

УДК 539.376; 539.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УЧЕТЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОНЕНТОВ КОМПОЗИЦИИ

© 2025 г. А. П. Янковский<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Россия

\*E-mail: yankovsky\_ap@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

После доработки 28.06.2024 г.

Принята к публикации 02.07.2024 г.

Разработана численно-аналитическая модель структурной механики многонаправленно армированных металлокомпозитов, работающих в условиях кратковременной ползучести. Материалы компонентов металлокомпозиции однородны и изотропны; учитываются их термочувствительность и термоупругопластическое деформирование. Пластическое поведение фаз композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. В качестве параметра поврежденности компонентов металлокомпозиции используется их относительная механическая деформация, накопленная в процессе нагружения, – деформационный критерий разрушения при кратковременной ползучести металлов. Для построения указанной математической модели в силу существенной ее физической нелинейности применен алгоритм переменных шагов по времени. Линеаризация определяющих уравнений для компонентов и металлокомпозиции в целом на каждом шаге по времени осуществляется с применением метода, аналогичного методу секущего модуля. На примере безмоментных цилиндрических оболочек продемонстрировано: в силу существенно физической нелинейности моделируемой задачи варьирование структуры армирования в металлокомпозитных конструкциях, работающих в условиях кратковременной ползучести, оказывает существенно большее влияние на их механический отклик, чем при работе в условиях термоупругого деформирования. С повышением температуры эксплуатации металлокомпозитного изделия это влияние резко возрастает. При некоторых, в частности рациональных, структурах армирования материалы металлокомпозиции изделия могут деформироваться, проявляя признаки, присущие ограниченной ползучести. При таких структурах армирования конструкция может эффективно работать и в условиях длительного нагружения, а не только при кратковременной ползучести.

**Ключевые слова:** многонаправленное армирование, кратковременная ползучесть, термоупругопластическое деформирование, термочувстви-

тельность, металлокомпозиция, структурная модель, алгоритм шагов по времени

DOI: 10.31857/S1026351925010012, EDN: TAPEXF

**1. Введение.** Изделия из композиционных материалов (КМ) активно используются в современной инженерной практике [1–5]. При этом в процессе эксплуатации они часто подвергаются высокointенсивному термосиловому нагружению [2, 3, 5, 6], что вызывает неупругое деформирование компонентов их композиции [2, 3, 6–12], в том числе и деформации ползучести [1, 7, 8, 11, 13–19]. В силу этого актуальной является проблема моделирования ползучести как материалов фаз композиций [7, 8, 13–15, 18–22], так и армированных сред [17, 23–29], причем в общем случае при учете их пластического деформирования [11, 13–15, 26, 29]. На сегодняшний день последняя часть этой проблемы, касающаяся КМ, находится, по сути, на стадии становления.

Так, в [24, 25] моделировалась ползучесть однонаправленно армированных сред, причем рассматривались либо частные случаи нагружения [24], либо вязкое деформирование только одного из компонентов композиции – связующего материала [25]. В работах же [27, 28] были разработаны модели многонаправленно армированных КМ с плоскопараллельными и пространственными структурами армирования, компоненты композиции которых деформируются в условиях установившейся анизотропной ползучести. В [29] предложена модель неустановившейся ползучести перекрестно армированной среды, деформирование фаз композиции которой описывается уравнениями состояния нелинейно-наследственной теории [19]. В рамках последней структурной теории удалось учесть механическое поведение компонентов композиции на первой и второй стадиях ползучести, т.е. на стадии упрочнения и стадии установившейся ползучести. Однако до сих пор еще не разработаны модели деформирования многонаправленно армированных КМ, в рамках которых учитывалась бы и третья стадия ползучести (стадия предразрушения) их субструктурных элементов.

В силу всего вышеизложенного настоящее исследование посвящено построению структурной модели перекрестно армированных металлокомпозитов, работающих в условиях кратковременной ползучести при учете возможного пластического деформирования их компонентов композиции, а также изучению влияния структур армирования на время начального разрушения тонкостенных элементов конструкций типа безмоментных КМ-оболочек, эксплуатирующихся в указанных условиях.

**2. Структурная модель кратковременной ползучести многонаправленно армированного КМ при учете его пластического деформирования.** Предполагаем, что композит состоит из металлического связующего материала, усиленного по разным направлениям  $N$  семействами металлических волокон (проволок) с плотностями армирования  $\mu_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Согласно традиционным представлениям [7, 8, 13–15, 18, 19, 21, 22], считаем, что скорости малых деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  изотропного  $k$ -го компонента композиции можно представить в виде суммы скоростей упругих  $\dot{e}_{ij}^{(k)}$ , несжимаемых пластических  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  и температурных  $\dot{\delta}_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}$  деформаций, а также скоростей несжимаемых деформаций ползучести  $\dot{c}_{ij}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} &= \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} + \dot{c}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ (\dot{p}_{ll}^{(k)} &= \dot{c}_{ll}^{(k)} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)} = \alpha_k \dot{\Theta}), \quad 0 \leq k \leq N,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент линейного теплового расширения  $k$ -го материала композиции ( $k=0$  – связующая матрица,  $k \geq 1$  – арматура  $k$ -го семейства);  $\Theta$  – температура металлокомпозиции;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; точка сверху означает частную производную по времени  $t$ . Для тензорных величин по повторяющимся нижним индексам осуществляется суммирование от 1 до 3.

Используя разложение упругих деформаций  $e_{ij}^{(k)}$  на девиаторную  $\bar{e}_{ij}^{(k)}$  и шаровую  $\delta_{ij}e_0^{(k)}$  составляющие ( $e_0^{(k)} = e_{ll}^{(k)}/3$ ,  $\bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}e_0^{(k)}$ ), закон Гука для  $k$ -й фазы композиции можно записать так [19]:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G_k}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.2)$$

где

$$s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{\sigma_{ll}^{(k)}}{3}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + v_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2v_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$  – напряжения в  $k$ -м компоненте композиции,  $E_k$  и  $v_k$  – модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона материала этого компонента, которые в общем случае могут зависеть от температуры:  $E_k = E_k(\Theta)$  и  $v_k = v_k(\Theta)$ .

Пластическое деформирование  $k$ -го материала композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением, причем поверхность нагружения  $f_k = 0$  соответствует критерию текучести Мизеса [8, 19]:

$$f_k(T_k, \chi_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, \Theta) = 0, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.4)$$

или, что то же самое,

$$T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.5)$$

где

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.6)$$

$T_k$  – интенсивность касательных напряжений в  $k$ -м субструктурном элементе композиции,  $\tau_s^{(k)}$  – предел текучести при чистом сдвиге для того же материала,  $\chi_k$  – параметр упрочнения (параметр Одквиста),  $t_0$  – начальный момент времени.

На основании ассоциированного закона пластического течения при учете соотношений (2.4) и (2.6) в случае активного нагружения  $k$ -го компонента композиции имеем (см. равенство (6) в [30]):

$$\dot{p}_{ij}^{(k)} = \frac{s_{lm}^{(k)} \dot{p}_{lm}^{(k)}}{2\tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)} s_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.7)$$

При этом для свертки в правой части соотношения (2.7) имеем выражение (см. вывод равенства (18) в [30]):

$$s_{lm}^{(k)} \dot{p}_{lm}^{(k)} = (1 + g_k)^{-1} \left[ s_{lm}^{(k)} \left( \dot{e}_{lm}^{(k)} + \dot{p}_{lm}^{(k)} + \delta_{lm} \alpha_k \dot{\Theta} \right) - G_k^{-1} \tau_s^{(k)} \tau_{\Theta}^{(k)} \dot{\Theta} \right], \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.8)$$

где

$$g_k \equiv g_k(\chi_k, \Theta) = G_k^{-1} \bar{G}_k(\chi_k, \Theta), \quad \bar{G}_k \equiv \tau_{\chi}^{(k)}(\chi_k, \Theta) = \frac{\partial \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)}{\partial \chi_k},$$

$$\tau_{\Theta}^{(k)} \equiv \tau_{\Theta}^{(k)}(\chi_k, \Theta) = \frac{\partial \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)}{\partial \Theta}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.9)$$

$\bar{G}_k$  – касательный модуль  $k$ -го материала композиции при чистом сдвиге.

После подстановки выражения (2.8) в равенство (2.7) при учете разложения (2.1) получим следующее представление для скоростей пластических деформаций:

$$\dot{p}_{ij}^{(k)} = A_k \left[ s_{lm}^{(k)} \left( \dot{\varepsilon}_{lm}^{(k)} - \dot{c}_{lm}^{(k)} \right) - G_k^{-1} \tau_{\Theta}^{(k)} \tau_s^{(k)} \dot{\Theta} \right] s_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.10)$$

где

$$A_k = A_k(\chi_k, \Theta) \equiv \left\{ 2 \tau_s^{(k)2}(\chi_k, \Theta) \left[ 1 + g_k(\chi_k, \Theta) \right] \right\}^{-1}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.11)$$

Добавим к обеим частям равенства (2.10) величину  $\dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{c}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} (e_0^{(k)} + \alpha_k \dot{\Theta})$  и из правой части исключим  $\dot{e}_{ij}^{(k)}$  и  $e_0^{(k)}$ , используя закон Гука (2.2), тогда при учете в левой части преобразованного соотношения (2.10) разложения (2.1) будем иметь

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \left( \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K_k} + \alpha_k \dot{\Theta} \right) + \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G_k} + \dot{c}_{ij}^{(k)} + \pi_k A_k s_{lm}^{(k)} \left( \dot{\varepsilon}_{lm}^{(k)} - \dot{c}_{lm}^{(k)} \right) s_{ij}^{(k)} -$$

$$- \pi_k G_k^{-1} A_k \tau_{\Theta}^{(k)} \tau_s^{(k)} \dot{\Theta} s_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.12)$$

где  $\pi_k$  – параметр переключения:  $\pi_k = 0$  при отсутствии пластических деформаций ( $\dot{p}_{ij}^{(k)} = 0$ ), нейтральном нагружении или разгрузке  $k$ -го компонента композиции,  $\pi_k = 1$  при активном пластическом деформировании этого материала. Значения параметра  $\pi_k$  при учете равенства (2.5) вычисляются по формуле (см. соотношения (22) и (23) в [30])

$$\pi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \text{ и } s_{ij}^{(k)} \dot{s}_{ij}^{(k)} - 2 \tau_s^{(k)} \tau_{\Theta}^{(k)} \dot{\Theta} \leq 0; \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \text{ и } s_{ij}^{(k)} \dot{s}_{ij}^{(k)} - 2 \tau_s^{(k)} \tau_{\Theta}^{(k)} \dot{\Theta} > 0, \quad 0 \leq k \leq N. \end{cases} \quad (2.13)$$

При учете выражений (2.3) равенство (2.12) преобразуется к виду:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} - \pi_k A_k s_{ij}^{(k)} s_{lm}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{lm}^{(k)} = 0.5 G_k^{-1} \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} E_k^{-1} v_k \dot{\sigma}_{ll}^{(k)} + \dot{c}_{ij}^{(k)} - \pi_k A_k s_{ij}^{(k)} s_{lm}^{(k)} \dot{c}_{lm}^{(k)} +$$

$$+ \left( \delta_{ij} \alpha_k - \pi_k G_k^{-1} A_k \tau_{\Theta}^{(k)} \tau_s^{(k)} s_{ij}^{(k)} \right) \dot{\Theta}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.14)$$

