent No. 21466381// Byull. Izobret. 2000. № 8. P. 148. Published at 20.03.2000. [in Russian]
36. Kul'kov V.M., Obukhov V.A., Egorov Yu.G., Belik A.A., Krainov A.M. Comparative evaluation of the effectiveness of applying the perspective types of electric-rocket engines in small spacecrafts // Byull. Samara's State Space University. 2012. V. 34. № 3. P. 187–195. [in Russian]