

УДК 531.21

**О РАВНОВЕСИЯХ И РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ  
ГАНТЕЛЕОБРАЗНОГО ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ  
ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ  
ДВУХ ТОЧЕК КОНТАКТА**

© 2025 г. А. А. Буров<sup>а, \*</sup>, В. И. Никонов<sup>а, \*\*</sup>, Е. С. Шалимова<sup>а, б, \*\*\*</sup>

<sup>а</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

<sup>б</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: jtm@narod.ru, \*\*e-mail: nikon\_v@list.ru,

\*\*\*e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.06.2024 г.

После доработки 29.07.2024 г.

Принята к публикации 06.08.2024 г.

Рассматривается задача о движении гантелеобразного тела по горизонтальной шероховатой плоскости. Предполагается, что гантель представляет собой невесомый нерастяжимый стержень, в двух точках которого сосредоточены массы. Эти точки взаимодействуют с плоскостью по закону Кулона–Амонтона. Также предполагается, что на стержень действует сила, постоянная в связанной со стержнем системе отсчета, и эта сила перпендикулярна стержню. Определяются условия, при которых стержень находится в покое, а также условия, при которых он может осуществлять вращение с постоянной угловой скоростью вокруг той или иной из своих взаимодействующих с опорой точек. Выявляется связь между величиной угловой скорости равномерного вращения и силой, обеспечивающей такое вращение. Строятся и анализируются бифуркационные диаграммы.

*Ключевые слова:* сухое трение, бифуркации, равновесия, равномерные вращения, установившиеся движения

DOI: 10.31857/S1026351925010024, EDN: TAOUAP

**1. Введение.** Среди задач, собранных Э.Дж. Раусом в его монографии по статике [1], отдельная глава посвящена равновесиям систем, подверженных действию сил сухого трения. Среди прочих задач в разделе 189 обсуждается задача об однородном тонком нерастяжимом прямолинейном стержне, лежащем на шероховатой плоскости и понуждаемым к движению силой, параллельной плоскости и перпендикулярной самому стержню. В дальнейшем эта система рассматривалась Н.Е. Жуковским [2] в качестве примера в задаче об условии равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением. Эта задача оказалась отправной точкой

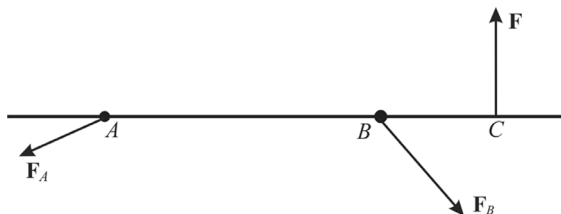


Рис. 1. Стержень на шероховатой горизонтальной плоскости под действием внешних сил.

для настоящего рассмотрения. Для упрощения вместо однородного стержня была рассмотрена пара массивных точек, соединенных невесомым нерастяжимым стержнем, лежащих на шероховатой плоскости и также как у Э.Дж. Рауса приводимых в движение силой, перпендикулярной стержню и действующей вдоль подстилающей плоскости. Кроме того, такая задача рассматривалась в работе Г.К. Пожарицкого [3], в которой были перечислены возможные типы движения и составлены уравнения движения. Свойства движения в случае равномерного распределения масс вдоль стержня изучались в [4] с помощью принципа максимума.

**2. Постановка задачи.** На невесомом нерастяжимом прямолинейном стержне в точках  $A$  и  $B$  расположены массы  $m_A$  и  $m_B$ . Стержень помещен на шероховатую горизонтальную плоскость, и в некоторой принадлежащей стержню точке  $C$  к нему приложена горизонтальная сила  $F$ , действующая перпендикулярно стержню (рис. 1). Рассматриваются два частных случая. В первом случае действующая сила  $F$  уравнивается силами сухого трения  $F_A$  и  $F_B$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно, и стержень находится в покое. Во втором случае предполагается, что стержень совершает равномерное вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Ставится задача определения условий, при которых стержень а) покоится, б) совершает равномерные вращения около одной из точек  $A$  или  $B$ , или около центра масс — точки  $O$ . Будем полагать, что расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $\ell$ , коэффициенты трения в точках  $A$  и  $B$  равны  $\mu_A$  и  $\mu_B$  соответственно. Предполагается также, что в отсутствие силы  $F$  стержень не напряжен.

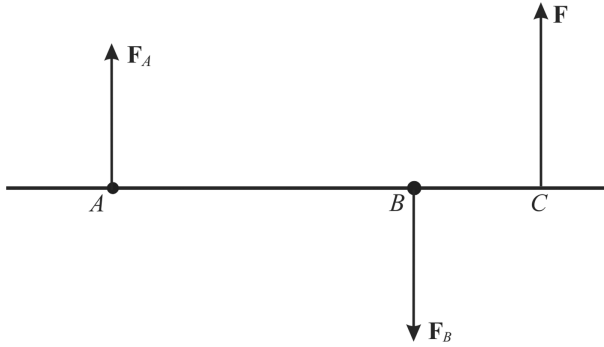
Введем правую декартову систему отсчета  $Ox$  с началом в центре масс. Будем считать, что ось  $Ox$  направлена вдоль стержня от  $A$  к  $B$ , а ось  $Oy$  ей перпендикулярна. В этой системе отсчета

$$\mathbf{OA} = (x_A, 0)^T, \quad \mathbf{OB} = (x_B, 0)^T, \quad x_A = -M_B \ell, \quad x_B = M_A \ell,$$

$$M_A = \frac{m_A}{m}, \quad M_B = \frac{m_B}{m}, \quad m = m_A + m_B, \quad M_A + M_B = 1.$$

Пусть также  $\mathbf{OC} = (c, 0)^T$  — радиус-вектор точки  $C$ , в которой приложена сила  $\mathbf{F} = (0, F)^T$ .