Определим скорости деформаций ползучести  $\dot{c}_{ij}^{(k)}$  в соотношении (2.14). На стадии установившейся ползучести эти величины выражаются так [13, 15, 18, 19]:

$$\dot{c}_{ij}^{(k)} = \frac{3}{2} \frac{c_*^{(k)}}{\sigma_*^{(k)}} \left( \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sigma_{ll}^{(k)} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_*^{(k)} &\equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left( \dot{c}_{11}^{(k)} - \dot{c}_{22}^{(k)} \right)^2 + \left( \dot{c}_{22}^{(k)} - \dot{c}_{33}^{(k)} \right)^2 + \left( \dot{c}_{33}^{(k)} - \dot{c}_{11}^{(k)} \right)^2 + 6 \left( \dot{c}_{12}^{(k)2} + \dot{c}_{23}^{(k)2} + \dot{c}_{31}^{(k)2} \right)}, \\ \sigma_*^{(k)} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} \right)^2 + \left( \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{33}^{(k)} \right)^2 + \left( \sigma_{33}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} \right)^2 + 6 \left( \sigma_{12}^{(k)2} + \sigma_{23}^{(k)2} + \sigma_{31}^{(k)2} \right)}, \\ \sigma_*^{(k)} &= \sqrt{3} T_k, \quad c_*^{(k)} = F_k(\sigma_*^{(k)}, \Theta), \quad \frac{c_*^{(k)}}{\sigma_*^{(k)}} = \frac{F_k(\sigma_*^{(k)}, \Theta)}{\sigma_*^{(k)}} \equiv \Phi_k(\sigma_*^{(k)}, \Theta), \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$F_k$  и  $\Phi_k$  – функции указанных аргументов, которые известны из экспериментов на установившуюся ползучесть. Так, в случае степенного закона установившейся ползучести  $\xi = B\sigma^m$ , в котором  $B = B(\theta)$  и  $m = m(\theta)$  – характеристики материала, а  $\sigma$  и  $\xi$  – осевое напряжение и соответствующая ему скорость деформации ползучести, в соотношениях (2.16) имеем [13]:

$$c_*^{(k)} = B_k(\Theta)(\sigma_*^{(k)})^{m_k(\Theta)}, \quad \Phi_k(\sigma_*^{(k)}, \Theta) = B_k(\Theta)(\sigma_*^{(k)})^{m_k(\Theta)-1}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.17)$$

где  $B_k$  и  $m_k$  – механические характеристики  $k$ -го материала композиции, зависящие от ее температуры.

В условиях кратковременной ползучести стадия упрочнения в металлических материалах почти не проявляется, поэтому при математическом моделировании ее не учитывают. Для описания же второй и третьей стадий ползучести следует использовать модифицированные равенства (2.15) [14]:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{ij}^{(k)} &= \frac{3}{2} \Phi_k \left[ (1 - \omega_k^{\gamma_k})^{-\delta_k} \sigma_*^{(k)}, \Theta \right] (1 - \omega_k^{\gamma_k})^{-\delta_k} \left( \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sigma_{ll}^{(k)} \right), \\ i, j &= 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\omega_k$  – параметр поврежденности  $k$ -й фазы композиции ( $0 \leq \omega_k \leq 1$ ),  $\delta_k > 0$  и  $\gamma_k > 0$  – характеристики материала этой фазы, определяемые из условия оптимальной аппроксимации кривых его кратковременной ползучести (в работе [14] принято  $\delta_k = \gamma_k = 1$ ). Параметры  $\delta_k$  и  $\gamma_k$  в общем случае могут зависеть от температуры  $\Theta$  и напряженного состояния (в частности от интенсивности напряжений  $\sigma_*^{(k)}$ ). Соотношения (2.18) при учете выражений (2.16) и (2.17) позволяют описать как стадию установившейся ползучести (при значениях  $\omega_k \approx 0$ ), так и стадию предразрушения (при значениях  $\omega_k \approx 1$ )  $k$ -го компонента металлокомпозиции, которые характерны для кратковременной ползучести, и являются обобщением одномерных соотношений из [14].

Равенства (2.15), а значит и (2.18), в силу соотношений (2.16) записаны в форме, соответствующей экспериментам на ползучесть при растяжении и сжатии образцов, а пластические свойства в равенствах (2.13) и (2.14) описаны в форме, соответствующей экспериментам на чистый сдвиг. С целью унификации указанных соотношений в равенствах (2.13) и (2.14) целесообразно сделать следующие замены [7, 13, 19]:

$$\tau_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / \sqrt{3}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \sigma_\Theta^{(k)} / \sqrt{3}, \quad \chi_k = \sqrt{3} \bar{\chi}_k, \quad \bar{G}_k = \bar{E}_k / 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.19)$$

где

$$\sigma_\Theta^{(k)} = \sigma_\Theta^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta) \equiv \frac{\partial \sigma_s^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta)}{\partial \Theta}, \quad \bar{E}_k = \bar{E}_k(\bar{\chi}_k, \Theta) \equiv \frac{\partial \sigma_s^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta)}{\partial \bar{\chi}_k}, \quad (2.20)$$

$\sigma_s^{(k)}$  – предел текучести  $k$ -го компонента композиции при растяжении и сжатии,  $\bar{\chi}_k$  – параметр Одквиста (см. выражения (2.6)) при тех же условиях нагружения,  $\bar{E}_k$  – касательный модуль этого материала при растяжении и сжатии.

Подставим выражения (2.18) в равенства (2.14) и учтем соотношения (2.19) и (2.20), тогда окончательно получим определяющие уравнения для  $k$ -го компонента металлокомпозиции при его кратковременной ползучести:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} - \pi_k \bar{A}_k \dot{s}_{ij}^{(k)} s_{lm}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{lm}^{(k)} &= 0.5 G_k^{-1} \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} E_k^{-1} v_k \dot{\sigma}_{ll}^{(k)} + \Psi_k (3\sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_{ll}^{(k)}) - \\ &- 2\pi_k \bar{A}_k \Psi_k \sigma_s^{(k)2} s_{ij}^{(k)} + (\delta_{ij} \alpha_k - \pi_k G_k^{-1} \bar{A}_k \sigma_\Theta^{(k)} \sigma_s^{(k)} s_{ij}^{(k)} / 3) \dot{\Theta}, \\ i, j &= 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где (см. выражения (2.11), (2.13) и (2.16))

$$\begin{aligned} \bar{A}_k &= \bar{A}_k(\bar{\chi}_k, \Theta) \equiv \frac{3}{2\sigma_s^{(k)2}(\bar{\chi}_k, \Theta)[1 + \bar{g}_k(\bar{\chi}_k, \Theta)]}, \quad \bar{g}_k(\bar{\chi}_k, \Theta) \equiv \frac{\bar{E}_k(\bar{\chi}_k, \Theta)}{3G_k}, \\ \pi_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_*^{(k)} < \sigma_s^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta) \text{ или } \sigma_*^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta) \text{ и } W_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } \sigma_*^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\bar{\chi}_k, \Theta) \text{ и } W_k > 0, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (2.22) \\ W_k &\equiv 3s_{ij}^{(k)} \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - 2\sigma_s^{(k)} \sigma_\Theta^{(k)} \dot{\Theta}, \quad \Psi_k \equiv \frac{1}{2} (1 - \omega_k^{\gamma_k})^{-\delta_k} \Phi_k [(1 - \omega_k^{\gamma_k})^{-\delta_k} \sigma_*^{(k)}, \Theta]. \end{aligned}$$

Как и в работах [27–30], для удобства дальнейшего изложения равенства (2.21) при учете соотношений (2.22) целесообразно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Z}_k \dot{\mathbf{\epsilon}}_k = \mathbf{Y}_k \dot{\mathbf{\sigma}}_k + \mathbf{V}_k \mathbf{\sigma}_k + \mathbf{\beta}_k \dot{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.23)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \mathbf{\sigma}_k &= \left( \sigma_1^{(k)} \sigma_2^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)} \sigma_6^{(k)} \right)^T \equiv \left( \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{31}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} \right)^T, \\ \mathbf{\epsilon}_k &= \left( \varepsilon_1^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} \varepsilon_3^{(k)} \varepsilon_4^{(k)} \varepsilon_5^{(k)} \varepsilon_6^{(k)} \right)^T \equiv \left( \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} 2\varepsilon_{23}^{(k)} 2\varepsilon_{31}^{(k)} 2\varepsilon_{12}^{(k)} \right)^T, \quad (2.24) \\ \mathbf{s}_k &= \left( s_1^{(k)} s_2^{(k)} s_3^{(k)} s_4^{(k)} s_5^{(k)} s_6^{(k)} \right)^T \equiv \left( s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{23}^{(k)} s_{31}^{(k)} s_{12}^{(k)} \right)^T, \end{aligned}$$

$\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Y}_k = (y_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$  – симметричные  $6 \times 6$ -матрицы,  $\beta_k = (\beta_{ij}^{(k)})$  – шестикомпонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых выражаются так:

$$\begin{aligned}
 z_{ii} &= 1 - \pi_k \bar{A}_k s_i^{(k)} s_i^{(k)}, \quad z_{il} = -\pi_k \bar{A}_k s_i^{(k)} s_l^{(k)}, \quad z_{jj} = \frac{1}{2} - \pi_k \bar{A}_k s_j^{(k)} s_j^{(k)}, \\
 z_{jl} &= -\pi_k \bar{A}_k s_j^{(k)} s_l^{(k)} \quad (i \neq l, \quad j \neq l, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{4,6}, \quad l = \overline{1,6}), \\
 y_{ii}^{(k)} &= \frac{1}{E_k}, \quad y_{il}^{(k)} = -\frac{v_k}{E_k}, \quad y_{jj}^{(k)} = \frac{1}{2G_k} \quad (i \neq l, \quad i, l = \overline{1,3}, \quad j = \overline{4,6}), \\
 v_{ii}^{(k)} &= \Psi_k \left( 2 - 3\pi_k \bar{A}_k s_i^{(k)} s_i^{(k)} \right), \quad v_{il}^{(k)} = -\Psi_k \left( 1 - 3\pi_k \bar{A}_k s_i^{(k)} s_l^{(k)} \right), \quad (2.25) \\
 v_{ij}^{(k)} &= -6\pi_k \bar{A}_k \Psi_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i \neq l, \quad i, l = \overline{1,3}, \quad j = \overline{4,6}), \\
 v_{ll}^{(k)} &= 3\Psi_k \left( 1 - 2\pi_k \bar{A}_k s_l^{(k)} s_l^{(k)} \right), \quad v_{li}^{(k)} = -3\pi_k \bar{A}_k \Psi_k s_l^{(k)} s_i^{(k)}, \\
 v_{lj}^{(k)} &= -6\pi_k \bar{A}_k \Psi_k s_l^{(k)} s_j^{(k)}, \quad \beta_i^{(k)} = \alpha_k - \pi_k G_k^{-1} \bar{A}_k \sigma_{\Theta}^{(k)} \sigma_s^{(k)} s_i^{(k)}/3, \\
 \beta_l^{(k)} &= -\pi_k G_k^{-1} \bar{A}_k \sigma_{\Theta}^{(k)} \sigma_s^{(k)} s_l^{(k)}/3 \quad (i \neq l, \quad i = \overline{1,3}, \quad j, l = \overline{4,6}),
 \end{aligned}$$

индекс “т” – операция транспонирования. В соотношениях (2.25) по повторяющимся индексам суммирование не производится.

Согласно равенствам (2.22) и (2.25), уравнения (2.21) и (2.23) существенно нелинейны, поэтому для построения в последующем решений соответствующих начально-краевых задач о неупругом деформировании армированных конструкций в условиях неустановившейся ползучести целесообразно использовать метод шагов по времени [19, 29, 30]. В силу этого ниже рассматриваем соотношения (2.23) в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta > 0$  – шаг по времени, который может быть и переменным:  $\Delta = \Delta_n$ . Преобразуем равенства (2.23), применяя формулу трапеций, которая для некоторой функции от времени  $f(t)$  имеет вид [31]:

$$f^{n+1} - f^n = \frac{\Delta}{2} \left( \dot{f}^{n+1} + \dot{f}^n \right)$$

откуда следует

$$\dot{f}^{n+1} = \frac{2}{\Delta} f^{n+1} - \frac{2}{\Delta} f^{n+1/2}, \quad (2.26)$$

где

$$f^{n+1/2} = f^n + \frac{\Delta}{2} \dot{f}^n, \quad f^n \equiv f(t_n), \quad \dot{f}^n \equiv \dot{f}(t_n). \quad (2.27)$$

*Замечание.* Если при  $t = t_n$  значения  $\dot{f}^n$  и  $\dot{f}^{n+1}$  уже определены, то на основании выражений (2.27) последнее слагаемое в равенстве (2.26) в момент времени  $t_{n+1}$  известно.

Используя соотношения, аналогичные формулам (2.26) и (2.27), исключим из уравнений (2.23) все частные производные по  $t$  в рассматриваемый момент времени  $t_{n+1}$ , тогда получим

$$\frac{2}{\Delta} \mathbf{Z}_k \begin{pmatrix} n+1 & n+1/2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k & \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{pmatrix} = \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \begin{pmatrix} n+1 & n+1/2 \\ \boldsymbol{\sigma}_k & \boldsymbol{\sigma}_k \end{pmatrix} + \mathbf{V}_k \boldsymbol{\sigma}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{B}_k \begin{pmatrix} n+1 & n+1/2 \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.28)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1/2} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n, \quad \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1/2} \equiv \boldsymbol{\sigma}_k + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n, \quad \Theta^{n+1/2} \equiv \Theta + \frac{\Delta}{2} \dot{\Theta}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.29)$$

В дальнейшем считаем, что все величины в правых частях соотношений (2.29), согласно замечанию, уже вычислены в предшествующий момент времени  $t_n$ .

С целью использования результатов работ [27–30] в равенствах (2.28) напряжения выражим через деформации, тогда при  $t=t_{n+1}$  для  $k$ -го компонента композиции получим определяющее уравнение в следующей матричной форме:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1} = \mathbf{B}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1} + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k^{n+1} &\equiv \left( \mathbf{Y}_k + \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^{n+1} \right)^{-1} \mathbf{Z}_k^{n+1}, \\ \mathbf{p}_k^{n+1} &\equiv \left( \mathbf{Y}_k + \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^{n+1} \right)^{-1} \left[ \mathbf{Y}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1/2} - \mathbf{Z}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1/2} + \left( \Theta^{n+1/2} - \Theta \right) \mathbf{B}_k^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

При моделировании кратковременной ползучести армированной среды соответствующую термомеханическую задачу можно считать несвязанной [7, 8, 13, 14, 18, 19], поэтому предполагаем, что в текущий момент времени  $t_{n+1}$  в соотношениях (2.28) и (2.31) кроме величины  $\Theta^{n+1/2}$  уже определено и значение  $\Theta^{n+1}$ , которое известно из предварительного решения задачи теплопроводности для КМ-среды или соответствующей КМ-конструкции. На основании этого в случае учета термочувствительности упругих характеристик компонентов композиции элементы матрицы  $\mathbf{Y}_k$  в соотношениях (2.28) и (2.31) хоть и зависят от температуры  $\Theta$ , но уже известны при  $t=t_{n+1}$ .

Согласно выражениям (2.25) и (2.31) при учете соотношений (2.16), (2.17) и (2.22), получаем, что в рассматриваемый момент времени  $t_{n+1}$  определяющее уравнение (2.30) является существенно нелинейным. Как и в работах [27–30], считаем, что соотношение (2.30) линеаризовано с использованием метода, аналогичного методу переменных параметров упругости [7, 32] (или методу секущего модуля, по терминологии из [13]). На основании этого на текущей итерации данного метода  $6 \times 6$ -матрицу  $\mathbf{B}_k^{n+1} = \begin{pmatrix} b_{ij}^{(k)} \end{pmatrix}$  и шестикомпонентный

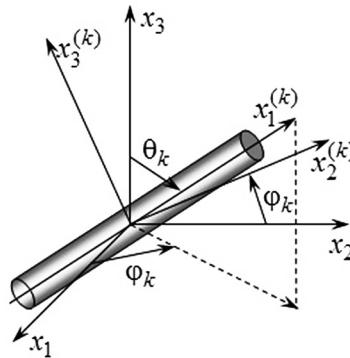


Рис. 1. Взаимная ориентация глобальной и локальной (связанной с арматурой  $k$ -го семейства) систем координат.

вектор-столбец  $\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} n+1 \\ p_i^{(k)} \end{pmatrix}$  ( $i, j = 1, 6$ ) в равенстве (2.30) предполагаем далее известными.

С каждым  $k$ -м семейством арматуры свяжем локальную ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$  так, чтобы ось  $x_1^{(k)}$  совпадала с направлением траектории волокна, а оси  $x_2^{(k)}$  и  $x_3^{(k)}$  были перпендикулярны этой траектории (рис. 1). При этом направление армирования  $k$ -м семейством волокон однозначно задается углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$ . Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  локальных осей  $x_i^{(k)}$  относительно осей глобальной ортогональной системы координат  $x_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для получения приемлемых в инженерных приложениях определяющих уравнений неупругого деформирования рассматриваемого КМ в условиях кратковременной ползучести используем гипотезы структурной механики композитов, аналогичные принятым в [27–30, 33]:

1. На макроуровне КМ в пределах репрезентативной ячейки рассматривается как однородное анизотропное тело. (При достаточно плотном и равномерном наполнении связующей матрицы тонкими армирующими элементами это предположение вполне приемлемо [33].)

2. Между связующим и арматурой реализуется идеальный термомеханический контакт.

3. В пределах репрезентативной ячейки КМ, рассматриваемой на миниуровне, напряжения, деформации и их скорости во всех компонентах кусочно-постоянны, а в композиции в целом, согласно допущению 1, постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с локальными изменениями полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, пренебрегаем.

4. Поля напряжений, деформаций и их скоростей усредняются по объему представительного элемента КМ, т.е. на основании допущения 3 – пропорционально относительному объемному содержанию  $\mu_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) каждого фазового материала, где

$$\mu_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \mu_k. \quad (2.33)$$

5. Термомеханическое поведение  $k$ -го компонента композиции описывается определяющими соотношениями (2.21) и (2.22) или в рассматриваемый дискретный момент времени  $t_{n+1}$  – матричным равенством (2.30) при учете выражений (2.22), (2.25), (2.29) и (2.31).

Используя эти допущения и повторяя рассуждения из работ [27–30], при  $t = t_{n+1}$  на текущей итерации метода переменных параметров упругости по-

лучим следующее определяющее соотношение для КМ, записанное в матричной форме:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} + \mathbf{p}^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

где при учете равенства (2.33) имеем выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^m &\equiv \left( \mu_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p}^m \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \mu_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \left( \mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k \right), \\ \mathbf{H}^m &\equiv \mu_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g}^m \equiv \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad m = n+1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – шестикомпонентные вектор-столбцы осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в композиции, имеющие структуру, аналогичную (2.24);  $\mathbf{I}$  – единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_k$  и  $\mathbf{C}_k$  –  $6 \times 6$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$  – матрицы, обратные  $6 \times 6$ -матрицам  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$  и  $\boldsymbol{\varsigma}_k$  – шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы матриц  $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ , а также вектор-столбца  $\boldsymbol{\varsigma}_k = (\varsigma_i^{(k)})$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{1j}^{(k)} &= a_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad \hat{c}_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \varsigma_1^{(k)} = 0, \\ \varsigma_i^{(k)} &= \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} \left( p_l^{(0)} - p_l^{(k)} \right), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad m = n+1, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Не выписанные в равенствах (2.37) элементы  $6 \times 6$ -матриц  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$  приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [33]. Матрицы  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  задают

преобразования вектор-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}_k$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  (см. соотношения (2.24)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат  $x_j$  к локальной ортогональной системе  $x_i^{(k)}$ , направляющие косинусы  $l_{ik}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 3$  и  $1 \leq k \leq N$ ) между которыми определяются равенствами (2.32).

В процессе вывода соотношений (2.34) и (2.35) попутно получаются матричные равенства

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad m = n + 1. \quad (2.38)$$

Первое соотношение (2.38) в момент времени  $t_{n+1}$  на текущей итерации позволяет выразить деформации связующей матрицы  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  через осредненные деформации композиции  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , а второе равенство (2.38) – деформации армирующих элементов  $k$ -го семейства  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  через деформации связующего  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , т.е. в конечном итоге через  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

В выражении для величины  $\Psi_k$  (см. соотношения (2.22)) неопределенный до сих пор оставался параметр поврежденности материала  $k$ -й фазы композиции  $\omega_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ). Анализ экспериментальных данных показал [14]: в случае кратковременной ползучести металлических образцов, испытывающих одноосное растяжение, в качестве параметра поврежденности  $\omega$  можно использовать величину  $\omega = \varepsilon/\varepsilon_c$ , где  $\varepsilon$  – линейная механическая (без учета температурного удлинения) деформация образца в осевом направлении;  $\varepsilon_c > 0$  – предельно допустимое (критическое) значение величины  $\varepsilon$ , при достижении которой скорость деформации кратковременной ползучести неограниченно возрастает – кинематический критерий разрушения материала ( $\varepsilon_c$  – характеристика материала). Предполагая, что последнее равенство справедливо не только при растяжении, но и при сжатии, получим следующее выражение:  $\omega = |\varepsilon|/\varepsilon_c$ . Запишем здесь  $|\varepsilon|$ , используя инварианты тензора механических деформаций [7]:  $|\varepsilon| = |\varepsilon_0| + \varepsilon_*$ , где  $\varepsilon_*$  – интенсивность деформаций,  $\varepsilon_0$  – средняя линейная механическая деформация. Обобщая последнее равенство на случай сложного деформированного состояния, параметр поврежденности  $k$ -го материала металлокомпозиции в случае кратковременной ползучести можно представить так:

$$\omega_k = (|\varepsilon_0^{(k)}| + \varepsilon_*^{(k)}) / \varepsilon_c^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (2.39)$$

Здесь [7, 8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_*^{(k)} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left( \varepsilon_{11}^{(k)} - \varepsilon_{22}^{(k)} \right)^2 + \left( \varepsilon_{22}^{(k)} - \varepsilon_{33}^{(k)} \right)^2 + \left( \varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{11}^{(k)} \right)^2 + 6 \left( \varepsilon_{12}^{(k)2} + \varepsilon_{23}^{(k)2} + \varepsilon_{31}^{(k)2} \right)}, \\ \varepsilon_0^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{ll}^{(k)}}{3} - \int_{t_0}^t \alpha_k \dot{\Theta} dt, \quad 0 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (2.40)$$

$\varepsilon_c^{(k)}$  – механическая характеристика  $k$ -го компонента композиции, которая может быть функцией температуры:  $\varepsilon_c^{(k)} = \varepsilon_c^{(k)}(\Theta)$ .