**3. Равновесие.** Условие равенства нулю суммы сил, приложенных к стержню в проекции на ось  $Ox$ , выполнено тождественно, а в проекции на ось  $Oy$  эта сумма имеет вид, см. рис. 2:



**Рис. 2.** Равновесие стержня на шероховатой горизонтальной плоскости под действием внешних сил.

$$F_A + F_B + F = 0 \quad (3.1)$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил, приложенных к стержню, вычисленных относительно точки  $A$ , имеет вид:

$$F_B \ell + F(c - x_A) = 0. \quad (3.2)$$

Закон Кулона—Амонтона применительно к точкам  $A$  и  $B$  записывается как

$$|F_A| \leq \mu_A m_A g, \quad |F_B| \leq \mu_B m_B g, \quad (3.3)$$

где  $g$  — величина ускорения свободного падения. Из (3.1) и (3.2) находим:

$$F_A = (\chi - 1 + M_B) F, \quad F_B = -(\chi + M_B) F, \quad \chi = \frac{c}{\ell}. \quad (3.4)$$

Подстановка соотношений (3.4) в (3.3) дает:

$$|(\chi - M_A) f| \leq K, \quad |(\chi + M_B) f| \leq 1, \quad f = \frac{F}{\mu_B m_B g}, \quad K = \frac{\mu_A m_A}{\mu_B m_B}. \quad (3.5)$$

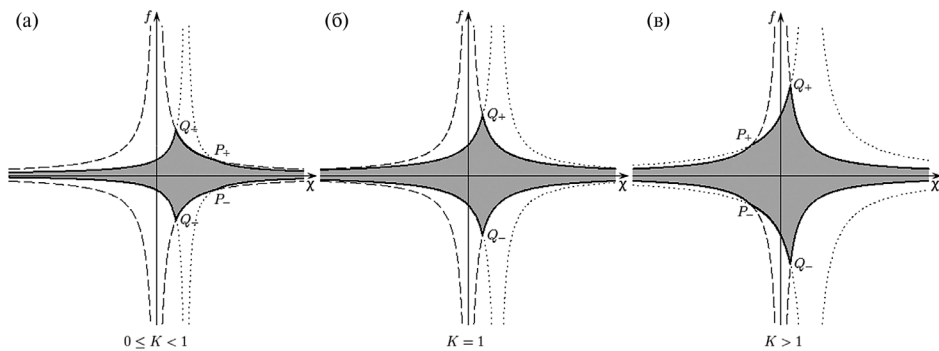
Область на плоскости  $(\chi, f)$ , задаваемая неравенствами (3.5), описывается как

$$-\min\left(\frac{K}{|\chi - M_A|}, \frac{1}{|\chi + M_B|}\right) \leq f \leq \min\left(\frac{K}{|\chi - M_A|}, \frac{1}{|\chi + M_B|}\right) \quad \forall \chi \in \mathcal{R}.$$

Таким образом, система находится в равновесии, если безразмерная координата  $\chi$  точки приложения силы и безразмерная сила  $f$  удовлетворяют неравенству (3.5).

Решение неравенств (3.5) зависит от отношения масс  $m_A$  и  $m_B$ , а также от значения параметра  $K$ :  $0 \leq K < \infty$ . Выделим три качественно различных случая:

- а)  $0 \leq K < 1$ ;
- б)  $K = 1$ ;
- в)  $K > 1$ .



**Рис. 3.** Множество точек на плоскости  $(\chi, f)$ , где выполнены неравенства (3.5), при  $0 \leq K < 1$  (а),  $K = 1$  (б),  $K > 1$  (в).

Для этих случаев области на плоскости параметров  $(\chi, f)$ , в которых выполнено неравенство (3.5), изображены на рис. 3.

Здесь

$$P_{\pm} = \left( M_A + \frac{K}{1-K}, \pm |1-K| \right), \quad Q_{\pm} = \left( M_A - \frac{K}{1+K}, \pm (1+K) \right).$$

Система находится в равновесии пока значения параметров остаются в закрашенной области. Выход из этой области возможен либо по причине нарушения первого из неравенств (3.5), либо по причине нарушения второго из неравенств (3.5). Точка  $A$  начинает скользить при выходе из означенной области через часть границы, не содержащей интервалы  $P_{\pm}Q_{\pm}$  для  $0 \leq K < 1$  (рис. 3), через часть границы, расположенную слева от точек  $Q_{\pm}$  для  $K = 1$ , и через часть границы, не содержащую интервалы  $P_{\pm}Q_{\pm}$  для  $K > 1$ . В остальных случаях начинает скользить точка  $B$ .

**4. Вращения вокруг точки  $A$ .** Пусть система равномерно вращается вокруг точки  $A$ . Тогда имеет место ситуация, изображенная на рис. 4. Силу трения в точке  $A$  представим как  $\mathbf{F}_A = (F_{Ax}, F_{Ay})$ . Скорость точки  $B$  перпендикулярна стержню  $AB$ . Сила трения скольжения в точке  $B$ , имеющая вид  $\mathbf{F}_B = (0, F_{By})$ , направлена в сторону, противоположную скорости точки  $B$ . Наконец, согласно закону Кулона–Амонтона:

$$|F_A| \leq m_A \mu_A g \Leftrightarrow F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 \leq m_A^2 \mu_A^2 g^2. \quad (4.1)$$

Итак, в силу равномерности вращения центростремительное ускорение точки  $B$  отлично от нуля и неизменно по величине, а угловое ускорение равно нулю. Из условия баланса сил в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно имеем:

$$-m_B \omega^2 \ell + F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} + F - \varepsilon_A m_B \mu_B g = 0, \quad \varepsilon_A = \text{sign}(F \cdot (c - x_A)). \quad (4.2)$$

По теореме об изменении момента количества движения, выписанной относительно точки  $A$ , имеем:

$$F \cdot (c - x_A) - \varepsilon_A m_B \mu_B g \ell = 0. \quad (4.3)$$

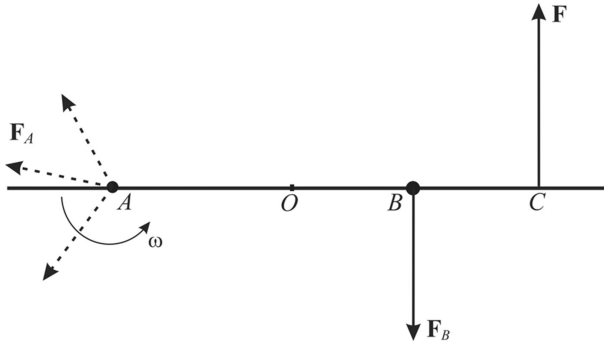


Рис. 4. Распределение сил в случае равномерного вращения стержня вокруг точки  $A$ .