Параметр поврежденности  $\omega_k$  при учете дополнительных данных экспериментов может быть введен отличично от формул (2.39) и (2.40). Так, например,

могут быть учтены различия значений  $\varepsilon_c^{(k)}$  при растяжении и сжатии  $k$ -го материала композиции [18].

В подавляющем большинстве случаев задачи механики композитных конструкций из неоднородных армированных материалов формулируются в перемещениях [2–4, 27–30, 33]. Поэтому если в рассматриваемый момент времени  $t_{n+1}$  на текущей итерации метода переменных параметров упругости уже определены приближения перемещений из решения соответствующей краевой задачи, то, используя общезвестные кинематические соотношения [4, 7, 8, 13, 18, 19, 33] (в частности соотношения Коши), можно определить приближения осредненных деформаций композиции  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ , затем по формулам (2.38) можно вычислить деформации компонентов композиции, а по формулам (2.30) – напряжения в этих же материалах. При этом, согласно соотношениям (2.22), (2.25) и (2.31), при вычислении параметра переключения  $\pi_k$  (см. соответствующее выражение в (2.22)) целесообразно скорости напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$  и температуры  $\Theta$  приближенно определять по формулам, аналогичным (2.26) при учете обозначений (2.29) и сделанного выше замечания. Интегралы же в соотношениях (2.6) и (2.40) также целесообразно вычислять приближенно, используя формулу трапеций с шагом  $\Delta$ .

Выше для линеаризации равенств (2.30) предлагалось использовать метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [13, 27, 32]. Предварительные расчеты продемонстрировали: сходимость такого метода нарушается на последней стадии кратковременной ползучести – стадии предразрушения – одного из субструктурных элементов металлокомпозиции. Восстановить сходимость данного итерационного процесса можно за счет уменьшения шага по времени  $\Delta$  (см. соотношения (2.31)).

**3. Обсуждение результатов расчетов.** Как правило, эффект армирования наиболее ярко проявляется в тонкостенных силовых элементах конструкций типа пластин и оболочек, в которых часто реализуется напряженное состояние, близкое к плоскому: например, основное безмоментное состояние в оболочках [1, 3, 7, 13, 19, 33]. Поэтому для более наглядной и простой демонстрации влияния параметров армирования на кратковременную ползучесть тонкостенного КМ-изделия рассмотрим безмоментное состояние тонкой металлокомпозитной цилиндрической оболочки длиной  $L$ , радиуса  $R=0.5$  м и толщиной  $H=2h=5$  мм ( $H/R=1/100$ ), так как именно такие армированные оболочки чаще всего используются на практике [2, 3, 5]. Глобальную систему координат  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) введем следующим образом (рис. 2):  $x_1$  – осевая ( $0 \leq x_1 \leq L$ ),  $x_2$  – окружная ( $0 \leq x_2 \leq 2\pi R$ ) и  $x_3$  – радиальная ( $R-h \leq x_3 \leq R+h$ ) координаты. При указанном типе напряженного состояния в такой конструкции целесообразно перекрестно армировать по эквидистантным цилиндрическим поверхностям  $x_3 = \text{const}$  [3]; при этом, согласно рис. 1, в формулах (2.32) необходимо принять  $\theta_k = \pi/2$  ( $1 \leq k \leq N$ ).

Рассматриваются две однородные структуры многонаправленного армирования с симметричной укладкой волокон относительно направлений  $x_1$  и  $x_2$ . Первая структура состоит из двух ( $N=2$ ) семейств проволок, намотанных по симметричным направлениям (см. рис. 2б)

$$\Phi_2 = -\Phi_1 = \text{const} \quad (N=2). \quad (3.1)$$

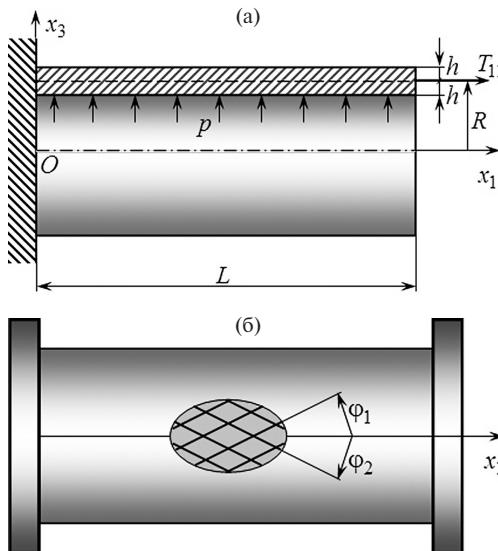


Рис. 2. Цилиндрические оболочки: закрепленная на левой и нагруженная на правой кромках (а), снабженная днищами (б).

Вторая структура состоит из четырех ( $N=4$ ) семейств проволок (рис. 3, на котором армирующие элементы обозначены номерами 1–4), и для углов намотки  $\varphi_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) выполняются равенства:

$$\varphi_2 = -\varphi_1 = \text{const}, \quad \varphi_{n+2} = \varphi_n + \pi/2, \quad n = 1, 2 \quad (N = 4). \quad (3.2)$$

В обоих случаях суммарная плотность армирования

$$\mu_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N \mu_k \quad (3.3)$$

фиксирована:  $\mu_{\Sigma} = 0.4$ , а плотности армирования всех семейств проволок одинаковы ( $\mu_k = \mu_1$ ,  $1 \leq k \leq N$ ), т.е. на основании формулы (3.3) вычисляются так:

$$\mu_k = \mu_{\Sigma} / N, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (3.4)$$

Металлокомпозиции представляют собой связующую матрицу из меди, усиленной проволоками из стали У8А по направлениям (3.1) или (3.2) с плотностями армирования (3.4). Ориентировочные физико-механические характеристики материалов композиций представлены в табл. 1. Для стали У8А, характеристики, приведенные в табл. 1, аппроксимировались линейно по температуре  $\Theta$ , а для меди – квадратично по  $\Theta$  (за исключением величин  $m_k$  и  $B_k$ ). Так как в открытой печати отсутствуют значения  $m_k$  и  $B_k$  для рассматриваемых материалов при  $\Theta = 20$  °C, то при этой температуре естественного состояния композиций для стали У8А указанные величины условно принимались равными значениям при  $\Theta = 200$  °C, а для меди – при  $\Theta = 165$  °C (с кусочно-линейной их аппроксимацией по  $\Theta$ ). Как и в работе [14], в формулах (2.18) и (2.22) использовались значения параметров  $\gamma_k = \delta_k = 1$  ( $1 \leq k \leq N$ ).

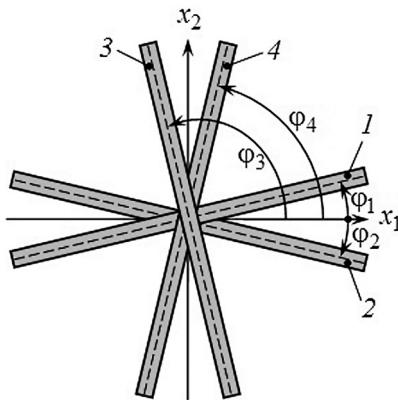


Рис. 3. Многонаправленная симметричная структура армирования с четырьмя семействами силовых элементов.

**Таблица 1.** Физико-механические характеристики материалов фаз металлокомпозиций [1, 34, 35]

Характеристика материала	Медное связующее ( $k=0$ )			Стальная проволока У8А ( $1 \leq k \leq N$ )	
	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 165^\circ\text{C}$	$\Theta = 235^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 200^\circ\text{C}$
$E_k, \text{ ГПа}$	128	115	107	210	200
$\nu_k$	0.320	0.330	0.334	0.300	0.310
$\sigma_s(k), \text{ МПа}$	340	310	295	3968	3971
$\bar{E}_k, \text{ ГПа}$	0.992	0.985	0.980	5.232	5.543
$\varepsilon_c^{(k)}$	0.060	0.071	0.075	0.082	0.089
$\alpha_k \cdot 10^6, \text{ К}^{-1}$	17.7	18.1	18.3	12.3	12.5
$m_k$	—	1.60	2.16	—	24.98
$B_k, (\text{МПа})^{-m_k \cdot \text{ч}^{-1}}$	—	$3.650 \cdot 10^{-10}$	$5.630 \cdot 10^{-9}$	—	$1.054 \cdot 10^{-84}$

Рассматривались четыре вида механического нагружения КМ-конструкции.

1. Деформирование только под действием внутреннего давления  $p$ ; осевое  $T_{11}$  (см. рис. 2,а) и окружное  $T_{12}$  мембранные усилия отсутствуют. При этом получаем следующие выражения для мембранных усилий  $T_{ij} = H\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  [3, 36]:

$$T_{11} = T_{12} = T_{21} \equiv 0, \quad T_{22} = Rp. \quad (3.5)$$

(Такой вид напряженного состояния обычно реализуется в кольцах, когда  $L \ll R$  [19].)

2. Деформирование под действием внутреннего давления  $p$  и осевого растягивающего усилия  $T_{11} > 0$ , соответствующего цилиндрической оболочке с днищами (см. рис. 2,б); скручивающее усилие  $T_{12}$  отсутствует, т.е. имеем [3, 36]:

$$T_{11} = Rp/2, \quad T_{12} = T_{21} \equiv 0, \quad T_{22} = Rp. \quad (3.6)$$

3. Деформирование под действием внутреннего давления  $p$  и осевого сжимающего усилия  $T_{11} < 0$ , равного по модулю значению  $T_{11}$  в равенствах (3.6); скручивающее усилие  $T_{12}$  по-прежнему отсутствует, т.е. имеем:

$$T_{11} = -Rp/2, \quad T_{12} = T_{21} \equiv 0, \quad T_{22} = Rp. \quad (3.7)$$

4. Общий случай деформирования под действием внутреннего давления  $p$ , осевого растягивающего усилия  $T_{11} > 0$ , соответствующего оболочке с днищами (см. первое равенство (3.6)) и скручивающего усилия  $T_{12}$ , пропорционального  $p$ , а именно:

$$T_{11} = Rp/2, \quad T_{12} = T_{21} = 5Rp/4, \quad T_{22} = Rp. \quad (3.8)$$

Условия термосилового нагружения КМ-конструкции предполагались следующие. В течение одной минуты оболочка нагревалась от температуры естественного состояния  $\Theta = \Theta_0 = 20$  °С до “рабочей” температуры  $\Theta = \Theta_* = 165$  °С или  $\Theta = \Theta_* = 235$  °С по линейному закону по времени  $t$ , после чего температура  $\Theta$  фиксировалась на уровне  $\Theta_*$ :

$$\Theta(t) = \begin{cases} \frac{t - t_0}{t_* - t_0} \Theta_* + \frac{t_* - t}{t_* - t_0} \Theta_0, & t_0 \leq t \leq t_*, \\ \Theta_*, & t > t_*, \quad t_0 = 0, \quad t_* = 1 \text{ мин.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Одновременно с этим также в течение одной минуты по линейному закону по времени  $t$  возрастало внутреннее давление в конструкции от нулевого значения при  $t \leq t_0$  до “рабочего” значения  $p_* = 1$  МПа, затем давление  $p$  оставалось фиксированным и равным  $p_*$ :