Тогда из (4.3) следует:

$$F = \varepsilon_A m_B \mu_B g \frac{\ell}{c - x_A},$$

а из (4.2) после преобразований находим:

$$F_{Ax} = m_B \omega^2 \ell, \quad F_{Ay} = \varepsilon_A m_B \mu_B g \frac{c - x_B}{c - x_A}.$$

Тогда в силу (4.1) точка  $A$  остается неподвижной при выполнении условия:

$$\left(m_B \omega^2 \ell\right)^2 + \left(m_B \mu_B g \frac{c - x_B}{c - x_A}\right)^2 \leq m_A^2 \mu_A^2 g^2.$$

или в безразмерном виде

$$\Omega^4 + \frac{1}{K^2} \left( \frac{\chi - M_A}{\chi + M_B} \right)^2 \leq 1, \quad \Omega = \sqrt{\frac{M_B}{M_A \mu_A}} \frac{\ell}{g} \omega. \quad (4.4)$$

Рассмотрим соотношение (4.4) подробнее. Для границы области имеем:

$$\Omega = 0 \Rightarrow \chi = \pm \chi_A, \quad \chi_A = M_A - \frac{K}{K \pm 1},$$

$$\chi = 0 \Rightarrow \Omega = \pm \Omega_A, \quad \Omega_A = \sqrt[4]{1 - \frac{M_A^2}{K^2 M_B^2}}.$$

Кроме того,  $(M_A, 1)$  — точка локального максимума верхней ветви граничной кривой на плоскости  $(\chi, \Omega)$ , в то время как  $(M_A, -1)$  — точка локального минимума нижней ветви этой же кривой. Наконец, при  $K \geq 1$  граничные кривые при  $\chi \rightarrow \pm\infty$  асимптотически стремятся к прямым

$$\Omega = \pm \Omega_A^*, \quad \Omega_A^* = \sqrt[4]{1 - \frac{1}{K^2}}$$

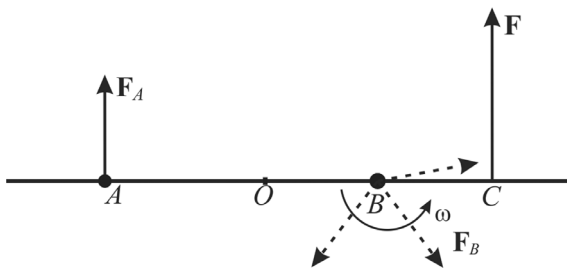


Рис. 5. Распределение сил в случае равномерного вращения стержня вокруг точки  $B$ .

**5. Вращения вокруг точки  $B$ .** Если же предположить, что система равномерно вращается вокруг точки  $B$ , то имеет место ситуация, изображенная на рис. 5.

В этом случае стержню  $AB$  перпендикулярна скорость точки  $A$ . Сила трения в точке  $A$  направлена против этой скорости и составляет:

$$\mathbf{F}_A = (0, \text{sign}(F \cdot (c - x_B)) m_A \mu_A g)^T.$$

Силу трения в точке  $B$  представим как  $\mathbf{F}_B = (F_{Bx}, F_{By})^T$ . Согласно закону Кулона—Амонтона:

$$|\mathbf{F}_B| \leq m_B \mu_B g \Leftrightarrow F_{Bx}^2 + F_{By}^2 \leq m_B^2 \mu_B^2 g^2. \quad (5.1)$$

В силу предположения о равномерности вращения аналогично центростремительное ускорение точки  $A$  отлично от нуля, а угловое ускорение равно нулю. Из условия баланса сил в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно имеем:

$$-m_A \omega^2 \ell + F_{Bx} = 0, \quad F_{By} + F + \varepsilon_B m_A \mu_A g = 0, \quad \varepsilon_B = \text{sign}(F \cdot (c - x_B)). \quad (5.2)$$

Из теоремы об изменении момента количества движения относительно точки  $B$  имеем:

$$F \cdot (c - x_B) - \varepsilon_B m_A \mu_A g \ell = 0. \quad (5.3)$$

Тогда из (5.3) следует:

$$F = \varepsilon_B m_A \mu_A g \frac{\ell}{c - x_B},$$

а из (5.2) после преобразований находим:

$$F_{Bx} = m_A \omega^2 \ell, \quad F_{By} = -\varepsilon_B m_A \mu_A g \frac{c - x_A}{c - x_B}.$$

В силу (5.1) точка  $B$  остается неподвижной при выполнении условия:

$$(m_A \omega^2 \ell)^2 + \left( -\varepsilon_B m_A \mu_A g \left( \frac{c - x_A}{c - x_B} \right) \right)^2 \leq m_B^2 \mu_B^2 g^2$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{M_A^2}{M_B^2} K^2 \Omega^4 + K^2 \left( \frac{\chi + M_B}{\chi - M_A} \right)^2 \leq 1. \quad (5.4)$$

Рассмотрим соотношение (5.4) подробнее. Имеем:

$$\Omega = 0 \Rightarrow \chi = \pm \chi_B^\pm, \quad \chi_B^\pm = \frac{\pm M_A - K M_B}{K \pm 1} = M_A - \frac{K}{K \pm 1},$$

$$\chi = 0, \Rightarrow \Omega = \pm \Omega_B, \quad \Omega_B = \sqrt[4]{\frac{M_B^2}{M_A^2} \left( \frac{1}{K^2} - \frac{M_B^2}{M_A^2} \right)}.$$