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{t - t_0}{t_* - t_0} p_*, & t_0 < t \leq t_*, \\ p_*, & t > t_*, \quad t_0 = 0, \quad t_* = 1 \text{ мин.} \end{cases} \quad (3.10)$$

На рис. 4–6 изображены зависимости  $\omega_k(t)$ , полученные при некоторых значениях углов армирования  $\varphi_1$  в случаях намотки двух (рис. 4 и 5) или четырех (рис. 6) семейств проволок. Кривые на рис. 4 и 6 рассчитаны при рабочей температуре  $\Theta_* = 165$  °С (см. соотношение (3.9)), а на рис. 5 – при  $\Theta_* = 235$  °С. Кривые на рис. 4а, 5а и 6 определены при механическом нагружении оболочки, задаваемом формулами (3.6) и (3.10), а на рис. 4б и 5б – равенствами (3.8) и (3.10) – общий случай. Кривые 1–3 на рис. 4–6 характеризуют поврежденность связующего материала КМ-конструкции ( $k = 0$ ); кривые 1'–3' – проволок первого семейства ( $k = 1$ ), а кривые 1''–3'' – проволок второго семейства ( $k = 2$ ). На рис. 4а, 5а и 6 кривые с номерами, помеченными одним и двумя штрихами, полностью совпадают, что является следствием симметрии рассматриваемых структур армирования относительно направлений  $x_1$  и  $x_2$  (см. соотношения (3.1) и (3.2)) и спецификой механического нагружения конструкции в этих случаях (см. равенства (3.6) и (3.10)), а именно

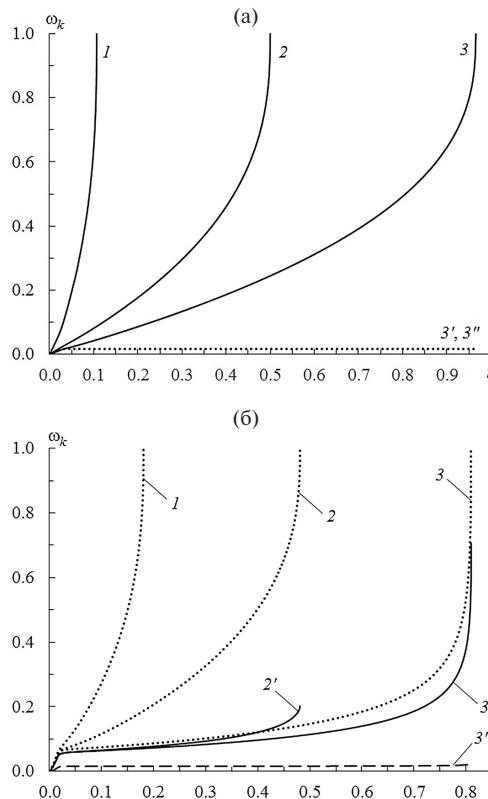


Рис. 4. Зависимости параметров поврежденности материалов фаз металлокомпозиции цилиндрической оболочки от времени  $t$  [ч] в случае намотки двух семейств арматуры, рассчитанные при рабочей температуре  $\Theta_0 = 165$  °С: а) – механическое нагружение вида (3.6), б) – механическое нагружение вида (3.8).

отсутствием скручивания цилиндрической оболочки ( $T_{12} = T_{21} \equiv 0$ ). Кроме того, на рис. 4а и 5а, б кривые с номерами 1', 1'', 2' и 2'' не изображены, чтобы не загромождать эти рисунки: на соответствующих временных интервалах (см. кривые 1 и 2 на рис. 4а и 5а, б) кривые 1', 1'', 2' и 2'' визуально почти не отличаются от кривых 3' и 3''.

Кривые с номерами 1, 2 и 3 (как со штрихами, так и без них) на рис. 4а рассчитаны при значениях угла намотки  $\varphi_1 = 53^\circ, 65^\circ$  и  $69^\circ$  соответственно, на рис. 4б – при  $\varphi_1 = 46^\circ, 50^\circ$  и  $54^\circ$ , на рис. 5а – при  $\varphi_1 = 77^\circ, 81^\circ$  и  $82^\circ$ , на рис. 5б – при  $\varphi_1 = 52^\circ 30', 53^\circ 30'$  и  $54^\circ 54'$ , а на рис. 6 – при  $\varphi_1 = 0^\circ, 25^\circ$  и  $30^\circ$ . На основании соотношений (2.39) и (2.40) кривые на рис. 4–6 условно можно трактовать как кривые кратковременной ползучести материалов фаз рассматриваемых металлокомпозиций при разных видах обобщенного плоского напряженного состояния  $\sigma_{ij} = T_{ij}/H$ ,  $i, j = 1, 2$  (см. соотношения (3.6) и (3.8)).

На кривых 3' на рис. 4а и 5а, а также на кривых 3 и 3' на рис. 4б, 5б и на кривой 2' на рис. 4б отчетливо наблюдается достаточно продолжительная

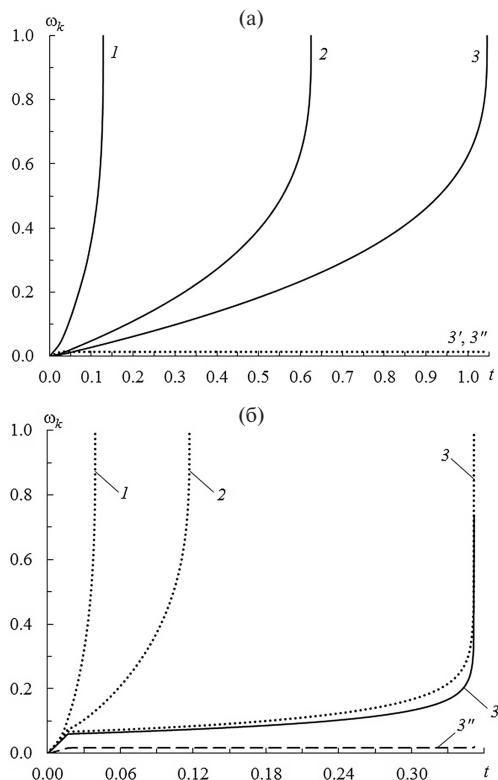


Рис. 5. Зависимости параметров поврежденности материалов фаз металлокомпозиции цилиндрической оболочки от времени  $t$  [ч] в случае намотки двух семейств арматуры, рассчитанные при рабочей температуре  $\Theta_* = 235$  °С: а) – механическое нагружение вида (3.6), б) – механическое нагружение вида (3.8).

стадия установившейся ползучести и третья стадия предразрушения для материала связующей матрицы и арматуры первого семейства. Наиболее ярко третья стадия ползучести проявляется на кривых 3 и 3' на рис. 4б и 5б, причем с повышением температуры стадийность на кривых ползучести выявляется все более четко (ср. кривые на рис. 4 и 5). Поведение кривых 1 и 2 на рис. 4 и 5 свидетельствует о том, что после завершения процесса термомеханического нагружения цилиндрической КМ-оболочки ( $0 \leq t \leq 1$  мин = 0.0167 ч; см. соотношения (3.9) и (3.10)) материал связующей матрицы при соответствующих углах намотки  $\varphi_1$  деформируется, либо почти полностью минуя стадию установившейся ползучести (кривые 1), либо почти минуя эту стадию (кривые 2). Кривые 3' и 3'' на рис. 4а и 5а, а также кривые 3'' на рис. 4б и 5б при  $t > 0.0167$  ч, т.е. после окончания процесса нагружения конструкции, визуально не отличаются от горизонтальных линий. Это означает, что при рассматриваемых видах нагружения оболочки в соответствующих семействах арматуры развивается ограниченная ползучесть, которая, как правило, характерна для полимерных однородных материалов, а не для металлов [19]. Согласно поведению кривых

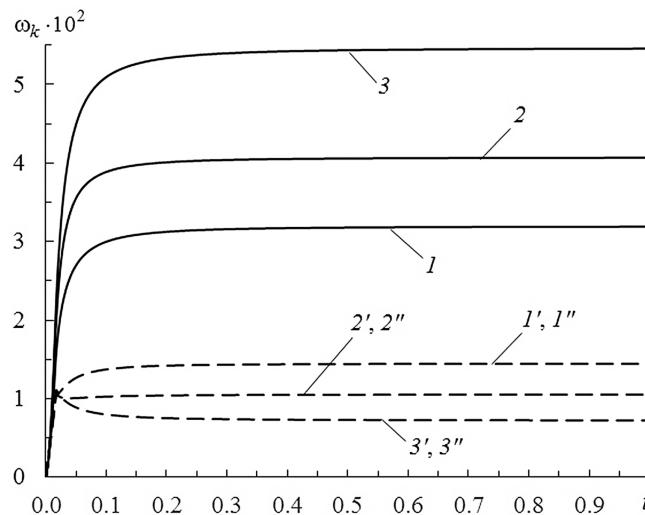
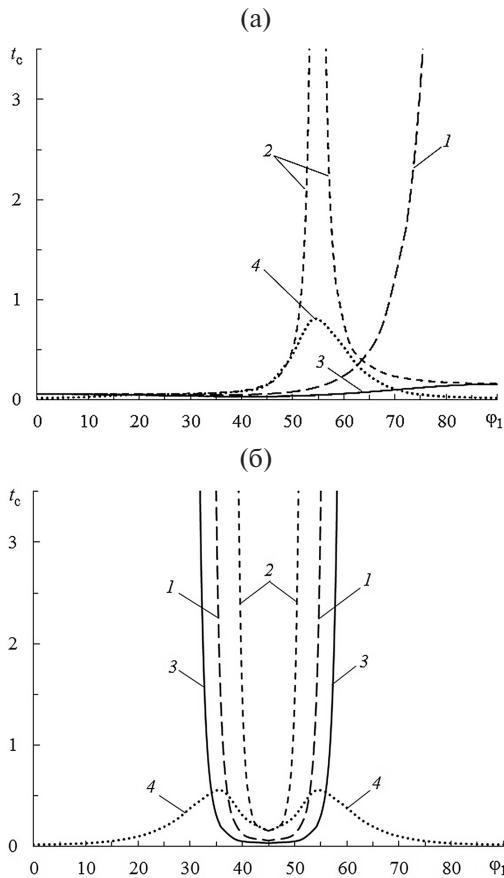


Рис. 6. Зависимости параметров поврежденности материалов фаз металлокомпозиции цилиндрической оболочки от времени  $t$  [ч] в случае намотки четырех семейств арматуры, рассчитанные при рабочей температуре  $\Theta_* = 165$  °C и механическое нагружение вида (3.6).

1–3 на рис. 4 и 5, а также кривых 2' и 3' на рис. 4б, даже относительно малое изменение угла намотки  $\varphi_1$  (например на рис. 5б – с шагом порядка 1°) может оказаться существенное влияние на механический отклик оболочки из металлокомпозита, работающей в условиях кратковременной ползучести. При этом для рассматриваемых видов термосилового нагружения КМ-конструкции разрушение в первую очередь начинается в связующем материале. (Отметим: при моделировании линейно-упругого деформирования волокнистых цилиндрических оболочек их механический отклик незначительно зависит от малого изменения углов намотки, если отношение модулей упругости связующего и арматуры имеет тот же порядок, что и в металлокомпозициях, т.е. структура армирования обладает слабо выраженной анизотропией [2, 3, 33]. Так, согласно данным табл. 1, при  $\Theta = 20$  °C имеем  $E_0/E_k = 0.61 \sim 0.1$  ( $1 \leq k \leq N$ ) – слабая анизотропия.)

На первый взгляд поведение зависимостей  $\omega_k(t)$  на рис. 4б и 5б качественно схоже с поведением кривых на рис. 4а и 5а. Однако имеются и принципиальные различия между этими рисунками. Так, кривые на рис. 4б и 5б соответствуют общему виду механического нагружения КМ-конструкции, при котором цилиндрическая оболочка помимо всего прочего дополнительно скручивается (см. формулы (3.8)). В этих случаях направления главных осредненных напряжений в металлокомпозиции изделия не совпадают с направлениями  $x_1$  и  $x_2$ , т.е. с осями симметрии структуры армирования (см. равенство (3.1) и рис. 2,б). Поэтому кривые 3' на рис. 4б и 5б не совпадают с кривыми 3''. Аналогично, и кривая 2' на рис. 4б не совпадает с кривой 2'', которая на этом рисунке не изображена, так как на соответствующем временном интервале визуально почти не отличается от кривой 3''. Поведение кривых 3'' на рис. 4б и 5б при  $t > 0.0167$  ч демонстрирует, что и в общем случае нагружения



**Рис. 7.** Зависимости предельного (критического) времени разрушения  $t_c$  [ч] цилиндрической металлокомпозитной оболочки от угла намотки  $\varphi_1$  [град], рассчитанные при рабочей температуре  $\Theta_* = 165$  °C и разных видах ее механического нагружения в случаях укладки двух (а) и четырех (б) семейств арматуры.

цилиндрической КМ-оболочки армирующие элементы второго семейства ( $k=2$ ), как и на рис. 4а и 5а, деформируются в условиях ограниченной ползучести. Кроме того, на рис. 4б и 5б, в отличие от рис. 4а и 5а, более ярко проявились особенности поведения кривых на начальном интервале времени  $0 \leq t \leq 0.0167$  ч, в течение которого возрастает термомеханическая нагрузка (см. соотношения (3.9) и (3.10) при учете равенств (3.6) и (3.8)).

На рис. 7 и 8 изображены зависимости времени начального разрушения  $t_c$  связующего материала КМ-оболочек от угла намотки волокон первого семейства  $\varphi_1$ . При этом критическое время  $t_c$  определяется выполнением условия  $\omega_0(t_c) = 1$ . (Во всех проведенных расчетах аналогичные равенства для арматуры не достигались.) На рис. 7 представлены зависимости  $t_c(\varphi_1)$ , полученные при рабочей температуре  $\Theta_* = 165$  °C, а на рис. 8 – при  $\Theta_* = 235$  °C. На рис. 7а и 8а кривые рассчитаны для случая намотки двух семейств арматуры

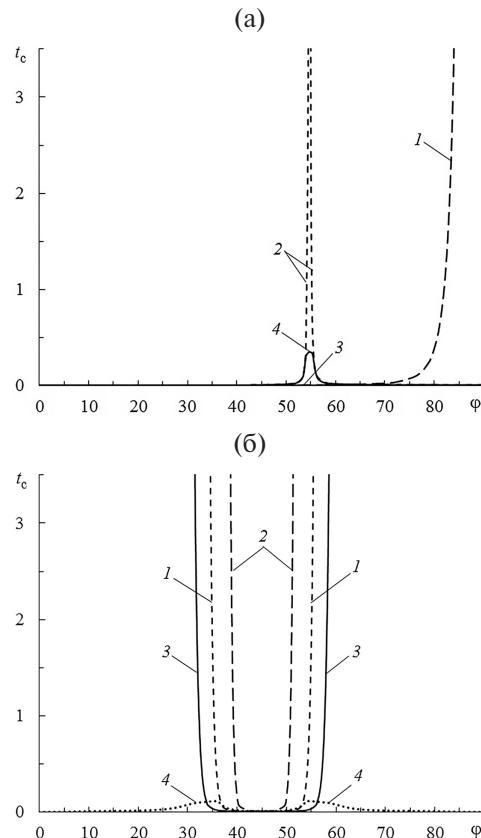


Рис. 8. Зависимости предельного (критического) времени разрушения  $t_c$  [ч] цилиндрической металлокомпозитной оболочки от угла намотки  $\varphi_1$  [град], рассчитанные при рабочей температуре  $\Theta_* = 235$  °C и разных видах ее механического нагружения в случаях укладки двух (а) и четырех (б) семейств арматуры.

(см. равенство (3.1) и рис. 2б), а на рис. 7б и 8б – четырех семейств проволок (см. соотношения (3.2) и рис. 3). Номера кривых на рис. 7 и 8 соответствуют номерам видов механического нагружения цилиндрической оболочки (см. выражения (3.5)–(3.8)).

Поведение кривых на рис. 7а и особенно на рис. 8а свидетельствует о том, что в достаточно широком диапазоне изменения угла намотки  $\varphi_1$  время  $t_c$  является очень малым, например на рис. 8а – порядка 0.01 ч = 0.6 мин. Следовательно, при соответствующих углах армирования оболочки двумя семействами проволок разрушение связующего в такой КМ-конструкции начнется еще до или почти сразу после момента завершения ее термомеханического нагружения:  $t_c \approx t_*$  (см. соотношения (3.9) и (3.10)). Естественно, что такие структуры намотки цилиндрической оболочки являются неэффективными. Однако при других углах армирования  $\varphi_1$ , например при  $75^\circ \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$  в случае нагружения вида (3.5) и  $\Theta_* = 165$  °C (см. кривую 1 на рис. 7а) или при  $53^\circ \leq \varphi_1 \leq 57^\circ$

в случае нагружения вида (3.6) и  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$  (см. кривую 2 на рис. 7а), время  $t_c(\varphi_1)$  может быть много больше 1 ч. При увеличении температуры аналогичные диапазоны изменения углов намотки  $\varphi_1$ , при которых КМ-конструкция обладает высокой эффективностью, резко сужаются (см. поведение кривых 1 и 2 на рис. 8а, рассчитанные при  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$ ). При указанных углах  $\varphi_1$ , когда  $t_c(\varphi_1) \gg 1$  ч, ползучесть КМ-оболочки уже нельзя рассматривать как кратковременную, поэтому для адекватного описания механического поведения армированной конструкции в этих случаях необходимо привлекать более общие теории ползучести, учитывающие и ее первую стадию – стадию упрочнения [7, 13, 15, 18, 19, 22]. (Моделирование соответствующего неупругого деформирования металлокомпозитных конструкций выходит за рамки данной работы.) Если предполагается разовая эксплуатация цилиндрической оболочки в условиях кратковременной ползучести, то при углах намотки  $\varphi_1$ , для которых, согласно поведению кривых 1 и 2 на рис. 7а и 8а,  $t_c(\varphi_1) \gg 1$  ч, целесообразно существенно уменьшить интенсивности армирования  $\mu_k$ , сократив тем самым общий расход волокон, либо при фиксированных значениях  $\mu_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) сократить общий объем материала КМ-конструкции за счет уменьшения ее толщины.

Поведение кривых 1 и 2 на рис. 7а и особенно на рис. 8а свидетельствует о том, что на некоторых интервалах изменения углов намотки  $\varphi_1$  зависимости  $t_c(\varphi_1)$  обладают очень большой изменяемостью. Следовательно, для получения эффективных структур армирования оболочки при некоторых видах ее термосилового нагружения (например, при выполнении условий (3.5) или (3.6)) требуется высокоточное соблюдение направления намотки, при изготовлении соответствующего КМ-изделия. В частности, согласно поведению кривых 2 на рис. 8а, при  $N=2$  и нагружении вида (3.6) в случае рабочей температуры  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$  эффективными для цилиндрической оболочки будут лишь структуры с углами намотки, изменяющимися в очень узком диапазоне  $54^\circ 30' \leq \varphi_1 \leq 55^\circ 30'$ .

Из поведения кривой 4 на рис. 7а видно, что в общем случае нагружения КМ-конструкции (см. равенства (3.8)) при рабочей температуре  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$  армирование цилиндрической оболочки двумя семействами проволок с углами намотки  $\varphi_1 = -\varphi_2 = 55^\circ$  позволяет обеспечить ее работоспособность в течение времени порядка 1 ч (точнее  $t_c(55^\circ) = 0.808$  ч). Согласно же поведению кривой 4 на рис. 8а, такое армирование КМ-оболочки при тех же условиях механического нагружения, но при повышенной рабочей температуре  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$  обеспечивает работоспособность металлокомпозитной конструкции менее чем в течение получаса (точнее  $t_c(55^\circ) = 0.351$  ч).

Поведение кривой 3 на рис. 7а показывает, что из всех рассматриваемых видов механического нагружения КМ-оболочки самым неблагоприятным при ее армировании двумя семействами проволок является случай, когда конструкция нагружена внутренним давлением и сжата в осевом направлении (см. соотношения (3.7)). Вид этой кривой свидетельствует о том, что при таком типе нагружения и рабочей температуре  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$  наилучшим является армирование в окружном направлении ( $\varphi_1 = 90^\circ$ ). Однако критическое время работоспособности конструкции даже в этом случае является весьма малым:

$t_c(90^\circ) = 0.159$  ч. С повышением же температуры ситуация в этом случае резко ухудшается. Так, кривая 3 на рис. 8а, рассчитанная при рабочей температуре  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$ , визуально практически не отличается от оси абсцисс. (Поведение этой кривой качественно аналогично поведению кривой 3 на рис. 7а, но ординаты точек на кривой 3 на рис. 8а изменяются в очень узком диапазоне  $4.56 \cdot 10^{-3} \leq t_c(\varphi_1) \leq 9.75 \cdot 10^{-3}$  ч.) Таким образом, при термосиловом нагружении цилиндрической оболочки вида (3.7), (3.9) и (3.10) ее намотка двумя семействами волокон по направлениям (3.1) при любых углах армирования  $\varphi_1$  является неэффективной как при рабочей температуре  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$  (см. кривую 3 на рис. 8а), так и при  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$  (см. кривую 3 на рис. 7а). Очевидно, что в этих случаях целесообразно использовать другой тип структуры, например намотку армирующих проволок по четырем ( $N=4$ ) направлениям (3.2) (см. рис. 3), учитывая при этом выражения (3.3) и (3.4).

Как уже отмечалось, соответствующие зависимости  $t_c(\varphi_1)$ , рассчитанные при  $N=4$  и всех рассматриваемых видах термосилового нагружения цилиндрической оболочки, представлены на рис. 7б (при  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$ ) и 8б (при  $\Theta_* = 235^\circ\text{C}$ ). Поведение кривых 3 на этих рисунках свидетельствует о том, что при намотке четырех семейств проволок в случае нагружения вида (3.7), в отличие от рис. 7а и 8а, существует достаточно широкий диапазон изменения углов армирования  $\varphi_1$ , при которых металлокомпозитная оболочка имеет достаточно длительный расчетный срок службы, когда  $t_c(\varphi_1) \gg 1$  ч. Аналогично, формы кривых 1 и 2 на рис. 7б и 8б демонстрируют, что и в случаях нагружения вида (3.5) и (3.6) также имеются достаточно широкие (гораздо большие, чем на рис. 7а и 8а) диапазоны изменения углов намотки  $\varphi_1$  в структуре (3.2), при которых армированная цилиндрическая оболочка обладает весьма длительной расчетной прочностью. Как видно, кривые 1–3 на рис. 7б и 8б имеют две ветви; указанные диапазоны изменения угла  $\varphi_1$  расположены левее левой ветви соответствующей кривой и правее правой ее ветви.