Кроме того, если

$$\Omega_B^{**} = \sqrt{\frac{1}{K} \frac{M_B}{M_A}},$$

то  $(-M_B, \Omega_B^{**})$  — точка локального максимума верхней ветви граничной кривой, в то время как  $(-M_B, -\Omega_B^{**})$  — точка локального минимума нижней ветви этой же кривой. Наконец, при  $K \leq 1$  граничные кривые при  $\chi \pm \infty$  асимптотически стремятся к горизонтальным прямым

$$\Omega_\pm^* = \pm \Omega_B^*, \quad \Omega_B^* = \sqrt[4]{\frac{1 - K^2}{K^2} \frac{M_B^2}{M_A^2}}.$$

**6. Вращения вокруг центра масс  $O$ .** Исследуем вопрос о том, при каких условиях гантель допускает вращения вокруг центра масс — точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Из уравнений движения точек  $A$  и  $B$  в проекциях на ось  $Ox$  имеем:

$$-m_A x_A \omega^2 = T = m_B x_B \omega^2,$$

где  $T$  — натяжение стержня. Отсюда

$$-m_A x_A = m_B x_B. \quad (6.1)$$

Далее, поскольку проекция суммы сил на ось  $Oy$  при равномерном вращении равна нулю, имеем:

$$F + \varepsilon (m_A \mu_A g - m_B \mu_B g) = 0, \quad \varepsilon = \text{sign}(F \cdot c). \quad (6.2)$$

Наконец, из уравнения баланса момента имеем

$$F \cdot c - \varepsilon (m_A \mu_A x_A g - m_B \mu_B x_B g) = 0, \quad (6.3)$$

где, напомним,  $(c, 0)^T$  — координаты точки  $C$  приложения силы  $\mathbf{F}$ .

Система (6.1)–(6.3) линейна и однородна относительно неизвестных  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $F$ . Для того чтобы существовало нетривиальное решение, определитель отвечающей ей матрицы должен обращаться в нуль:

$$\det \begin{pmatrix} x_A & x_B & 0 \\ \varepsilon \mu_A g & -\varepsilon \mu_B g & 1 \\ -\varepsilon \mu_A x_A g & \varepsilon \mu_B x_B g & c \end{pmatrix} = -\varepsilon g [(x_A \mu_B + x_B \mu_A) c + x_A x_B (\mu_A + \mu_B)] = 0,$$

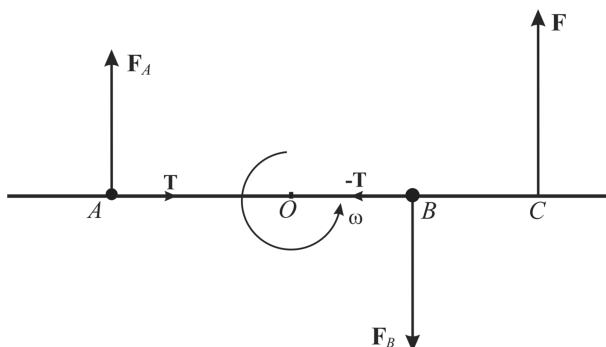


Рис. 6. Распределение сил в случае равномерного вращения стержня вокруг точки  $O$ .

откуда

$$c = -x_A x_B \frac{\mu_A + \mu_B}{x_A \mu_B + \mu_A x_B}.$$

Опираясь на введенные выше обозначения, имеем:

$$\chi = M_B \ell M_A \ell \frac{\mu_A + \mu_B}{-M_B \ell \mu_B + \mu_A M_A \ell} \frac{1}{\ell} = \frac{(\mu_A + \mu_B) M_A M_B}{\mu_A M_A - \mu_B M_B}.$$

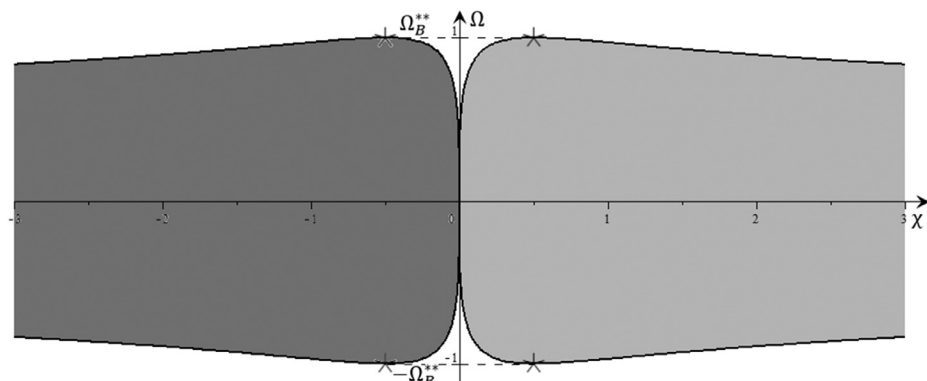
Примечательно, что при заданной величине вынуждающей силы  $F$  и точке ее приложения, определяемой равенством (6.4) вращение возможно с произвольной угловой скоростью, направление которой согласовано с направлением действия силы  $F$ .

**7. Бифуркационные диаграммы.** Для некоторых значений параметров бифуркационные диаграммы на плоскости  $(\chi, \Omega)$  изображены на рис. 7–9. Для значений параметров из светло-серой области существуют равномерные вращения системы около точки  $A$ . Для значений параметров из темно-серой области существуют равномерные вращения системы около точки  $B$ .

Примем  $\Omega$  в качестве бифуркационного параметра. Ограничимся изображением лишь тех случаев, когда  $m_A = m_B$ .

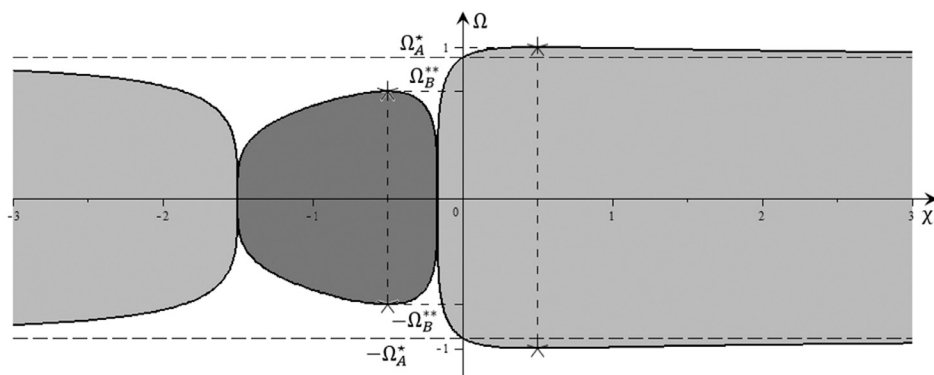
**7.1. Случай  $K=1$ .** При  $\Omega < -1$  равномерные вращения вокруг концов гантели не могут быть реализованы. Далее, при  $\Omega = -1$  существуют ровно две силы  $F$ , обеспечивающие равномерное вращение гантели вокруг точек  $A$  и  $B$  соответственно с данной угловой скоростью. При каждом значении  $\Omega$ :  $-1 \leq \Omega \leq 1$  силы  $F$ , обеспечивающие равномерное вращение гантели вокруг точек  $A$  и  $B$ , составляют целые множества  $\mathcal{F}_A$  и  $\mathcal{F}_B$ , имеющие общие точки лишь при  $\Omega = 0$ . При каждом  $\Omega \neq 0$  каждое из этих множеств представляет собой отрезок. При  $\Omega \rightarrow 0$  один из концов таких отрезков стремится к точке  $(0, 0)$ , а для другого  $\chi \rightarrow \infty$  для множества  $\mathcal{F}_A$  и к  $\chi \rightarrow \infty$  для множества  $\mathcal{F}_B$ . С дальнейшим возрастанием  $\Omega$  эти множества сокращаются и, наконец, исчезают при  $\Omega = 1$ . Иначе говоря, для каждого наперед заданного значения  $\Omega$ :  $-1 < \Omega < 1$  существуют целые непрерывные семейства приложенных сил, обеспечивающих вращение с указанной угловой скоростью.



Рис. 7. Случай  $m_A = m_B$ ,  $K = 1$ .

7.2. Случай  $K > 1$ . Для случая  $K > 1$  (рис. 8) ситуация несколько иная. При  $\Omega < -1$  равномерные вращения вокруг хотя бы одной из точек  $A$  и  $B$  невозможны. При  $\Omega = -1$  рождается связная компонента  $\mathcal{F}_{1A}$  множества  $\mathcal{F}_A$ , отвечающего вращениям вокруг точки  $A$ . Эта компонента остается единственной при  $-1 < \Omega \leq -\Omega_A^*$ . При  $\Omega = -\Omega_A^*$  “приходит из минус бесконечности” вторая связная компонента  $\mathcal{F}_{2A}$ . С возрастанием  $\Omega$  до 0 обе эти компоненты увеличиваются. Но после прохождения параметром  $\Omega$  нулевого значения эти компоненты начинают уменьшаться. При  $\Omega = \Omega_A^*$  компонента  $\mathcal{F}_{2A}$  исчезает. Следом за ней, при  $\Omega = 1$  исчезает и компонента  $\mathcal{F}_{1A}$ . Вместе с тем при  $\Omega = -\Omega_B^{**}$  рождается множество  $\mathcal{F}_B$ , отвечающее вращениям вокруг точки  $A$ . Это множество состоит из одной континуальной компоненты  $\mathcal{F}_B$ . С возрастанием  $\Omega$  до 0 компонента  $\mathcal{F}_B$  увеличивается. При  $\Omega = 0$  она приходит в соприкосновение с компонентами  $\mathcal{F}_{1A}$  и  $\mathcal{F}_{2A}$ . При дальнейшем возрастании параметра  $\Omega$  компонента  $\mathcal{F}_B$  уменьшается и исчезает при  $\Omega = \Omega_B^{**}$ .

7.3. Случай  $0 < K < 1$ . Наконец для случая, когда  $0 < K < 1$  (рис. 9), при  $\Omega < -\Omega_B^{**}$  равномерные вращения вокруг хотя бы одной из точек  $A$  и  $B$  существовать не могут. Далее, при  $\Omega = -\Omega_B^{**}$  появляется возможность равномерных

Рис. 8. Случай  $m_A = m_B$ ,  $K = 2$ .

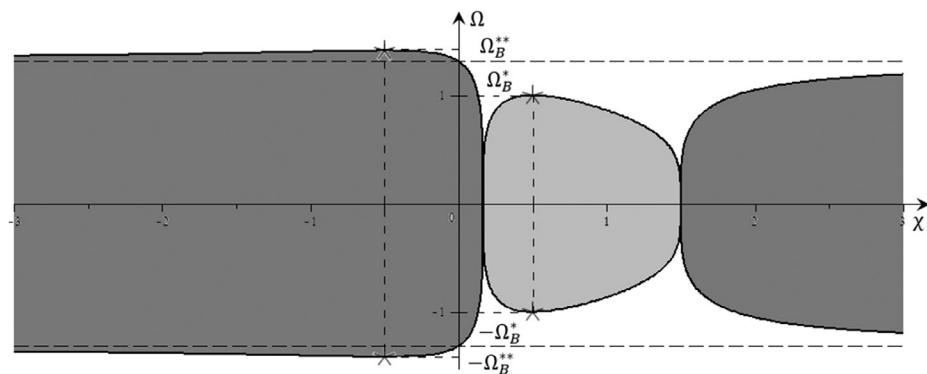


Рис. 9. Случай  $m_A = m_B$ ,  $K = 1/2$ .

вращений вокруг точки  $B$ : рождается связная компонента  $\mathcal{F}_{1B}$  множества  $\mathcal{F}_B$ . Эта компонента остается единственной пока  $\Omega < -\Omega_B^*$ .