Однако сравнение кривых 4 на рис. 7а,б и 8а,б (при одинаковых значениях рабочей температуры  $\Theta_*$ ) показывает, что в общем случае нагружения цилиндрической оболочки (см. равенства (3.8)) замена структуры армирования (3.1) на структуру (3.2) приводит к уменьшению расчетного срока службы исследуемого КМ-изделия. При таком виде нагружения оболочка дополнительно скручивается ( $T_{12} = T_{21} > 0$ ), поэтому направления  $x_1$  и  $x_2$  не совпадают с направлениями главных напряжений в композиции  $\sigma_{ij}$ . Направления же ортотропии в рассматриваемых двух структурах армирования (см. равенства (3.1) и (3.2)), наоборот, совпадают с продольным  $x_1$  и окружным  $x_2$  направлениями в данной конструкции. Такое рассогласование направлений главных напряжений в композиции и направлений ее ортотропии и является причиной того, что в случае нагружения вида (3.8) оба варианта армирования обеспечивают достаточно низкую продолжительность работоспособности КМ-изделия по сравнению с другими видами ее термосилового нагружения (ср. кривые 4 с кривыми 1–3 на рис. 7б и 8б, а также кривые 4 с кривыми 1 и 2 на рис. 7а и 8а). Для повышения эффективности армирования цилиндрической оболочки при ее нагружении вида (3.8) необходимо отказаться от условия симметричной намотки и осуществлять целевую оптимизацию (по условию  $\max t_c$ )

на структурах армирования более общего вида, чем задаваемых равенствами (3.1) и (3.2).

Выше обсуждались зависимости  $t_c(\phi_1)$  в случае нагружения цилиндрической КМ-оболочки внутренним давлением. Если же такая конструкция нагружается внешним давлением, то в равенствах (3.5)–(3.8) следует  $p$  заменить на  $-p$  при сохранении выражений (3.9) и (3.10). При этом зависимости  $t_c(\phi_1)$  не будут полностью совпадать с приведенными на рис. 7 и 8, однако визуально они практически неотличимы от кривых, изображенных на этих рисунках. Кроме того, если оболочка нагружается только в осевом направлении, т.е. в отличие от соотношений (3.5) имеем:

$$T_{11} = Rp, \quad T_{12} = T_{21} = T_{22} \equiv 0,$$

где под  $p$  следует понимать не внутреннее или внешнее давление, а некоторый параметр нагружения, изменяющийся во времени по закону (3.10), то в случае намотки двумя семействами проволок зависимости  $t_c(\phi_1)$  будут зеркально симметричны кривым 1 на рис. 7а и 8а относительно вертикальной прямой  $\phi_1 = 45^\circ$ . В случае же укладки четырех семейств арматуры зависимости  $t_c(\phi_1)$  при таком виде нагружения совпадают с кривыми 1 на рис. 7б и 8б.

Особый интерес вызывает изучение зависимостей  $\omega_k(t)$  при тех углах намотки  $\phi_1$ , при которых КМ-оболочка обладает достаточно длительной прочностью, т.е. когда  $t_c(\phi_1) \gg 1$  ч. Именно поэтому на рис. 6 представлены соответствующие кривые, полученные при рабочей температуре  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$  в случае нагружения цилиндрической оболочки с днищами (см. соотношения (3.6)), армированной четырьмя семействами проволок (см. равенства (3.2)) при значениях угла намотки  $\phi_1 = 0^\circ$  (кривые 1, 1' и 1''),  $\phi_1 = 25^\circ$  (кривые 2, 2' и 2'') и  $\phi_1 = 30^\circ$  (кривые 3, 3' и 3''). Поведение кривой 2 на рис. 7б свидетельствует о том, что при таких значениях углов  $\phi_1$  действительно выполняется неравенство  $t_c(\phi_1) \gg 1$  ч. Особенность поведения всех кривых на рис. 6 при  $t > 0.2$  ч характеризует ползучесть материалов всех компонентов металлокомпозиции цилиндрической оболочки при указанных значениях  $\phi_1$  как ограниченную. Именно поэтому при рассматриваемых углах намотки арматуры получается критическое время  $t_c(\phi_1) \gg 1$  ч.

Ординаты точек на кривых 1, 2 и 3 (а также и на кривых 1', 2' и 3') на рис. 6 существенно различны, т.е. в значительной степени зависят от угла армирования  $\phi_1$ . Следовательно, представляет интерес изучение зависимостей параметров поврежденности компонентов композиции  $\omega_k$  от угла намотки  $\phi_1$  при достаточно больших моментах времени в тех случаях, когда имеет место сильное неравенство  $t_c(\phi_1) \gg 1$  ч. В связи с этим на рис. 9 представлены кривые, соответствующие указанным зависимостям  $\omega_k^*(\phi_1)$ , полученным для момента времени  $t = 4$  ч. Кривые на рис. 9 рассчитаны при  $N = 4$  (см. соотношения (3.2)) и рабочей температуре  $\Theta_* = 165^\circ\text{C}$ . Кривые 1–3 соответствуют связующей матрице ( $k = 0$ ), а кривые 1'–3' – армирующим элементам первого семейства ( $k = 1$ ). Номера кривых на рис. 9 (со штрихами и без них) соответствуют номерам видов механического нагружения рассматриваемой КМ-конструкции (см. равенства (3.5)–(3.7)). В силу симметрии структуры армирования относительно направления  $x_1$  (см. равенства (3.2)) и отсутствия

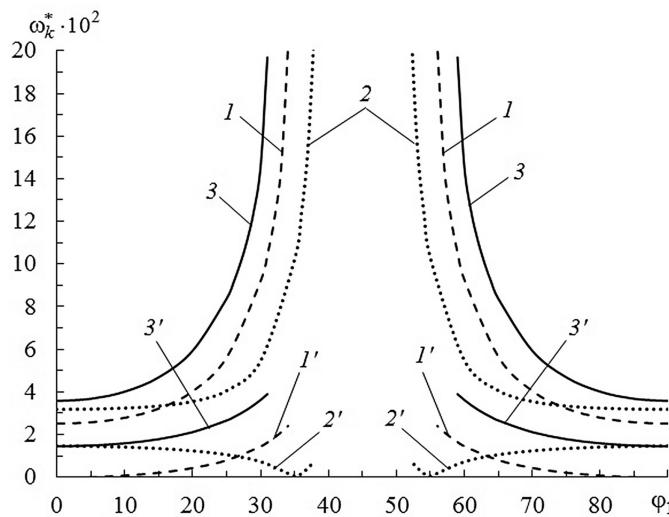


Рис. 9. Зависимости параметров поврежденности фаз композиции цилиндрической оболочки от угла намотки  $\varphi_1$  [град], рассчитанные на момент времени  $t = 4$  ч при рабочей температуре  $\Theta_s = 165$  °С, разных видах механического нагружения и укладке четырех семейств армирующих проволок.

скручивания цилиндрической оболочки ( $T_{12} = T_{21} \equiv 0$ ) зависимости  $\omega_2^*(\varphi_1)$  для арматуры второго семейства полностью совпадают с кривыми  $1'-3'$  на рис. 9.

Из рис. 9 видно, что зависимости  $\omega_k^*(\varphi_1)$  имеют значительную изменяемость, особенно для связующего материала (см. кривые  $1-3$ ). При этом (за исключением кривой  $2'$ ) наименьшие значения  $\omega_k^*$  достигаются при углах  $\varphi_1 = 0^\circ$  и  $\varphi_1 = 90^\circ$ , т.е. при намотке арматуры по направлениям главных напряжений в КМ-конструкции (см. рис. 3 и соотношения (3.2)–(3.7)). Следовательно, при работе металлокомпозитного изделия в условиях кратковременной ползучести целесообразно в нем реализовать рациональные структуры армирования, например укладывая армирующие элементы по направлениям главных напряжений в его композиции, если в процессе эксплуатации КМ-конструкции эти направления не изменяются (как это и имеет место в рассматриваемых случаях). Такое целевое управление структурой армирования позволяет существенно снизить поврежденность субструктурных элементов композиции изделия на заданных интервалах времени, а значит позволяет уменьшить расход арматуры или материалоемкость всей КМ-конструкции в целом при фиксированных сроках ее эксплуатации.

**Заключение.** Разработанная структурная численно-аналитическая модель механики композиционных материалов, использующая алгоритм шагов по времени, позволяет описывать кратковременную ползучесть металлокомпозитных изделий, многонаправленно армированных непрерывными волокнами (проводками). При этом учитывается возможное пластическое деформирование всех компонентов композиции и термочувствительность их физико-механических характеристик.

Расчеты, проведенные для безмоментных металлокомпозитных колец и цилиндрических оболочек при разных видах их механического нагружения и разных значениях рабочих температур, продемонстрировали: при эксплуатации таких КМ-конструкций в условиях кратковременной ползучести в силу существенной физической нелинейности соответствующих задач варьирование структуры армирования (направлений намотки) оказывает существенно большее влияние на механический отклик таких изделий, чем в случаях их чисто термоупругого деформирования, причем с увеличением рабочей температуры это влияние резко возрастает. В силу этих обстоятельств особую актуальность приобретает проблема отыскания оптимальных или рациональных структур армирования КМ-конструкций, предполагающихся к эксплуатации в условиях кратковременной ползучести. Показано: если в процессе работы таких изделий усредненные напряжения в их композиции изменяются пропорционально некоторому параметру, зависящему от времени, т.е. не изменяются направления главных напряжений в металлокомпозиции (что имеет место, в частности, в безмоментных оболочках при их пропорциональном нагружении), то одним из критериям рационального проектирования КМ-конструкций может служить требование намотки армирующих волокон по направлениям главных усредненных напряжений в их композиции. При рациональных структурах армирования в процессе деформирования материалы фаз металлокомпозиции могут проявлять признаки ограниченной ползучести. С одной стороны, это позволяет гарантировать достаточно длительные сроки эксплуатации КМ-изделия с такими структурами, а с другой стороны, позволяет существенно снизить либо расход силовых элементов (проводок), либо общий объем материала конструкции, например за счет уменьшения ее толщины при фиксированных плотностях армирования металлокомпозиции. Последнее целесообразно осуществлять в тех случаях, когда расчетные сроки эксплуатации КМ-конструкций, работающей в условиях кратковременной ползучести, получаются чрезмерно избыточными.