При  $\Omega = -\Omega_B^*$  с бесконечности “приходит”  $\mathcal{F}_{2B}$  — вторая компонента множества  $\mathcal{F}_B$ . Обе компоненты увеличиваются при  $\Omega \rightarrow 0$ . Однако при дальнейшем увеличении  $\Omega$  компоненты  $\mathcal{F}_{1B}$  и  $\mathcal{F}_{2B}$  начинают уменьшаться. При  $\Omega = \Omega_B^*$  исчезает компонента  $\mathcal{F}_{2B}$ , а при  $\Omega = \Omega_B^{**}$  — и компонента  $\mathcal{F}_{1B}$ .

Вместе с тем, при  $\Omega = -1$  рождается связная компонента  $\mathcal{F}_A$ , увеличивающаяся при  $\Omega \rightarrow 0$  и соприкасающаяся с компонентами  $\mathcal{F}_{1B}$  и  $\mathcal{F}_{2B}$  при  $\Omega = 0$ . При дальнейшем возрастании  $\Omega$  компонента  $\mathcal{F}_A$  уменьшается, стягивается в точку при  $\Omega = 1$  и исчезает при  $\Omega > 1$ .

**8. Общие замечания и выводы.** Исследования движения систем при наличии сухого трения имеют давнюю историю (см. [5]). Систематическое исследование систем с трением восходит к классическим работам Дж.Х. Джеллета [6], П. Пэнлеве [7], Е.А. Болотова [8] и уже упомянутых работ Э.Дж. Рауса [1] и Н.Е. Жуковского [2]. Заметим, что именно работа над переводом соответствующего раздела монографии [1] побудила интерес авторов к рассмотрению изучаемой задачи. Следует заметить, что по всей видимости, задачи с трением были предметом отдельного внимания в учебных курсах по механике, по крайней мере в Англии, поскольку они почти каждый год встречаются в вариантах выпускных состязаний (“Tripos”) в местных университетах. Из современных книг по механике систем с трением можно выделить монографии [9–13].

Среди многочисленных работ по исследованию движения систем с трением выделим публикации [14, 15], посвященные исследованию естественных обобщений “скамы Жуковского” (“бипода”), а также ряд публикаций, посвященных различным аспектам динамики “трипода” — твердого тела, опирающегося на поверхность в трех точках [16–18]. Отдельный круг исследований посвящен системам с более чем тремя точками контакта [19–25], возникающих, в частности при изучении керлинга [26–29].

Наконец, заметим, что имеется ряд работ, в которых развивалась общая теория существования и бифуркаций неизолированных в общем случае равновесий систем с сухим трением [30–34], и был рассмотрен ряд примеров

[35–44]. Нарботанные методики были использованы при выполнении настоящего исследования.

Движение стержня с неравномерным распределением масс по плоскости при наличии анизотропного трения изучалось в [45]. Установлена зависимость траектории центра масс от его смещения относительно геометрического центра стержня.

Влияние асимметричного ортотропного трения на движение материальной точки по инерции изучалось в [46]. В частности, в этой работе была решена задача о равновесии и начале движения двухмассовой системы.

Работа первого (пункты 1, 2 и 8) и третьего (пункты 3, 4 и 5) авторов выполнена при поддержке РНФ, грант № 24-21-20143.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Routh E.J.* A treatise on analytical statics with numerous examples. V. 1. Second edition. Cambridge: University Press, 1909. 392 p.
2. Жуковский Н.Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч. Т. 1. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. С. 339–354.
3. Пожарицкий Г.К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 391–406.
4. Смышляев А.С., Черноусько Ф.Л. Условия равновесия стержня на шероховатой плоскости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 177–182.
5. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2014. № 2. С. 21–31.
6. *Jellett J.H.* A Treatise on the theory of friction. Dublin: Hodges, Foster, and Co & L.: Macmillan and Co. 1872. 220 p.
7. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. Paris: A.Hermann, 1895. 132 p.
8. Болотовъ Е.А. О движеніи матерьяльной плоской фигуры, стѣсненномъ связями съ треніемъ // Матем. сб. 1906. Т. 25. Вып. 4. С. 562–708.
9. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. Москва–Ижевск: Издательство “РХД”, 2010. 184 с.
10. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. Москва–Ижевск: Издательство “РХД”, 2011. 304 с.
11. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Избранные задачи механики систем с сухим трением. М.: Физматлит, 2013. 200 с.
12. Розенблат Г.М. Динамические системы с сухим трением. Москва–Ижевск: РХД. 2006. 203 с.
13. Розенблат Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: Изд-во URSS, 2011. 204 с.
14. Иванов А.П. Об устойчивости “скамейки” Жуковского // Докл. РАН. 2015. Т. 464. Вып. 2. С. 160–161.
15. Розенблат Г.М. О равновесии “скамейки” Жуковского // Докл. РАН. 2017. Т. 472. Вып. 6. С. 1–7.
16. *Field P.* On the motion of a disc with three supports on a rough plane // Phys. Rev. 1912. V. 35. P. 177–184.
17. Розенблат Г.М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // Докл. РАН. 2010. Т. 435. № 4. С. 475–478.

18. Розенблат Г.М. О движении тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 254–258.
19. Wittenburg J. Ebene Bewegungen bei flächenhaft verteilten Reibungskräften // Z. Angew. Math. Phys. 1970. Bd. 50. P. 637–640.
20. Ишлинский А.Ю., Соколов Е.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.
21. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. № 24. P. 248302.  
<http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.248302>
22. Weidman P.D., Malhotra C.P. Regimes of terminal motion of sliding spinning disks // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. № 26. P. 264303.  
<http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.264303>
23. Трещев Д.В., Ердаскова Н.Н., Иванова Т.Б. О финальном движении цилиндрических тел по шероховатой плоскости // Нелин. дин. 2012. Т. 8. Вып. 3. С. 585–603.
24. Borisov A.V., Erdakova N.N., Ivanova T.B., Mamaev I.S. The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn. 2014. V. 19. № 6. P. 607–634.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354714060021>
25. Borisov A.V., Karavaev Yu.L., Mamaev I.S., Erdakova N.N., Ivanova T. B., Tarasov V.V. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20. № 5. P. 518–541.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715050020>
26. Johnston G.W. The dynamics of a curling stone // Can. Aeronaut. Space J. 1981. V. 27. № 2. P. 144–160.
27. Denny M. Curling rock dynamics // Canadian J. Phys. 1998. V. 76. № 4. P. 295–304.
28. Penner A.R. The physics of sliding cylinders and curling rocks // Amer. J. Phys. 2001. V. 69. № 3. P. 332–339.  
<https://doi.org/10.1119/1.1309519>
29. Иванов А.П., Шувалов Н.Д. О движении тяжелого тела с кольцевым основанием по горизонтальной плоскости и загадках керлинга // Нелин.дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 521–530.
30. Черноусько Ф.Л. Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.
31. Leine R.I., van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // Europ. J. Mechanics A. Solids. 2006. V. 25. № 4. P. 595–616.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
32. Leine R.I. Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // Physica D. 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.  
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
33. Ivanov A. Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // Regul. Chaotic Dyn. 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354709060045>
34. Burov A.A. On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta Mechanica. 2010. V. 212. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
35. Буров А.А., Якушев И.А. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающемся обруче с сухим трением // ПММ. 2014. Т. 78. № 5. С. 645–655.

36. Баландин Д.В., Шалимова Е.С. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на обруче, равномерно вращающемся вокруг наклонной оси, при наличии сухого трения // ПММ. 2015. Т. 79. №. 5. С. 627–634.
37. Burov A.A., Shalimova E.S. On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20. № 3. P. 225–233. <https://doi.org/10.1134/S1560354715030028>
38. Буров А.А., Шалимова Е.С. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболоидальной чаше с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 30–42.
39. Шалимова Е.С. О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.
40. Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С. Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 3. С. 269–272. <https://doi.org/10.7868/S0869565217210071>
41. Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С. Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 528–543. <https://doi.org/10.31857/S0032823521040032>
42. Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С. Об относительных равновесиях на поверхности сферической полости равномерно вращающегося гравитирующего шара // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 857–871. <https://doi.org/10.31857/S0032823522060029>
43. Буров А.А., Никонов В.И. Относительные равновесия тяжелой точки на равномерно вращающейся наклонной плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 1. С. 156–165. <http://doi.org/10.31857/S0572329922600499>
44. Буров А.А., Никонов В.И. Об относительных равновесиях тяжелой бусинки на равномерно вращающейся шероховатой спице // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 99–105. <http://doi.org/10.31857/S0572329922600220>
45. Дмитриев Н.Н. Движение стержня со смещенным центром масс по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 4. С. 368–374.
46. Дмитриев Н.Н. Движение материальной точки и равновесие двухмассовой системы в условиях асимметричного ортотропного трения // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 6. С. 565–574.

## ON THE EQUILIBRIA AND UNIFORM ROTATIONS OF A DUMBBELL-SHAPED BODY ON A ROUGH HORIZONTAL PLANE WITH TWO CONTACT POINTS

A. A. Burov<sup>a,\*</sup>, V. I. Nikonov<sup>a,\*\*</sup>, E. S. Shalimova<sup>a,b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>FRC CSC RAS, Moscow, Russia,

<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail: [jtm@narod.ru](mailto:jtm@narod.ru), \*\*e-mail: [nikon\\_v@list.ru](mailto:nikon_v@list.ru),

\*\*\*e-mail: [ekateryna-shalimova@yandex.ru](mailto:ekateryna-shalimova@yandex.ru)

**Abstract** – A problem of motion of a dumbbell-shaped body on a horizontal rough plane is considered. It is assumed that the dumbbell is a weightless inextensible rod, with masses being concentrated at two points of it, and there is dry friction between these points and the plane. It is also assumed that a constant force acts perpendicular to the rod on some fixed point on it. The conditions under which the rod is at rest, as well as the conditions under which the rod uniformly rotates around one of its points of support, are determined. The relationship between the magnitude of the angular velocity of uniform rotation and the force providing such a rotation is revealed. Bifurcation diagrams are constructed and analyzed.

**Keywords:** dry friction, bifurcations, equilibria, uniform rotations, steady movements

## REFERENCES

1. *Routh E.J.* A treatise on analytical statics with numerous examples. V.1. Second edition. Cambridge: University Press. 1909. 392 p.
2. *Zhukovskii N.E.* Equilibrium conditions for a rigid body based on a fixed plane with a certain area and able to move along this plane with friction // Collected Works: V. 1. Moscow-Leningrad: Gostekhteorizdat. 1949. P. 339–354 (in Russian).
3. *Pozharitskii G.K.* Extension of the principle of Gauß to systems with dry (Coulomb) friction // J. Appl. Math. Mech. 1961. V. 25. № 3. P. 586–607.
4. *Smyshlyayev A.S., Chernousko F.L.* The equilibrium conditions of a rod on a rough plane // J. Appl. Math. Mech. 2002. V. 66. № 2. P. 165–170.
5. *Zhuravlev V.F.* 500 years of the history of the dry friction law // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2014. № 2. P. 21–31 (in Russian).
6. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. Dublin: Hodges, Foster, and Co & L.: Macmillan and Co. 1872. 220 p.
7. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. Paris: A.Hermann. 1895. 132 p.
8. *Bolotov E.A.* The motion of a material plane figure subject to constraints with friction // Mat. Sbornik. 1906. V. 25. № 4. P. 562–708 (in Russian).
9. *Andronov V.V., Zhuravlev V.F.* Dry friction in problems of mechanics. R&C Dynamics, Institute of Computer Science, Moscow–Izhevsk. 2010. 184 p (in Russian).
10. *Ivanov, A. P.* Fundamentals of the theory of systems with friction. R&C Dynamics, Institute of Computer Science, Moscow – Izhevsk. 2011. 304 p (in Russian).
11. *Sumbatov A. S., Yunin E. K.* Selected problems of mechanics of systems with dry friction. Fizmatlit. Moscow. 2013. 200 p (in Russian).
12. *Rozenblat G.M.* Dynamic systems with dry friction. R&C Dynamics, Institute of Computer Science, Moscow–Izhevsk. 2006. 203 p (in Russian).
13. *Rozenblat G.M.* Dry friction and unilateral constraints in solid mechanics. URSS. Moscow. 2011. 204 p (in Russian).
14. *Ivanov A.P.* Stability of Zhukovskii bench // Dokl. Phys. 2015. V. 60. No. 9, P. 405–406.
15. *Rozenblat G.M.* Equilibrium of a Zhukovskii bench // Doklady Physics. 2017. V. 62. № 2. P. 95–101.
16. *Field P.* On the motion of a disc with three supports on a rough plane // Phys. Rev. 1912. V. 35. P. 177–184.