Работа выполнена в рамках госзадания (№ госрегистрации 124021400036-7).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Композиционные материалы. Справочник* / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
2. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
3. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
4. *Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4<sup>th</sup> ed.* Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. 815 p.
5. *Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2018. 448 с.
6. *Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46. № 5. P. 807–817.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>

7. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
8. *Бондарь В.С.* Неупругость. Варианты теории. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
9. *Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., Sakihara M., Minoshima K.* A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy // Mater. Sci. Eng. A. 2010. V. 527. № 29–30. P. 7646–7657.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>
10. *Panich S., Uthaisangsuk V., Suranuntchai S., Jirathearanat S.* Investigation of anisotropic plastic deformation of advanced high strength steel // Mater. Sci. Eng. A. 2014. V. 592. P. 207–220.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2013.11.010>
11. *He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D.J., Horstemeyer M.F.* A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites // Mech. Adv. Mater. Struc. 2021. № 17. P. 1775–1796.  
<https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>
12. *Nizolek T.J., Pollock T.M., McMeeking R.M.* Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 2021. V. 146. P. 104183.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>
13. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
14. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Физматгиз, 1970. 224 с.
15. *Betten J.* Creep mechanics. Berlin: Springer – Verlag, 2002. 327 p.
16. *Vakili-Tahami F., Hayhurst D.R., Wong M.T.* High-temperature creep rupture of low alloy ferritic steel butt-welded pipes subjected to combined internal pressure and end loading // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 2005. V. 363. P. 2629–2661.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.2005.1583>
17. *Yao Hua-Tang, Xuan Fu-Zhen, Wang Zhengdong, Tu Shan-Tung.* A review of creep analysis and design under multi-axial stress states // Nucl. Eng. Des. 2007. V. 237. № 18. P. 1969–1986.  
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2007.02.003>
18. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
19. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. 3-е. М.: ЛЕНАНД, 2019. 752 с.
20. *Chow C.L., Yang X.J., Chu Edmund.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. 2001. V. 123. № 4. P. 403–408.  
<https://doi.org/10.1115/IMECE2000-1873>
21. *Kulagin D.A., Lokoshchenko A.M.* Analysis of the influence of aggressive environment on creep and creep rupture of rod under pure bending // Arch. Appl. Mech. 2005. V. 74. P. 518–525.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-004-0368-z>
22. *Naumenko K., Altenbach H.* Modelling of creep for structural analysis. Berlin: Springer – Verlag, 2007. 220 p.
23. *Апетъян В.Э., Быков Д.Л.* Определение нелинейных вязкоупругих характеристик наполненных полимерных материалов // Космонавтика и ракетостроение. 2002. № 3 (28). С. 202–214.

24. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.П. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикладная механика. 2007. № 5. С. 20–34.
25. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 2. С. 61–71.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.2.14>
26. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast. 2012. V. 36. P. 86–112.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>
27. Янковский А.П. Моделирование установившейся ползучести перекрестно армированных металлокомпозитов с учетом анизотропии фазовых материалов. 1. Случай пространственного армирования // Механика композитных материалов. 2013. Т. 49. № 3. С. 365–380.
28. Янковский А.П. Моделирование установившейся ползучести перекрестно армированных металлокомпозитов с учетом анизотропии фазовых материалов. 2. Случай плоского армирования // Механика композитных материалов. 2013. Т. 49. № 4. С. 537–552.
29. Янковский А.П. Моделирование неустановившейся ползучести изгибаемых армированных пластин из нелинейно-наследственных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 92–110.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.8>
30. Янковский А.П. Моделирование неизотермического вязкоупругопластического поведения гибких армированных пластин // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 350–370.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28>
31. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
32. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
33. Малмайстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
34. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И.И. Гольденблата. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
35. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.
36. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. 2<sup>nd</sup> Ed. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.

---

## MODELING OF SHORT-TERM CREEP OF FIBROUS MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC DEFORMATION OF COMPOSITION COMPONENTS

A. P. Yankovskii<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

\*E-mail: yankovsky\_ap@itam.nsc.ru

**Abstract** – A numerical and analytical model of the structural mechanics of multidirectionally reinforced metal-composites operating under short-term creep conditions has been developed. The materials of the components of the metal-composition are homogeneous and isotropic; their thermal sensitivity and thermoelastoplastic deformation are taken into account. Plastic deformation of the phases of the composition is described by the relations of the theory of flow with isotropic hardening. As damage parameters for the components of a metal-composition, their relative mechanical deformation accumulated during loading is used – the deformation criterion for failure during short-term creep of metals. To construct the specified mathematical model, due to its significant physical nonlinearity, an algorithm of variable time steps was used. Linearization of the governing equations for the components and the metal-composition as a whole at each time step is carried out using a method similar to the secant modulus method. Using the example of moment-free cylindrical shells, it is demonstrated that, due to the essentially physical nonlinearity of the modeled problem, varying the reinforcement structure in metal-composite structures operating under conditions of short-term creep has a significantly greater impact on their mechanical response than when operating under conditions of thermoelastic deformation. With an increase in the operating temperature of a metal-composite product, this influence increases sharply. With some, in particular rational, reinforcement structures, the materials of the metal-composition of the product can be deformed, exhibiting signs inherent in limited creep. With such reinforcement structures, the structure can operate effectively under conditions of long-term loading, and not only under short-term creep.

**Keywords:** multidirectional reinforcement, short-term creep, thermoelastoplastic deformation, thermal sensitivity, metal-composition, structural model, time step algorithm

### REFERENCES

1. Composite materials. Handbook. (Kompozitsionnye materialy. Spravochnik) / Ed. D.M. Karpinos. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p. (in Russian)
2. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nonlinear problems of dynamics composites designs (Nelinejnye zadachi dinamiki kompositnykh konstrukciy). Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State University, 2002. 400 p. (in Russian)
3. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells (Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek). Moscow: Fizmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)

4. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics / 4<sup>th</sup> ed. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. 815 p.
5. *Dimitrienko Yu.I.* Mechanics of composite structures at high temperatures (Mekhanika kompozitnykh konstruktsiy pri vysokikh temperaturakh). Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
6. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011. V. 46. P. 807–817.
7. *Malinin N.N.* Applied Theory of Plasticity and Creep (Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti). Moscow: Mashinostroenie, 1968. 400 p. (in Russian)
8. *Bondar' V.S.* Inelasticity. Variants of the theory (Neuprugost'. Varianty teorii). Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p. (in Russian)
9. *Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., Sakihara M., Minoshima K.* A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy // Materials Science and Engineering A. 2010. V. 527. P. 7646–7657.
10. *Panich S., Uthaisangsuk V., Suranunthai S., Jirathearanat S.* Investigation of anisotropic plastic deformation of advanced high strength steel // Materials Science & Engineering A. 2014. V. 592. P. 207–220.
11. *He G., Liu Y., Hamm Y., Bammann D.J., Horstemeyer M.F.* A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites // Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020. № 0.  
<https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>
12. *Nizolek T.J., Pollock T.M., McMeeking R.M.* Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids // J. Mech. Phys. Solids, 2021, vol. 146.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>
13. *Kachanov L.M.* Creep theory (Teoriya polzuchesti). Moscow: Fizmatgiz, 1960. 455 p. (in Russian)
14. *Rabotnov Yu.N., Mileiko S.T.* Short-term creep (Kratkovremennaya polzuchest'). Moscow: Fizmatgiz, 1970. 224 p. (in Russian)
15. *Betten J.* Creep mechanics. Berlin: Springer – Verlag, 2002, 327 p.
16. *Vakili-Tahami F., Hayhurst D.R., Wong M.T.* High-temperature creep rupture of low alloy ferritic steel butt-welded pipes subjected to combined internal pressure and end loading // Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Ser. A. 2005. V. 363. P. 2629–2661.
17. *Yao Hua-Tang, Xuan Fu-Zhen, Wang Zhengdong, Tu Shan-Tung.* A review of creep analysis and design under multi-axial stress states // Nuclear Engineering and Design, 2007. V. 237. P. 1969–1986.
18. *Lokoshchenko A.M.* Creep and long-term strength of metals (Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov). Moscow: Fizmatlit, 2016. 504 p. (in Russian)
19. *Rabotnov Yu.N.* Creep of structural elements. 3<sup>rd</sup> ed. (Polzuchest' elementov konstruktsiy. Izd. 3-ye). Moscow: LENAND, 2019. 752 p. (in Russian)
20. *Chow C.L., Yang X.J., Chu Edmund.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // Trans. ASME, Journal of Engineering Materials and Technology. 2001. V. 123. № 4. P. 403–408.
21. *Kulagin D.A., Lokoshchenko A.M.* Analysis of the influence of aggressive environment on creep and creep rupture of rod under pure bending // Archive of Applied Mechanics. 2005. V. 74. P. 518–525.

22. Naumenko K., Altenbach H. Modelling of creep for structural analysis. Berlin: Springer – Verlag, 2007. 220 p.
23. Apet'yan V.E., Bykov D.L. Determination of nonlinear viscoelastic characteristics of filled polymeric materials (Opredelenie nelineinykh vyazkouprugikh kharakteristik napolnennykh polimernykh materialov) // Cosmonautics and Rocket Engineering. 2002. V. 3. № 28. P. 202–214. (in Russian)
24. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., Fernati P.P. Nonlinear creep of fibrous unidirectional composites under tension in the direction of reinforcement (Nelineinaya polzuchest' voloknistykh odnonapravlennykh kompozitov pri rastyazhenii v napravlenii armirovaniya) // Applied Mechanics. 2007. № 5. P. 20–34. (in Russian)
25. Kulikov R.G., Trufanov N.A. Application of iteration method for solving the problem of deformation of unidirectional composites with nonlinear viscoelastic matrix (Primeneniye iteratsionnogo metoda k resheniyu zadachi deformirovaniya odnonapravlennogo kompozitsionnogo materiala s nelineyno-vyazkouprugim svyazuyushchim) // Computational Continuum Mechanics. 2011. V. 4. № 2. P. 61–71. (in Russian)
26. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an *incremental* variational principle // International Journal of Plasticity. 2012. V. 36. P. 86–112.
27. Yankovskii A.P. Simulation of the steady-state creep of cross-reinforced metal composites with account of anisotropy of phase materials. 1. The case of 3D reinforcement // Mechanics of Composite Materials. 2013. V. 49. № 3. P. 251–260.
28. Yankovskii A.P. Simulation of the steady-state creep of cross-reinforced metal composites with account of anisotropy of phase materials. 2. The case of 2D reinforcement // Mechanics of Composite Materials. 2013. V. 49. № 4. P. 359–368.
29. Yankovskii A.P. Modelling of non-steady creep of bending reinforced plates made of nonlinear hereditary materials (Modelirovaniye neustanovivsheysya polzuchesti izgibayemykh armirovannykh plastin iz nelineyno-nasledstvennykh materialov) // Computational Continuum Mechanics. 2018. V. 11. № 1. P. 92–110. (in Russian).
30. Yankovskii A.P. Modeling of nonisothermal viscoelastic–plastic behavior of flexible reinforced plates // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2022. V. 63. № 7. P. 1243–1263.
31. Dekker K., Verwer J.G. Stability of Runge – Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation. Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p.
32. Khazhinskii G.M. Model of deformation and fracture of metals (Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov). Moscow: Nauchny mir, 2011. 231 p. (in Russian).
33. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. Resistance of rigid polymeric materials (Soprotivlenie zhyestkikh polimernykh materialov). Riga: Zinatne, 1972. 500 p. (in Russian).
34. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures (Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh terperatur). Ed. I.I. Gol'denblat. Moscow: Mashinostroenie, 1965. 567 p. (in Russian).
35. Pisarenko G.S., Mozharovsky N.S. Equations and boundary value problems of the theory of plasticity and creep. Reference manual (Uravneniya i krayevyye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti. Spravochnoye posobiye). Kyiv: Naukova Dumka, 1981. 496 p. (in Russian).
36. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. 2nd Ed. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.