17. *Rozenblat G.M.* The integration of equations of motion of a body with three supports on a rough plane // *Dokl. Phys.* 2010. V. 55. № 12. P. 602–605.
18. *Rozenblat G.M.* The motion of a body supported at three points on a rough plane // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 2. P. 176–179.
19. *Wittenburg J.* Ebene Bewegungen bei flächenhaft verteilten Reibungskräften // *Z. Angew. Math. Phys.* 1970. Bd. 50. P. 637–640.
20. *Ishlinskii A.Yu., Sokolov B.N., Chernousko F.L.* On motion of plane bodies with dry friction // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1981. № 4. P. 17–28 (in Russian).
21. *Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D.* Frictional coupling between sliding and spinning motion // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. № 24. Art. 248302. P. 4.
22. *Weidman P.D., Malhotra C.P.* Regimes of terminal motion of sliding spinning disks // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 95. № 26. Art. 264303. P. 4.
23. *Treschev D.V., Erdakova N.N., Ivanova T.B.* On the final motion of cylindrical solids on a rough plane // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2012. V. 8. № 3. P. 585–603 (in Russian).
24. *Borisov A.V., Erdakova N.N., Ivanova T.B., Mamaev I.S.* The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. V. 19. № 6. P. 607–634.
25. *Borisov A.V., Karavaev Yu.L., Mamaev I.S., Erdakova N.N., Ivanova T. B., Tarasov V.V.* Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 5. P. 518–541.
26. *Johnston G.W.* The dynamics of a curling stone // *Can. Aeronaut. Space J.* 1981. V. 27. № 2. P. 144–160.
27. *Denny M.* Curling rock dynamics // *Canadian J. Phys.* 1998. V. 76. № 4. P. 295–304.
28. *Penner A.R.* The physics of sliding cylinders and curling rocks // *Amer. J. Phys.* 2001. V. 69. № 3. P. 332–339.
29. *Ivanov A.P., Shuvalov N.D.* On the motion of a heavy body with a circular base on a horizontal plane and riddles of curling // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2011. Vol. 7. № 3. P. 521–530 (in Russian).
30. *Chernousko F.L.* Equilibrium conditions for a body on a rough plane // *Izv. RAN. MTT [Mechanics of Solids]*. 1988. № 6. P. 6–17 (in Russian).
31. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mechanics A. Solids*. 2006. V. 25. P. 595–616.
32. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*. 2006. V. 223. P. 121–137.
33. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
34. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta mechanica*. 2010. V. 212. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
35. *Burov A.A., Yakushev I.A.* Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bead on a rotating hoop with dry friction // *J. Appl. Math. Mech.* 2014. V. 78. № 5. P. 460–467.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.03.004>
36. *Balandin D.V., Shalimova E.S.* Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bead on a hoop uniformly rotating about an inclined axis with dry friction // *J. Appl. Math. Mech.* 2015. V. 79. № 5. P. 440–445. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.004>
37. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20. № 3. P. 225–233.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715030028>



38. *Burov, A.A., Shalimova, E.S.* Bifurcations of relative equilibria of a heavy bead on a rotating parabolic bowl with dry friction // *Mech. Solids*, 2016. V. 51. P. 395–405. <https://doi.org/10.3103/S0025654416040038>
39. *Shalimova E.S.* On the motion of a material point on a rotating sphere with dry friction (the case of the vertical axis) // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016. V. 12. № 3. P. 369–383 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1603006>
40. *Burov A.A., Kosenko I.I., Shalimova E.S.* Relative equilibria of a massive point on a uniformly rotating asteroid // *Dokl. Phys.* 2017. V. 62. № 7. P. 359–362. <https://doi.org/10.1134/S1028335817070084>
41. *Burov A.A., Nikonov V.I., Shalimova E.S.* On the motion of a point particle on a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity in the presence of dry friction // *Mechanics of Solids*. 2021. V. 56. № 8. P. 1587–1598. <https://doi.org/10.3103/S0025654421080045>
42. *Burov A.A., Nikonov V.I., Shalimova E.S.* On relative equilibria on the surface of a spherical cavity inside a uniformly rotating gravitating ball // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 8. P. 1862–1872. <https://doi.org/10.3103/S002565442208009X>
43. *Burov A. A., Nikonov V. I.* Relative equilibria of a heavy point on a uniformly rotating inclined plane // *Mechanics of Solids*. 2023. V. 58. No. 1. P. 131–139. <https://doi.org/10.3103/S0025654422600817>.
44. *Burov A. A., Nikonov V. I.* On the relative equilibria of a heavy bead on a uniformly rotating rough spoke // *Mechanics of Solids*. 2023. V. 58. No. 3. P. 748–753. <https://doi.org/10.3103/S0025654422600763>.
45. *Dmitriev N.N.* Motion of rod with shifted center of mass over plane with anisotropic friction // *Journal of friction and wear*. 2007. V. 28. № 4. P. 368–374.
46. *Dmitriev N.N.* Motion of material point and equilibrium of two-mass system under asymmetric orthotropic friction // *Journal of friction and wear*. 2013. V. 34. № 6. P. 429–437.